ECOLE DES HAUTES ETUDES COMMERCIALES

CONCOURS D'ADMISSION SUR CLASSES PREPARATOIRES

MATHEMATIQUES I

OPTION SCIENTIFIQUE

Samedi 18 mai 1996

Dans tout le problème, on désigne par n un entier naturel donné supérieur ou égal à 2 et par f une application de classe C^{2n} du segment $[-1,1]$ dans $\mathbb{R}$.

On se propose d'établir une méthode de calcul approché de l'intégrale $\mathcal{I}(f) = \int_{-1}^{1} f(t)\mathrm{d}t$

Dans la partie I, on étudie le polynôme $P_n(x) = (x^2-1)^n$, ses dérivées successives $P_n^{(j)}$ et notamment sa dérivée $n^{\text{ème}}$: $P_n^{(n)}$.

La partie II propose l'étude de deux procédés d'interpolation polynomiale de la fonction f. Le premier permet de définir la méthode utilisée pour le calcul d'une valeur approchée de $\mathcal{I}(f)$, le second de majorer l'erreur commise.

PARTIE I.

1. ***Étude des racines de P_n et de ses dérivées.***

a. Établir l'existence, pour tout entier naturel j inférieur ou égal à n, d'un polynôme Q_j tel que, pour tout nombre réel x :

$$\begin{cases} P_n^{(j)}(x) = (x^2-1)^{n-j}Q_j(x) \\ Q_j(-1) \neq 0 \quad \text{et} \quad Q_j(1) \neq 0 \end{cases}$$

On pourra raisonner par récurrence sur l'entier j et on précisera l'expression de Q_{j+1} en fonction de Q_j pour $0 \leqslant j \leqslant n-1$.

En déduire les valeurs en -1 et en 1 de P_n et de ses dérivées d'ordre j strictement inférieur à n.

b. Énoncer avec précision le théorème de Rolle. Établir que le polynôme P_n' admet au moins une racine dans l'intervalle $]-1,1[$ puis que le polynôme P_n'' admet au moins deux racines distinctes dans l'intervalle $]-1,1[$.

Démontrer que, pour tout entier naturel j compris entre 1 et n, le polynôme $P_n^{(j)}$ admet au moins j racines distinctes dans l'intervalle $]-1,1[$.

c. En déduire que le polynôme $P_n^{(n)}$ admet exactement n racines réelles distinctes et que celles-ci appartiennent à l'intervalle $]-1,1[$.

Dans toute la suite du problème, ces racines sont notées $r_1, r_2, \ldots, r_n$ avec $-1 < r_1 < r_2 < \ldots < r_n < 1$.

2. ***Calcul d'une intégrale auxiliaire.***

On pose, pour tout couple (p,q) d'entiers naturels :

$$W(p,q) = \int_{-1}^{1} (t-1)^p(t+1)^q\,\mathrm{d}t$$

a. À l'aide d'une intégration par parties, établir une relation entre $W(p+1,q-1)$ et $W(p,q)$ lorsque $q \geqslant 1$.

b. En déduire que $W(n,n) = (-1)^n \dfrac{2^{2n+1}(n!)^2}{(2n+1)!}$.

3. ***Calcul d'intégrales associées au polynôme P_n et à ses dérivées.***

Dans cette question, on désigne par Q un polynôme à coefficients réels.

a. Établir rigoureusement l'égalité suivante :

$$\int_{-1}^{1} Q(t)P_n^{(n)}(t)\,dt = (-1)^n \int_{-1}^{1} Q^{(n)}(t)P_n(t)\,dt$$

b. Quelle est la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_{-1}^{1} Q(t)P_n^{(n)}(t)\,dt$ lorsque Q est de degré strictement inférieur à n ?

c. Expliciter $P_n^{(2n)}$ puis exprimer $\displaystyle\int_{-1}^{1} \left(P_n^{(n)}(t)\right)^2 dt$ en fonction de $W(n,n)$ et obtenir ainsi sa valeur.

PARTIE II.

1. ***Polynôme d'interpolation de Lagrange de f.***

On pose désormais pour tout entier j compris entre 1 et n et pour tout nombre réel x :

$$L_j(x) = \prod_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n} \frac{x-r_i}{r_j-r_i} \qquad\qquad \lambda_j = \int_{-1}^{1} L_j(t)\,dt$$

a. Calculer $L_j(r_k)$ en distinguant suivant que k est, ou non, égal à j.
En déduire que $\Big(L_1, L_2, \ldots, L_n\Big)$ est une base de l'espace vectoriel $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ des polynômes de degré strictement inférieur à n.

b. Expliciter, dans la base précédente, un polynôme A_n de degré strictement inférieur à n tel que $A_n(r_j) = f(r_j)$ pour tout entier j compris entre 1 et n et prouver qu'un tel polynôme est unique.

c. Établir l'égalité $\displaystyle\int_{-1}^{1} A_n(t)dt = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j\, f(r_j)$.

On se propose désormais de prendre pour valeur approchée de l'intégrale $\mathcal{I}(f) = \displaystyle\int_{-1}^{1} f(t)dt$ *l'intégrale* $\mathcal{I}(A_n) = \displaystyle\int_{-1}^{1} A_n(t)dt$ *que l'on notera* $\mathcal{I}_n(f)$ *dans toute la suite du problème.*

En d'autres termes, on prend pour valeur approchée de l'intégrale $\mathcal{I}(f)$ *le nombre réel* $\mathcal{I}_n(f) = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \lambda_j\, f(r_j)$.

2. ***Comparaison de $\mathcal{I}(P)$ et de $\mathcal{I}_n(P)$ lorsque P est un polynôme.***

Dans cette question, on suppose que P est un polynôme dont le degré est noté $deg(P)$.
Par convention le degré du polynôme nul sera posé égal à $-\infty$.

a. On suppose que $deg(P) < n$. Comparer $\mathcal{I}(P)$ et $\mathcal{I}_n(P)$.

b. On suppose que $deg(P) < 2n$.
- Justifier l'existence d'un couple (Q, R) de polynômes tel que l'on ait :

$$P = Q\,P_n^{(n)} + R \quad \text{et} \quad deg(R) < n$$

- Montrer que $deg(Q) < n$.
- Déduire des résultats de la partie I que $\mathcal{I}(P) = \mathcal{I}(R)$.
- Comparer $\mathcal{I}(P)$ et $\mathcal{I}_n(P)$.

3. *Polynôme d'interpolation de Hermite de f.*

a. À tout polynôme H de l'espace vectoriel $\mathbb{R}_{2n-1}[X]$ des polynômes de degré strictement inférieur à $2n$, on associe l'élément $\varphi(H) = \Big(H(r_1), H'(r_1), H(r_2), H'(r_2), \ldots, H(r_n), H'(r_n)\Big)$ de $\mathbb{R}^{2n}$.

Établir que φ est une application linéaire de $\mathbb{R}_{2n-1}[X]$ dans $\mathbb{R}^{2n}$ et déterminer son noyau.

On rappelle qu'un polynôme non nul de degré d admet au plus d racines comptées avec leur ordre de multiplicité.

b. En déduire qu'il existe un polynôme B_n de degré strictement inférieur à $2n$ et un seul tel que $B_n(r_j) = f(r_j)$ et $B_n'(r_j) = f'(r_j)$ pour tout entier j compris entre 1 et n.

c. Déduire des résultats précédents que $\mathcal{I}(B_n) = \mathcal{I}_n(f)$.

4. *Majoration de $\big|\mathcal{I}(f) - \mathcal{I}_n(f)\big|$.*

Soit $M_{2n}(f)$ le maximum de $|f^{(2n)}(t)|$ lorsque t décrit le segment $[-1, 1]$.

Dans cette question, on désigne par x un nombre réel donné appartenant au segment $[-1, 1]$ et distinct des nombres $r_1, r_2, \ldots, r_n$.
On considère alors l'application g_x définie sur $[-1, 1]$ par

$$g_x(t) = f(t) - B_n(t) - \alpha \left(P_n^{(n)}(t)\right)^2$$

où α est le nombre réel (dont on justifiera l'existence) tel que $g_x(x) = 0$.

a. En appliquant le théorème de Rolle à l'application g_x sur des intervalles à préciser, prouver que g_x' s'annule en au moins n points de $]-1, 1[$ distincts de $r_1, r_2, \ldots, r_n$.

b. Calculer $g_x'(r_1), g_x'(r_2), \ldots, g_x'(r_n)$.
Établir que $g_x^{(2n)}$ s'annule en au moins un point c appartenant au segment $[-1, 1]$.

c. Expliciter $g_x^{(2n)}(t)$ et en déduire une expression de α en fonction de $f^{(2n)}(c)$ et de n.

d. À l'aide de l'égalité $g_x(x) = 0$, établir que $f(x) - B_n(x) = \dfrac{(n!)^2}{\big((2n)!\big)^3}\, f^{(2n)}(c) \left(P_n^{(n)}(x)\right)^2$.

e. Prouver que, pour tout réel x de $[-1, 1]$:

$$\big|f(x) - B_n(x)\big| \leqslant \frac{(n!)^2}{\big((2n)!\big)^3} M_{2n}(f) \left(P_n^{(n)}(x)\right)^2$$

On distinguera deux cas suivant que x est, ou non, égal à l'un des nombres réels $r_1, r_2, \ldots, r_n$.

Déduire alors des résultats des parties I et II que :

$$\big|\mathcal{I}(f) - \mathcal{I}_n(f)\big| \leqslant \frac{M_{2n}(f)}{\left(\mathrm{C}_{2n}^n\right)^2} \frac{2^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

f. On considère dans cette question une application g à valeurs dans $\mathbb{R}$ définie et de classe C^{2n} sur un segment $[a, b]$. On désigne par $M_{2n}(g)$ le maximum de $|g^{(2n)}(u)|$ lorsque u décrit le segment $[a, b]$.
En envisageant l'application f définie sur $[-1, 1]$ par $f(t) = g\Big(\dfrac{a+b}{2} + t\,\dfrac{b-a}{2}\Big)$, donner en fonction de a, b, n et $M_{2n}(g)$ un majorant de l'expression suivante :

$$\Big|\int_a^b g(u)\mathrm{d}u - \frac{b-a}{2}\sum_{j=1}^n \lambda_j\, g\Big(\frac{a+b}{2} + r_j\frac{b-a}{2}\Big)\Big|$$

5. ***Étude d'un cas particulier.***
Dans cette question, on suppose que $n = 2$.

a. Déterminer le polynôme P_2'', ses racines r_1 et r_2, les polynômes L_1, L_2 ainsi que les intégrales $\lambda_1 = \mathfrak{I}(L_1)$ et $\lambda_2 = \mathfrak{I}(L_2)$.

b. En appliquant la majoration obtenue au II.4.c., montrer que :

$$\left| \int_a^b g(u)\mathrm{d}u - \frac{b-a}{2} \left(g\left(\frac{a+b}{2} - \frac{b-a}{2\sqrt{3}}\right) + g\left(\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2\sqrt{3}}\right) \right) \right| \leqslant \frac{M_4(g)\,(b-a)^5}{4320}$$

c. On considère un entier $p \geqslant 1$ et on subdivise le segment $[a, b]$ en p sous-segments de même longueur, dont on note les milieux $c_1, c_2, \ldots, c_p$.
En appliquant l'inégalité précédente à chacun de ces p sous-segments, majorer en fonction de p et $M_4(g)$ l'expression suivante :

$$\left| \int_a^b g(u)\mathrm{d}u - \frac{b-a}{2p} \sum_{k=1}^{p} \left(g\left(c_k - \frac{b-a}{2p\sqrt{3}}\right) + g\left(c_k + \frac{b-a}{2p\sqrt{3}}\right) \right) \right|$$

d. Écrire en PASCAL un algorithme de calcul de la somme précédente, les réels a et b, la fonction g ainsi que l'entier p étant supposés donnés.

FIN

HEC M.I 96

PARTIE I

(Q1) Etudes des racines de P_n et de ses dérivées.

a) $P_n=(X^2-1)^n$. 1 et -1 sont des racines d'ordre n de P_n

[V1] Soit $j\in[[0,n]]$. 1 et -1 sont alors des racines d'ordre n-j de $P_n^{(j)}$; par conséquent il existe un polynôme Q_j et un seul tel que : $\begin{cases} P_n^{(j)}=(X^2-1)^{n-j}Q_j \\ Q_j(-1)\neq 0 \text{ et } Q_j(1)\neq 0.\end{cases}$

[V2] Retrouvons (au moins l'existence) par récurrence.

- La propriété est vraie pour $j=0$ ($Q_0=1$...)
- Supposons la propriété vraie pour $j\in[[0,n-1]]$ et montrons qu'elle est vraie pour j+1.
  $P_n^{(j)}=(X^2-1)^{n-j}Q_j$. En dérivant il vient : $P_n^{(j+1)}=(n-j)2X(X^2-1)^{n-j-1}Q_j+(X^2-1)^{n-j}Q_j'$
  Donc $P_n^{(j+1)}=(X^2-1)^{n-j-1}\left[2(n-j)X\ Q_j+(X^2-1)Q_j'\right]$

Posons $Q_{j+1}=2(n-j)X\,Q_j+(X^2-1)Q_j'$.

$Q_{j+1}\in\mathbb{R}[X]$ et $P_n^{(j+1)}=(X^2-1)^{n-(j+1)}Q_{j+1}$. Reste à prouver que $Q_{j+1}(1)\neq 0$ et $Q_{j+1}(1)\neq 0$.

$Q_{j+1}(-1)=2(n-j)(-1)Q_j(-1)\neq 0$ et $Q_{j+1}(1)=2(n-j)(1)Q_j(1)\neq 0$

$\begin{cases} n-j\neq 0\\ Q_j(-1)\neq 0\\ Q_j(1)\neq 0\end{cases}$

ceci achève la récurrence.

L'unicité est claire ($P_n^{(j)}=(X^2-1)^{n-j}Q_j=(X^2-1)^{n-j}\hat{Q}_j$ entraîne $Q_j=\hat{Q}_j$ par division par $(X^2-1)^{n-j}$!).

Notons que : $\underline{\forall j\in[[0,n-1]],\quad Q_{j+1}=2(n-j)X\,Q_j+(X^2-1)Q_j'.}$

$\forall j\in[[0,n-1]],\ P_n^{(j)}(-1)=((-1)^2-1)^{n-j}Q_j(-1)=0$; de même $\forall j\in[[0,n-1]],\ P_n^{(j)}(1)=0$.

$\underline{\forall j\in[[0,n-1]],\ P_n^{(j)}(-1)=P_n^{(j)}(1)}$ ... ce qui était clair dès le départ avec les ordres de multiplicité.

b) Rappel. f est une fonction numérique continue sur [a, b], dérivable sur]a,b[et telle que f(a)=f(b). Alors il existe un élément c de]a,b[tel que f'(c)=0.

Le tout en un ! Montrons par récurrence que pour tout $j\in[[1,n]]$, $P_n^{(j)}$ admet au moins j racines distinctes dans l'intervalle]-1,1[.

- P_n est continue sur $[-1,1]$ et dérivable sur $]-1,1[$. De plus $P_n(-1)=P_n(1)$ $(=0)$.
  Rolle montre alors qu'il existe $c\in]-1,1[$ tel que $P_n'(c)=0$.
  Ceci montre donc la propriété pour $j=1$.
- Supposons la propriété vraie pour $j\in[\![1,n-1]\!]$ et montrons la pour $j+1$.
  Soient $a_1,a_2,\dots,a_j$ $(a_1<a_2<\dots<a_j)$ j racines distinctes de $P_n^{(j)}$ dans $]-1,1[$.
  Posons $a_0=-1$ et $a_{j+1}=1$. $-1=a_0<a_1<a_2<\dots<a_j<a_{j+1}=1$.
  $\forall k\in[\![0,j+1]\!]$, $P_n^{(j)}(a_k)=0$. ($j<n$!).
  Fixons k dans $[\![0,j]\!]$. $P_n^{(j)}$ est continue sur $[a_k,a_{k+1}]$ et dérivable sur $]a_k,a_{k+1}[$.
  De plus $P_n^{(j)}(a_k)=P_n^{(j)}(a_{k+1})$ $(=0)$; donc $\exists\, c_k\in]a_k,a_{k+1}[$, $(P_n^{(j)})'(c_k)=0$.
  Par conséquent $c_0,c_1,\dots,c_j$ sont $j+1$ racines distinctes de $(P_n^{(j)})'=P_n^{(j+1)}$ appartenant à l'intervalle $]-1,1[$ $(-1=a_0<c_0<a_1<c_1<a_2<\dots<a_j<c_j<a_{j+1}=1)$.
  Ceci achève la récurrence.
  Pour tout $j\in[\![1,n]\!]$, $P_n^{(j)}$ admet au moins j racines distinctes dans l'intervalle $]-1,1[$.

c) $P_n^{(n)}$ est un polynôme de degré n qui admet au moins n racines distinctes dans $]-1,1[$.
Or un polynôme de degré n admet au plus n racines. Par conséquent :

1°. P_n admet exactement n racines réelles distinctes

2°. ces racines sont dans $]-1,1[$.

(Q2) Calcul d'une intégrale auxiliaire.

a) Soit $(p,q)\in\mathbb{N}^2$. Supposons $q\geq 1$.

$$W(p,q)=\int_{-1}^{1}\underbrace{(t-1)^p}_{u'}\underbrace{(t+1)^q}_{v}\,dt=\underbrace{\left[\frac{1}{p+1}(t-1)^{p+1}(t+1)^q\right]_{-1}^{1}}_{=0}-\int_{-1}^{1}\frac{1}{p+1}(t-1)^{p+1}q\,(t+1)^{q-1}\,dt$$

$$W(p,q)=-\frac{q}{p+1}\,W(p+1,q-1).$$

b) Soit $(p,q)\in\mathbb{N}^2$. $W(p,q)=-\frac{q}{p+1}W(p+1,q-1)=\left(-\frac{q}{p+1}\right)\left(-\frac{q-1}{p+2}\right)W(p+2,q-2)$ ... pour $q\geq 2$

Recherche de la valeur de $W(p,q)$

$$W(p,q)=\left(-\frac{q}{p+1}\right)\left(-\frac{q-1}{p+2}\right)\cdots\left(-\frac{q-k+1}{p+k}\right)W(p+k,q-k)\quad\text{pour } q\geq k$$

$$W(p,q)=\left(-\frac{q}{p+1}\right)\left(-\frac{q-1}{p+2}\right)\cdots\left(-\frac{q-k+1}{p+k}\right)\cdots\left(-\frac{q-q+1}{p+q}\right)W(p+q,0)$$

$$W(p,q)=(-1)^q\frac{p!\,q!}{(p+q)!}\,W(p+q,0).\quad W(p+q,0)=\int_{-1}^{1}(t-1)^{p+q}\,dt=\left[\frac{(t-1)^{p+q+1}}{p+q+1}\right]_{-1}^{1}$$

$W(p+q,0) = -\dfrac{(-2)^{p+q+1}}{p+q+1}$; donc $W(p,q) = -\dfrac{(-1)^q p!\,q!}{(p+q)!}\;\dfrac{1}{p+q+1}(-1)^{p+q+1}2^{p+q+1}$

$W(p,q) = (-1)^p\,\dfrac{2^{p+q+1}\,p!\,q!}{(p+q+1)!}$. Montrons cette formule par récurrence sur p.

Montrons alors que pour tout $p\in\mathbb{N}$: $\forall q\in\mathbb{N}$, $W(p,q) = (-1)^p\,\dfrac{2^{p+q+1}\,p!\,q!}{(p+q+1)!}$

→ $\forall q\in\mathbb{N}$, $W(0,q) = \int_{-1}^{1}(t+1)^q\,dt = \left[\frac{1}{q+1}(t+1)^{q+1}\right]_{-1}^{1} = \dfrac{2^{q+1}}{q+1} = (-1)^0\,\dfrac{2^{0+q+1}\,0!\,q!}{(0+q+1)!}$

La propriété est vraie pour $p=0$

→ Supposons la propriété vraie pour $p\in\mathbb{N}$ et montrons-la pour $p+1$.

Soit $q\in\mathbb{N}$. $W(p,q+1) = -\dfrac{q+1}{p+1}W(p+1,q)$ d'après a)

Donc $W(p+1,q) = -\dfrac{p+1}{q+1}W(p,q+1) \underset{H.R.}{=} -\dfrac{p+1}{q+1}(-1)^p\,\dfrac{2^{p+q+1+1}\,p!\,(q+1)!}{(p+q+1+1)!}$

$W(p+1,q) = (-1)^{p+1}\,\dfrac{2^{p+1+q+1}\,(p+1)!\,q!}{(p+1+q+1)!}$ ... ce qui achève la récurrence.

donc $\forall n\in\mathbb{N}$, $W(n,n) = (-1)^n\,\dfrac{2^{2n+1}\,n!\,n!}{(2n+1)!}$. $\forall n\in\mathbb{N}$, $W(n,n) = (-1)^n\,\dfrac{2^{2n+1}(n!)^2}{(2n+1)!}$.

Remarque .. Wallis n'est pas loin ($t=\cos\theta$ ... $W(n,n) = (-1)^n\int_0^{\pi}(\sin\theta)^{2n+1}d\theta = 2(-1)^n\int_0^{\pi/2}(\sin\theta)^{2n+1}d\theta$ ...)

Q3) Calcul d'intégrales associées au polynomes P_n et à ses dérivées.

a) Montrons par récurrence que si $Q\in\mathbb{R}[X]$:

$\forall k\in[\![0,n]\!]$, $\int_{-1}^{1}Q(t)\,P_n^{(n)}(t)\,dt = (-1)^k\int_{-1}^{1}Q^{(k)}(t)\,P_n^{(n-k)}(t)\,dt$

→ c'est clair pour $k=0$

→ Supposons la propriété vraie pour $k\in[\![0,n-1]\!]$ et montrons la pour $k+1$.

$\int_{-1}^{1}Q(t)P_n^{(n)}(t)\,dt = (-1)^k\int_{-1}^{1}\underset{u}{Q^{(k)}(t)}\;\underset{v'}{P_n^{(n-k)}(t)}\,dt = (-1)^k\left(\left[Q^{(k)}(t)\,P_n^{(n-k-1)}(t)\right]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1}Q^{(k+1)}(t)\,P_n^{(n-k-1)}(t)\,dt\right)$

Or $P_n^{(n-k-1)}(-1) = P_n^{(n-k-1)}(1) = 0$ car $0\leq n-k-1<n$ donc

$\int_{-1}^{1}Q(t)\,P_n^{(n)}(t)\,dt = (-1)^{k+1}\int_{-1}^{1}Q^{(k+1)}(t)\,P_n^{(n-(k+1))}(t)\,dt$ ce qui achève la récurrence.

La propriété étant vraie pour n : $\int_{-1}^{1}Q(t)P_n^{(n)}(t)\,dt = (-1)^n\int_{-1}^{1}Q^{(n)}(t)\,P_n(t)\,dt$ et ceci pour tout $Q\in\mathbb{R}[X]$.

b) Soit $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\deg Q < n$. $Q^{(n)} = 0_{\mathbb{R}[X]}$.

$$\int_{-1}^{1} Q(t) P_n^{(n)}(t)\,dt = (-1)^n \int_{-1}^{1} Q^{(n)}(t) P_n(t)\,dt = 0.$$

$$\forall Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X],\ \int_{-1}^{1} Q(t) P_n^{(n)}(t)\,dt = 0.$$

c) $P_n = (X^2-1)^n$ est un polynôme de degré $2n$ dont le coefficient de X^{2n} est 1.
Donc $P_n^{(2n)}$ est un polynôme ~~constant~~ et égal à $(2n)!$ $\quad P_n^{(2n)} = (2n)!$

$$\int_{-1}^{1} (P_n^{(n)}(t))^2 dt = \int_{-1}^{1} P_n^{(n)}(t) P_n^{(n)}(t)\,dt = (-1)^n \int_{-1}^{1} P_n^{(2n)}(t) P_n(t)\,dt = (-1)^n (2n)! \int_{-1}^{1} P_n(t)\,dt = (-1)^n (2n)!\, W(n,n).$$

$$\int_{-1}^{1} (P_n^{(n)}(t))^2 dt = (-1)^n (2n)!\, W(n,n) \quad = (-1)^{2n} (2n)! \frac{2^{2n+1}(n!)^2}{(2n+1)!} = \frac{2^{2n+1}(n!)^2}{2n+1}$$

$$\int_{-1}^{1} (P_n^{(n)}(t))^2 dt = \frac{2^{2n+1}(n!)^2}{2n+1}.$$

Ceci achève l'étude des polynômes de LEGENDRE

PARTIE II Après LEGENDRE, LAGRANGE et HERMITE

(Q1) Polynôme d'interpolation de LAGRANGE de f.

Nous posons $\forall j \in [\![1,n]\!]$, $L_j = \prod_{\substack{k=1 \\ k\neq j}}^{n} \frac{X-r_k}{r_j-r_k}$ $\qquad$ OK ? Bravo gégé pour ton super BAC !

a) $\forall i \in [\![1,n]\!]-\{j\}$, $L_j(r_i) = 0$ car $r_1, r_2, \dots, r_{j-1}, r_{j+1}, \dots, r_n$ sont des zéros de L_j

$L_j(r_j) = \prod_{\substack{k=1 \\ k\neq j}}^{n} \frac{r_j-r_k}{r_j-r_k} = 1$. Finalement $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $L_j(r_i) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases}$.

$\dim \mathbb{R}_{n-1}[X] = n$ et la famille $(L_1, L_2, \dots, L_n)$ a n éléments ; pour montrer que c'est une base de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ il suffit donc de prouver que c'est une famille libre.

Soit $(\lambda'_1, \dots, \lambda'_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $\sum_{j=1}^{n} \lambda'_j L_j = 0$.

$\forall i \in [\![1,n]\!]$, $0 = \sum_{j=1}^{n} \lambda'_j L_j(r_i) = \lambda'_i$; $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\lambda'_i = 0$. Ceci achève de prouver que la famille est libre et donc que c'est une base de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.

$(L_1, L_2, \dots, L_n)$ est une base de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.

b) Soit $P\in \mathbb{R}_{n-1}[X]$. Notons $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n$ les coordonnées de P dans la base $(L_1,L_2,\dots,L_n)$. $P=\sum_{i=1}^n \alpha_i L_i$

$\forall j\in [\![1,n]\!],\ P(r_j)=f(r_j)$

$\Updownarrow$

$\forall j\in [\![1,n]\!],\ \sum_{i=1}^n \alpha_i L_i(r_j)=f(r_j)$ $\leftarrow$ $L_i(r_j)=0$ si $i\neq j$ et 1 si $i=j$.

$\Updownarrow$

$\alpha_j=f(r_j)$

Donc $\underline{A_n=\sum_{j=1}^n f(r_j)L_j}$ est l'unique élément de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ qui coïncide avec f en $r_1,r_2,\dots,r_n$.

c) $\int_{-1}^1 A_n(t)\,dt=\int_{-1}^1\sum_{j=1}^n f(r_j)L_j(t)\,dt=\sum_{j=1}^n f(r_j)\int_{-1}^1 L_j(t)\,dt=\sum_{j=1}^n f(r_j)\lambda_j$. $\underline{\int_{-1}^1 A_n(t)\,dt=\sum_{j=1}^n \lambda_j f(r_j)}$.

Q2 Comparaison de $\mathcal{I}(P)$ et de $\mathcal{I}_n(P)$ lorsque P est un polynôme.

a) Soit $P\in\mathbb{R}[X]$ tel que $\deg P<n$. Soit $(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)$ les coordonnées de P dans la base $(L_1,L_2,\dots,L_n)$. $P=\sum_{j=1}^n \alpha_j L_j$; $\forall i\in[\![1,n]\!]$, $P(r_i)=\sum_{j=1}^n \alpha_j L_j(r_i)=\alpha_i$

Finalement : $P=\sum_{j=1}^n P(r_j)L_j$. (les coordonnées de P dans la base $(L_1,L_2,\dots,L_n)$ sont $P(r_1),P(r_2),\dots,P(r_n)$).

$\mathcal{I}(P)=\int_{-1}^1\sum_{j=1}^n P(r_j)L_j(t)\,dt=\sum_{j=1}^n P(r_j)\int_{-1}^1 L_j(t)\,dt=\sum_{j=1}^n P(r_j)\lambda_j=\mathcal{I}_n(P)$.

$\underline{\forall P\in\mathbb{R}_{n-1}[X],\ \mathcal{I}(P)=\mathcal{I}_n(P)}$.

b) Soit $P\in\mathbb{R}[X]$ tel que $\deg P<2n$.

Soit Q le quotient de la division de P par $P_n^{(n)}$ et R par reste.

$P=QP_n^{(n)}+R$ et $\deg R<\deg P_n^{(n)}=n$.

$\deg Q+n=\deg Q+\deg P_n^{(n)}=\deg(QP_n^{(n)})=\deg(P-R)<2n$; $\underline{\deg Q<n}$.

$\mathcal{I}(P)=\mathcal{I}(QP_n^{(n)})+\mathcal{I}(R)=\underbrace{\int_{-1}^1 Q(t)P_n^{(n)}(t)\,dt}_{=0 \text{ car } \deg Q<n}+\mathcal{I}(R)=\mathcal{I}(R)$ d'après I Q3b

Donc $\mathcal{I}(P)=\mathcal{I}(R)\underset{\deg R<n}{=}\mathcal{I}_n(R)=\sum_{j=1}^n\lambda_j R(r_j)=\sum_{j=1}^n\lambda_j\left(P(r_j)-Q(r_j)\underbrace{P_n^{(n)}(r_j)}_{=0}\right)=\sum_{j=1}^n\lambda_j P(r_j)=\mathcal{I}_n(P)$ $\leftarrow$ $R=P-QP_n^{(n)}$

Finalement : $\underline{\mathcal{I}(P)=\mathcal{I}(R)=\mathcal{I}_n(R)=\mathcal{I}_n(P)}$

$\underline{\forall P\in\mathbb{R}_{2n-1}[X],\ \mathcal{I}(P)=\mathcal{I}_n(P)}$.

(Q3) Polynôme d'interpolation de Hermite de f.

φ a) Soit $(H,U) \in \mathbb{R}_{2n-1}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

$\varphi(\lambda H+U) = ((\lambda H+U)(r_1),\dots,(\lambda H+U)(r_n), (\lambda H+U)'(r_1),\dots,(\lambda H+U)'(r_n))$

$\quad = (\lambda H(r_1)+U(r_1),\dots, \lambda H(r_n)+U(r_n), \lambda H'(r_1)+U'(r_1),\dots, \lambda H'(r_n)+U'(r_n))$

$\quad = \lambda(H(r_1),\dots,H(r_n),H'(r_1),\dots,H'(r_n)) + (U(r_1),\dots,U(r_n),U'(r_1),\dots,U'(r_n))$

$\varphi(\lambda H+U) = \lambda\varphi(H)+\varphi(U)$.

<u>φ est une application linéaire de $\mathbb{R}_{2n-1}[X]$ dans $\mathbb{R}^{2n}$.</u>

Soit $H \in \operatorname{Ker}\varphi$. $H(r_1)=H'(r_1)=0$, $H(r_2)=H'(r_2)=0$, $\dots$, $H(r_n)=H'(r_n)=0$.

$r_1, r_2, \dots, r_n$ sont donc des racines de H d'ordre au moins 2 ; H a au moins $2n$ racines comptées avec leurs ordres de multiplicité. H étant de degré au plus $2n-1$, H est le polynôme nul.

<u>$\operatorname{Ker}\varphi = \{0\}$</u> ; φ est injective.

b) φ est une application <u>linéaire injective</u> de $\mathbb{R}_{2n-1}[X]$ dans $\mathbb{R}^{2n}$ et <u>$\dim \mathbb{R}_{2n-1}[X] = \dim \mathbb{R}^{2n} = 2n$</u> ($<+\infty$!)

Par conséquent <u>φ est bijective</u>. Tout élément de $\mathbb{R}^{2n}$ possède un antécédent par φ dans $\mathbb{R}_{2n-1}[X]$ et un seul.

Soit $H \in \mathbb{R}_{2n-1}[X]$.

$\forall j \in [\![1,n]\!]$, $H(r_j)=f(r_j)$ et $H'(r_j)=f'(r_j)$

$\Leftrightarrow \varphi(H) = (f(r_1),\dots,f(r_n),f'(r_1),\dots,f'(r_n))$

$\Leftrightarrow H = \varphi^{-1}((f(r_1),\dots,f(r_n),f'(r_1),\dots,f'(r_n)))$

donc il existe un unique élément B_n de $\mathbb{R}_{2n-1}[X]$ tel que $\forall j \in [\![1,n]\!]$, $H(r_j)=f(r_j)$ et $H'(r_j)=f'(r_j)$;

$B_n = \varphi^{-1}((f(r_1),\dots,f(r_n),f'(r_1),\dots,f'(r_n)))$.

c) $B_n \in \mathbb{R}_{2n-1}[X]$ donc $I(B_n) = I_n(B_n) = \sum_{j=1}^{n}\lambda_j B_n(r_j) = \sum_{j=1}^{n}\lambda_j f(r_j) = I_n(f)$.

<u>$I(B_n) = I_n(B_n) = I_n(f)$.</u>

Exercice. Montrer que :

$$B_n = \sum_{j=1}^{n} f(r_j)L_j^2 + \sum_{j=1}^{n}\left[f'(r_j) - 2f(r_j)L_j'(r_j)\right](X-r_j)L_j^2$$

(Q4) Majoration de $|I(f)-I_n(f)|$.

a) • $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $g_K'(r_i) = \underbrace{f'(r_i) - B_n'(r_i)}_{=0} - \alpha\, 2\, R_n^{(1)}(r_i)\underbrace{R_n^{(0)}(r_i)}_{=0} = 0$

- $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $g_x(r_i) = f(r_i) - B_n(r_i) - \alpha\left(P_n^{(n)}(r_i)\right)^2 = f(r_i) - f(r_i) - \alpha 0^2 = 0$.

  $r_1, r_2, \dots, r_n$ sont donc des zéros de g_x.

  Montrons alors que l'on peut choisir α de telle manière que : $g_x(x) = 0$.

  $g_x(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) - B_n(x) - \alpha\left(P_n^{(n)}(x)\right)^2 = 0 \Leftrightarrow \alpha = \dfrac{f(x) - B_n(x)}{\left(P_n^{(n)}(x)\right)^2}$

  $P_n^{(n)}(x) \neq 0$ car $x \notin \{r_1, r_2, \dots, r_n\}$

  donc $\alpha = \dfrac{f(x) - B_n(x)}{\left(P_n^{(n)}(x)\right)^2}$. donne à g_x la valeur 0 en x.

  Finalement g_x admet au moins $n+1$ zéros dans $[-1,1]$: $r_1, r_2, \dots, r_n, x$.

  Ordonnons ces zéros, nous obtenons alors la suite strictement croissante $(y_1, y_2, \dots, y_{n+1})$.

  Fixons k dans $[\![1,n]\!]$.

  g_x est continue sur $[y_k, y_{k+1}]$ et au moins dérivable sur $]y_k, y_{k+1}[$, de plus $g_x(y_k) = g_x(y_{k+1})$. Par conséquent $\exists c_k \in]y_k, y_{k+1}[$, $g'_x(c_k)$.

  Ceci donne à g'_x n zéros $c_1, c_2, \dots, c_n$ distincts et distincts de $y_1, y_2, \dots, y_{n+1}$ donc de $r_1, r_2, \dots, r_n$ et de x.

  Notons encore que $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $c_k \in]y_k, y_{k+1}[$ donc $c_k \in]-1,1[$.

  g'_x s'annule en au moins n points de $]-1,1[$ distincts de $r_1, r_2, \dots, r_n$.

- Démontrons par récurrence que pour tout $i \in [\![1, 2n]\!]$, $g_x^{(i)}$ s'annule en au moins $2n+1-i$ points de $]-1,1[$ (notons que g_x est bien dans C^{2n} sur $[-1,1]$ car f l'est !)

  → c'est vrai pour $i = 1$ d'après ce qui précède

  → Supposons la propriété vraie pour $i \in [\![1, 2n-1]\!]$ et montrons-la pour $i+1$.

  Supposons donc que $g_x^{(i)}$ admette au moins $2n+1-i$ zéros dans $]-1,1[$: $z_1, z_2, \dots, z_{2n+1-i}$ avec $z_1 < z_2 < \dots < z_{2n+1-i}$.

  $\forall k \in [\![1, 2n+1-i-1]\!]$, $g_x^{(i)}$ est continue sur $[z_k, z_{k+1}]$, dérivable sur $]z_k, z_{k+1}[$ et $g_x^{(i)}(z_k) = g_x^{(i)}(z_{k+1})$ $(=0)$. Rolle nous dit alors que : $\exists t_k \in]z_k, z_{k+1}[$, $(g_x^{(i)})'(t_k) = 0$.

  Donc $t_1, t_2, \dots, t_{2n+1-(i+1)}$ sont $2n+1-(i+1)$ zéros de $(g_x^{(i)})' = g_x^{(i+1)}$ appartenant à $]-1,1[$.

  Ceci achève la récurrence.

La propriété étant vraie pour $2n$ et $2n+1-2n = 1$; $g_x^{(2n)}$ s'annule en au moins un point c de $]-1,1[$ donc de $[-1,1]$.

$\exists\, c \in]-1,1[,\ g_x^{(2n)}(c)=0.$

$\forall t \in [-1,1],\ g_x(t) = f(t) - B_n(t) - \alpha \left(P_n^{(n)}(t)\right)^2$

donc $\forall t \in [-1,1],\ g_x^{(2n)}(t) = f^{(2n)}(t) - B_n^{(2n)}(t) - \alpha\left[\left(P_n^{(n)}\right)^2\right]^{(2n)}(t)$

$\forall t \in \mathbb{R},\ B_n^{(2n)}(t) = 0$ car $B_n \in \mathbb{R}_{2n-1}[X]$

$\left[\left(P_n^{(n)}\right)^2\right]^{(2n)}$ est une constante car $\left(P_n^{(n)}\right)^2$ est un polynôme de degré $2n$. Précisons.

$P_n^{(n)}$ est de degré n et le coefficient de X^n dans $P_n^{(n)}$ est : $\frac{(2n)!}{n!}$

$\left(P_n^{(n)}\right)^2$ ——— du ——— X^{2n} dans $\left(P_n^{(n)}\right)^2$ est alors : $\left[\frac{(2n)!}{n!}\right]^2$

De plus $\left(X^{2n}\right)^{(2n)} = (2n)!$

Par conséquent $\forall t \in \mathbb{R},\ \left[\left(P_n^{(n)}\right)^2\right]^{(2n)} = \frac{((2n)!)^3}{(n!)^2}$.

Donc $\forall t \in [-1,1],\ g_x^{(2n)}(t) = f^{(2n)}(t) - \alpha \frac{((2n)!)^3}{(n!)^2}$, en particulier $0 = f^{(2n)}(c) - \alpha \frac{((2n)!)^3}{(n!)^2}$

Donc $\alpha = f^{(2n)}(c)\, \frac{(n!)^2}{((2n)!)^3}$. Or $\alpha = \frac{f(x) - B_n(x)}{\left(P_n^{(n)}(x)\right)^2}$

Finalement : $f(x) - B_n(x) = \frac{(n!)^2}{((2n)!)^3}\, f^{(2n)}(c) \left(P_n^{(n)}(x)\right)^2$

b) f est de classe C^{2n} sur $[-1,1]$ donc $f^{(2n)}$ est continue sur le segment $[-1,1]$ par conséquent $|f^{(2n)}|$ possède un maximum sur $[-1,1]$ que nous notons $M_{2n}(f)$.

Soit $x \in [-1,1]$. 1er cas : $x \notin \{r_1, r_2, \dots, r_n\}$. D'après ce qui précède on peut trouver c dans $[-1,1]$ tel que : $f(x) - B_n(x) = \frac{(n!)^2}{((2n)!)^3}\, f^{(2n)}(c) \left(P^{(n)}(x)\right)^2$

Donc $|f(x) - B_n(x)| = \frac{(n!)^2}{((2n)!)^3}\, |f^{(2n)}(c)|\, |P^{(n)}(x)|^2 \leq \frac{(n!)^2}{((2n)!)^3}\, M_{2n}(f) \left(P^{(n)}(x)\right)^2$

2ème cas : $x \in \{r_1, r_2, \dots, r_n\}$

$|f(x) - B_n(x)| = 0 \leq \frac{(n!)^2}{((2n)!)^3}\, M_{2n}(f) \left(P^{(n)}(x)\right)^2 = 0$!

Finalement : $\forall x \in [-1,1],\ |f(x) - B_n(x)| \leq \frac{(n!)^2}{((2n)!)^3}\, M_{2n}(f) \left(P^{(n)}(x)\right)^2.$

$$|I(f)-I_n(f)| = |I(f)-I(B_n)| = \left|\int_{-1}^{1}(f(t)-B_n(t))\,dt\right| \leq \int_{-1}^{1}|f(t)-B_n(t)|\,dt$$

$$|I(f)-I_n(f)| \leq \int_{-1}^{1}\frac{(n!)^2}{((2n)!)^3}M_{2n}(f)\,(P_n^{(n)}(t))^2\,dt = \frac{M_{2n}(f)\,(n!)^2}{((2n)!)^3}\times\frac{2^{2n+1}(n!)^2}{2n+1}$$

$$|I(f)-I_n(f)| \leq \frac{M_{2n}(f)}{\frac{((2n)!)^2}{(n!\,n!)^2}}\times 2^{2n+1}\times\frac{1}{(2n)!\,(2n+1)} = \frac{M_{2n}(f)}{(C_{2n}^{n})^2}\,\frac{2^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\underline{|I(f)-I_n(f)| \leq \frac{M_{2n}(f)}{(C_{2n}^{n})^2}\,\frac{2^{2n+1}}{(2n+1)!}}.$$

c) $\displaystyle\int_a^b g(u)\,du \underset{\uparrow}{=} \int_{-1}^{1} g\left(\frac{a+b}{2}+t\,\frac{b-a}{2}\right)\frac{b-a}{2}\,dt = \frac{b-a}{2}\int_{-1}^{1}f(t)\,dt$

$\begin{cases} u = \frac{a+b}{2}+t\,\frac{b-a}{2} \\ t = \frac{2}{b-a}\left(u-\frac{a+b}{2}\right)\end{cases}$

montrons que f est de classe C^{2n} sur $[-1,1]$. Plus précisément montrons par récurrence que pour tout $k\in[\![0,2n]\!]$ 1°.. f est de classe C^k sur $[-1,1]$

2°.. $\forall t\in[-1,1],\ f^{(k)}(t) = \left(\frac{b-a}{2}\right)^k g^{(k)}\left(\frac{a+b}{2}+t\,\frac{b-a}{2}\right)$

Posons $\forall t\in[-1,1]$, $u(t) = \frac{a+b}{2}+t\,\frac{b-a}{2}$.

$f = g\circ u$

- u est continue sur $[-1,1]$ et $u([-1,1])=[a,b]$; comme g est continue sur $[a,b]$: f est par composition continue sur $[-1,1]$. Ceci montre la propriété pour $k=0$.
- Supposons la propriété vraie pour $k\in[\![0,2n-1]\!]$ et montrons la pour $k+1$.

  f est de classe C^k sur $[-1,1]$ et $\forall t\in[-1,1]$, $f^{(k)}(t) = \left(\frac{b-a}{2}\right)^k g^{(k)}\circ u(t)$.

  u est dérivable sur $[-1,1]$ et $u([-1,1])=[a,b]$; $g^{(k)}$ étant dérivable sur $[a,b]$: $g^{(k)}\circ u$ est dérivable sur $[-1,1]$ donc $f^{(k)}$ est dérivable sur $[-1,1]$. f est $k+1$-fois dérivable sur $[-1,1]$ et $\forall t\in[-1,1]$, $f^{(k+1)}(t) = \left(\frac{b-a}{2}\right)^k u'(t)\,{g^{(k)}}'(u(t))$

  $\forall t\in[-1,1]$, $f^{(k+1)}(t) = \left(\frac{b-a}{2}\right)^k\frac{b-a}{2}(g^{(k+1)}\circ u)(t) = \left(\frac{b-a}{2}\right)^{k+1}(g^{(k+1)}\circ u)(t)$

  u est continue sur $[-1,1]$ à valeurs dans $[a,b]$ et $g^{(k+1)}$ est continue sur $[a,b]$ donc $g^{(k+1)}\circ u$ est continue sur $[-1,1]$; $f^{(k+1)}$ est alors continue sur $[-1,1]$. Finalement

  f est de classe C^{k+1} sur $[-1,1]$ et $\forall t\in[-1,1]$, $f^{(k+1)}(t) = \left(\frac{b-a}{2}\right)^{k+1} g^{(k+1)}\left(\frac{a+b}{2}+t\,\frac{b-a}{2}\right)$

  Ceci achève la récurrence.

f étant de classe C^{2n} sur $[-1,1]$: $|I(f)-I_n(f)| \le \frac{M_{2n}(f)}{(C_{2n}^n)^2} \times \frac{2^{2n+1}}{(2n+1)!}$.

$M_{2n}(f) = \max\limits_{t\in[-1,1]} |f^{(2n)}(t)| = \max\limits_{t\in[-1,1]} \left[\left(\frac{b-a}{2}\right)^{2n} \left|g^{(2n)}\left(\frac{a+b}{2}+t\,\frac{b-a}{2}\right)\right|\right] = \max\limits_{u\in[a,b]} \left[\left(\frac{b-a}{2}\right)^{2n}|g^{(2n)}(u)|\right]$

$u = \frac{a+b}{2}+t\,\frac{b-a}{2}$

$M_{2n}(f) = \left(\frac{b-a}{2}\right)^{2n}\max\limits_{u\in[a,b]}|g^{(2n)}(u)| = \left(\frac{b-a}{2}\right)^{2n} M_{2n}(g)$

Donc $|I(f)-I_n(f)| \le \left(\frac{b-a}{2}\right)^{2n} M_{2n}(g)\,\frac{2^{2n+1}}{(C_{2n}^n)^2(2n+1)!} = (b-a)^{2n}M_{2n}(g)\,\frac{2}{(C_{2n}^n)^2(2n+1)!}$

$I(f)-I_n(f) = \int_{-1}^1 f(t)\,dt - \sum_{j=1}^n \lambda_j f(r_j) = \frac{2}{b-a}\int_a^b g(u)\,du - \sum_{j=1}^n \lambda_j\, g\left(\frac{a+b}{2}+r_j\,\frac{b-a}{2}\right)$

Par conséquent :

$\left|\frac{2}{b-a}\left[\int_a^b g(u)\,du - \frac{b-a}{2}\sum_{j=1}^n \lambda_j\, g\left(\frac{a+b}{2}+r_j\,\frac{b-a}{2}\right)\right]\right| = |I(f)-I_n(f)| \le (b-a)^{2n}M_{2n}(g)\,\frac{2}{(C_{2n}^n)^2(2n+1)!}$

En multipliant par $\frac{b-a}{2}$ il vient :

$$\left|\int_a^b g(u)\,du - \frac{b-a}{2}\sum_{j=1}^n \lambda_j\, g\left(\frac{a+b}{2}+r_j\,\frac{b-a}{2}\right)\right| \le \frac{(b-a)^{2n+1}M_{2n}(g)}{(C_{2n}^n)^2(2n+1)!}.$$

Q5) Etude d'un cas particulier.

a) $P_2 = (X^2-1)^2$; $P_2' = 2\times 2X(X^2-1) = 4X^3-4X$; $P_2'' = 12X^2-4 = 12\left(X^2-\frac13\right) = 12\left(X-\frac{1}{\sqrt3}\right)\left(X+\frac1{\sqrt3}\right)$.

$r_1 = -\frac1{\sqrt3}$ et $r_2=\frac1{\sqrt3}$

$L_1 = \frac{1}{-\frac1{\sqrt3}-\frac1{\sqrt3}}\left(X-\frac1{\sqrt3}\right) = -\frac{\sqrt3}{2}\left(X-\frac1{\sqrt3}\right)$; $L_2 = \frac{1}{\frac1{\sqrt3}+\frac1{\sqrt3}}\left(X+\frac1{\sqrt3}\right) = \frac{\sqrt3}{2}\left(X+\frac1{\sqrt3}\right)$

$L_1 = -\frac{\sqrt3}{2}\left(X-\frac1{\sqrt3}\right)$ et $L_2 = \frac{\sqrt3}{2}\left(X+\frac1{\sqrt3}\right)$.

$\lambda_1 = \int_{-1}^1 -\frac{\sqrt3}{2}\left(t-\frac1{\sqrt3}\right)dt = \left[-\frac{\sqrt3}{2}\,\frac12\left(t-\frac1{\sqrt3}\right)^2\right]_{-1}^1 = -\frac{\sqrt3}{4}\left[\left(1-\frac1{\sqrt3}\right)^2-\left(-1-\frac1{\sqrt3}\right)^2\right] = -\frac{\sqrt3}{4}\left(1-\frac1{\sqrt3}-1-\frac1{\sqrt3}\right)\left(1-\frac1{\sqrt3}+1+\frac1{\sqrt3}\right)$

$\lambda_1 = -\frac{\sqrt3}{4}\left(-\frac4{\sqrt3}\right) = 1$

$\lambda_2 = \int_{-1}^1\frac{\sqrt3}{2}\left(t+\frac1{\sqrt3}\right)dt = \frac{\sqrt3}{4}\left[\left(t+\frac1{\sqrt3}\right)^2\right]_{-1}^1 = \frac{\sqrt3}{4}\left(\left(1+\frac1{\sqrt3}\right)^2-\left(-1+\frac1{\sqrt3}\right)^2\right) = \frac{\sqrt3}{4}\left[\left(1+\frac1{\sqrt3}-1+\frac1{\sqrt3}\right)\left(1+\frac1{\sqrt3}+1-\frac1{\sqrt3}\right)\right] = 1$

b) II.4.c donne pour $n=2$:

$$\left|\int_a^b g(u)\,du - \frac{b-a}{2}\sum_{j=1}^{2}\lambda_j\, g\left(\frac{a+b}{2}+r_j\frac{b-a}{2}\right)\right| \leq \frac{(b-a)^5 M_4(g)}{\left(\binom{2}{4}\right)^2 (5!)} = \frac{(b-a)^5 M_4(g)}{6^2\times 120}.$$

Donc $$\left|\int_a^b g(u)\,du - \frac{b-a}{2}\left(g\left(\frac{a+b}{2}-\frac{1}{\sqrt3}\,\frac{b-a}{2}\right)+g\left(\frac{a+b}{2}+\frac{1}{\sqrt3}\,\frac{b-a}{2}\right)\right)\right| \leq \frac{(b-a)^5 M_4(g)}{4320}.$$

c) Posons $\forall k\in [\![0,p]\!]$, $x_k = a + k\,\frac{b-a}{p}$

Pour tout $k \in [\![1,p]\!]$, c_k est le milieu de $[x_{k-1}, x_k]$.

Soit $k \in [\![1,n]\!]$

$$\left|\int_{x_{k-1}}^{x_k} g(u)\,du - \frac{x_k-x_{k-1}}{2}\left(g\left(\frac{x_{k-1}+x_k}{2}-\frac{x_k-x_{k-1}}{2\sqrt3}\right)+g\left(\frac{x_{k-1}+x_k}{2}+\frac{x_k-x_{k-1}}{2\sqrt3}\right)\right)\right| \leq \frac{(x_k-x_{k-1})^5}{4320}\max_{t\in[x_{k-1},x_k]}|g^{(4)}(t)|$$

Or $\frac{x_k-x_{k-1}}{2}=\frac{b-a}{2p}$ et $\max\limits_{t\in[x_{k-1},x_k]}|g^{(4)}(t)| \leq M_4(g)$; de plus $\frac{x_{k-1}+x_k}{2}=c_k$

Donc $$\underbrace{\left|\int_{x_{k-1}}^{x_k} g(u)\,du - \frac{b-a}{2p}\left(g\left(c_k-\frac{b-a}{2\sqrt3}\right)+g\left(c_k+\frac{b-a}{2\sqrt3}\right)\right)\right|}_{A_k} \leq \frac{M_4(g)(b-a)^5}{4320\,p^5}$$

$$\left|\sum_{k=1}^{p} A_k\right| \leq \sum_{k=1}^{p}|A_k| \leq \sum_{k=1}^{p}\frac{M_4(g)(b-a)^5}{4320\,p^5} = \frac{M_4(g)(b-a)^5}{4320\,p^4}$$

de plus $$\sum_{k=1}^{p} A_k = \underbrace{\sum_{k=1}^{p}\int_{x_{k-1}}^{x_k} g(u)\,du}_{\int_a^b g(u)\,du} - \frac{b-a}{2p}\sum_{k=1}^{p}\left[g\left(c_k-\frac{b-a}{2\sqrt3}\right)+g\left(c_k-\frac{b-a}{2\sqrt3}\right)\right]$$

Donc

$$\left|\int_a^b g(u)\,du - \frac{b-a}{2p}\sum_{k=1}^{p}\left[g\left(c_k-\frac{b-a}{2\sqrt3}\right)+g\left(c_k-\frac{b-a}{2\sqrt3}\right)\right]\right| \leq \frac{M_4(g)(b-a)^5}{4320\,p^4}$$

d) Posons $\forall k\in [\![1,p]\!]$, $\alpha_k = c_k - \frac{b-a}{2p\sqrt3}$ et $\beta_k = c_k + \frac{b-a}{2p\sqrt3}$.

Notons que $\forall k \in [\![2,p-1]\!]$, $\alpha_k-\alpha_{k-1} = c_k - c_{k-1} = \frac{b-a}{p} = c_k-c_{k-1} = \beta_k-\beta_{k-1}$!

Notons encore que $\alpha_1 = c_1 - \frac{b-a}{2p\sqrt3} = a + \frac{b-a}{2p} - \frac{b-a}{2p\sqrt3} = a + \frac{b-a}{2p}\left(1-\frac{1}{\sqrt3}\right)$

De même $\beta_1 = a + \frac{b-a}{2p}\left(1+\frac{1}{\sqrt3}\right)$. Ceci conduit au programme suivant :

```
Program HEC96MI;

uses crt;

var p:integer;a,b:real;

function eff(x:real):real;

begin
eff:=4/(1+x*x);
end;

function ValAppInte(a,b:real;p:integer):real;

var k:integer;s,alpha,beta,pas:real;

begin

pas:=(b-a)/p;
alpha:=a+pas/2*(1-1/sqrt(3));beta:=a+pas/2*(1+1/sqrt(3));
s:=eff(alpha)+eff(beta);

for k:=2 to p do
    begin
    alpha:=alpha+pas;beta:=beta+pas;
    s:=s+eff(alpha)+eff(beta);
    end;

ValAppInte:=s*pas/2;
end;

begin
clrscr;

write('Donnez a. a=');readln(a);
write('Donnez b. b=');readln(b);
write('Donnez p. p=');readln(p);

writeln;
writeln('Une valeur approchée de l''intégrale est : ',ValAppInte(a,b,p));

end.
```

```
Donnez a. a=0
Donnez b. b=1
Donnez p. p=10

Une valeur approchée de l'intégrale est :  3.1415926540E+00
```