CHAMBRE DE COMMERCE ET D'INDUSTRIE DE PARIS
DIRECTION DE L'ENSEIGNEMENT
Direction des Admissions et concours

ECOLE DES HAUTES ETUDES COMMERCIALES
E.S.C.P.-E.A.P.
ECOLE SUPERIEURE DE COMMERCE DE LYON

CONCOURS D'ADMISSION SUR CLASSES PREPARATOIRES

OPTION GENERALE

MATHEMATIQUES I

Année 1995

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une régle graduée est autorisée.

Ce problème a pour objet l'étude d'endomorphismes de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^m$ (où le nombre entier m est supérieur ou égal à 2) vérifiant certaines relations.
Dans toute la suite, si f désigne un tel endomorphisme et k un entier strictement positif, on note f^k la composée $\underbrace{f \circ f \ldots \circ f}_{k \text{ fois}}$. Enfin on désigne par I l'application identité de $\mathbb{R}^m$ et par I_m la matrice identité d'ordre m.
On rappelle que l'espace vectoriel $\mathbb{R}^m$ est somme directe de deux sous-espaces vectoriels F et G si tout vecteur x de $\mathbb{R}^m$ peut se décomposer de manière unique sous forme $x = y + z$, avec y et z appartenant respectivement à F et G. L'application qui à x associe cet unique vecteur y est le projecteur de $\mathbb{R}^m$ sur F dans la direction G.

Partie I

On considère dans cette partie un endomorphisme f de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^m$ vérifiant la relation

$$f^2 = \frac{1}{2}(f + I) \tag{1}$$

1. **Recherche de solutions particuliéres de (1).**
   Déterminer les réels a tels que $f = aI$ vérifie (1).

2. **Eude des puissances de f et de son inversibilité.**
   On suppose dans cette question que les endomorphismes f et I sont linéairement indépendants.

(a) Exprimer f^3 et f^4 comme combinaison linéaire de I et de f.
Etablir par récurrence que, pour tout entier naturel n, il existe un couple (a_n, b_n) de nombres réels et un seul tel que : $f^n = a_n f + b_n I$
Déterminer a_0, b_0, a_1, b_1 et exprimer a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n pour $n \in N$.

(b) Former une relation entre a_{n+2}, a_{n+1} et a_n d'une part et entre b_{n+2}, b_{n+1} et b_n d'autre part.
En déduire les expressions de a_n et b_n en fonction de n pour $n \in N$.
Vérifier que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \dfrac{2}{3}$ et que $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = \dfrac{1}{3}$

(c) On convient d'appeler limite de $f^n = a_n f + b_n I$ l'endomorphisme $p = \dfrac{2}{3}f + \dfrac{1}{3}I$
Calculer p^2 et en déduire que p est un projecteur.

(d) Prouver que l'endomorphisme f est inversible et exprimer son inverse f^{-1} comme combinaison linéaire de f et de I.

3. **Etude des éléments propres de f et des solutions de (1).**

(a) Soit λ une valeur propre de f. En appliquant la relation (1) à un vecteur propre non nul x de f associé à λ, établir que λ vérifie l'équation $2\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$. En déduire les valeurs propres éventuelles de f.

(b) On suppose donné un vecteur x de $\mathbb{R}^m$ écrit sous la forme $x = y+z$ avec $y \in \ker(f-I)$ et $z \in \ker(f+\dfrac{1}{2}I)$.
Exprimer $f(x)$ à l'aide de y et z puis y et z en fonction de x et $f(x)$.
En déduire que R^m est somme directe de $\ker(f-I)$ et de $\ker(f+\dfrac{1}{2}I)$, que p est le projecteur sur $\ker(f-I)$ dans la direction $\ker(f+\dfrac{1}{2}I)$, et que f est diagonalisable.

(c) On pose $r = \dim\ker(f-I)$ $(0 \leqslant r \leqslant m)$.
Déterminer f lorsque $r = 0$ ou $r = m$.
On suppose désormais $0 < r < m$. . . . crire la matrice M de f dans une base de $\mathbb{R}^m$ obtenue par réunion d'une base $(e_1, e_2, \ldots, e_r)$ de $\ker(f-I)$ et d'une base $(e_{r+1}, e_{r+2}, ...e_m)$ de $\ker(f+\dfrac{1}{2}I)$.

(d) Réciproquement, vérifier que la matrice M obtenue précédemment satisfait bien la relation $M^2 = \dfrac{1}{2}(M + I_m)$

(e) Calculer $(f+\dfrac{1}{2}I)\circ(f-I)$.
En déduire que $\mathrm{Im}(f-I)$ est inclus dans $\ker(f+\dfrac{1}{2}I)$, et, en comparant les dimensions de ces deux sous-espaces, prouver leur égalité.

Ainsi donc, p est aussi le projecteur sur $\ker(f-I)$ dans la direction $\mathrm{Im}(f-I)$.

Partie II

1. **Etude d'une suite récurrente.**
On étudie dans cette question la convergence des suites complexes $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant pour tout entier naturel n

$$u_{n+3} = \frac{u_{n+2} + u_{n+1} + u_n}{3} \tag{2}$$

(a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $r^3 = \dfrac{r^2+r+1}{3}$. On précisera ses racines et l'on notera α et $\overline{\alpha}$ ses racines complexes conjuguées.

(b) Déterminer les suites géométriques $(r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant la relation (2).

(c) On associe à toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant la relation (2) le système suivant :

$$\begin{cases} x & + & y & + & z & = & u_0 \\ x & + & \alpha y & + & \overline{\alpha} z & = & u_1 \\ x & + & \alpha^2 y & + & \overline{\alpha}^2 z & = & u_2 \end{cases}$$

- En formant la combinaison linéaire $3u_2 + 2u_1 + u_0$ exprimer x en fonction de u_0, u_1, u_2 et montrer que le système précédent admet une solution (x, y, z) et une seule. (On ne demande pas le calcul des inconnues y et z.)
- Etablir par récurrence que l'on a pour tout entier naturel n : $u_n = x + \alpha^n y + \overline{\alpha}^n z$.
- Déterminer le module de α et en déduire la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en fonction de u_0, u_1 et u_2.

On considère désormais un endomorphisme f de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^m$ vérifiant la relation

$$f^3 = \frac{1}{3}(f^2 + f + I) \tag{3}$$

2. **Etude des puissances de f et de son inversibilité.**
On suppose dans cette question que les endomorphismes I, f et f^2 sont linéairement indépendants.

(a) Etablir par récurrence que, pour tout entier naturel n, il existe un triplet (a_n, b_n, c_n) de nombres réels et un seul tel que $f^n = a_n f^2 + b_n f + c_n I$.
Déterminer a_n, b_n, c_n pour $0 \leqslant n \leqslant 2$ et exprimer a_{n+1}, b_{n+1} et c_{n+1} en fonction de a_n, b_n, c_n pour $n \in \mathbb{N}$.

(b) Prouver que les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifient la relation (2).
En déduire les limites $a = \lim\limits_{n\to+\infty} a_n$, $b = \lim\limits_{n\to+\infty} b_n$ et $c = \lim\limits_{n\to+\infty} c_n$ de ces trois suites.

(c) On convient d'appeler limite de $f^n = a_n f^2 + b_n f + c_n I$ l'endomorphisme $q = af^2 + bf + cI$. Etablir que q est un projecteur.

(d) Prouver que l'endomorphisme f est inversible et exprimer son inverse f^{-1} comme combinaison linéaire de f^2, f et I.

3. **Etude du projecteur q.**

(a) Déterminer les valeurs propres réelles éventuelles de f.
Existe-t-il un endomorphisme diagonalisable vérifiant (3) ?

(b) On suppose donné un vecteur x de $\mathbb{R}^m$ écrit sous la forme $x = y + z$ avec $y \in \ker(f - I)$ et $z \in \ker(3f^2 + 2f + I)$. Exprimer y et z en fonction de x, $f(x)$ et $f^2(x)$.
En déduire que R^m est somme directe de $\ker(f - I)$ et de $\ker(3f^2 + 2f + I)$, et que q est le projecteur sur $\ker(f - I)$ dans la direction $\ker(3f^2 + 2f + I)$.

(c) Calculer $(3f^2 + 2f + I) \circ (f - I)$.
En déduire que $\mathrm{Im}(f - I)$ est inclus dans $\ker(3f^2 + 2f + I)$, et, en comparant les dimensions de ces deux sous-espaces, prouver leur égalité.

Ainsi donc, q est aussi le projecteur sur $\ker(f - I)$ dans la direction $\mathrm{Im}(f - I)$.

4. **Etude des solutions de (3)**

(a) On suppose dans cette question que $\dim \ker(3f^2 + 2f + I) > 0$.
Soit e_1 un vecteur non nul appartenant à $\ker(3f^2 + 2f + I)$. Montrer que $(e_1, f(e_1))$ est une famille libre de $\ker(3f^2 + 2f + I)$. En déduire que $\dim \ker(3f^2 + 2f + I) \geqslant 2$.

(b) On suppose dans cette question que $m = 2$. Ainsi f est-il un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$.
Déterminer les dimensions possibles de $\ker(3f^2 + 2f + I)$ et de $\ker(f - I)$.
En déduire qu'il existe des bases de R^2 dans lesquelles la matrice de l'endomorphisme f est :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{ou} \qquad \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{3} \\ 1 & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Cette dernière matrice est-elle diagonalisable sur le corps $\mathbb{R}$?

(c) On suppose dans cette question que $\dim \ker(3f^2 + 2f + I) > 2$.
Soit e_2 un vecteur de $\ker(3f^2 + 2f + I)$ tel que la famille $(e_1, f(e_1), e_2)$ soit libre. Montrer que $(e_1, f(e_1), e_2, f(e_2))$ est encore une famille libre de $\ker(3f^2 + 2f + I)$. En déduire que $\dim \ker(3f^2 + 2f + I) \geqslant 4$.

(d) On suppose dans cette question que $m = 3$. Ainsi f est-il un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.
Déterminer les dimensions possibles de $\ker(3f^2 + 2f + I)$ et de $\ker(f - I)$.
En déduire qu'il existe des bases de $\mathbb{R}^3$ dans lesquelles la matrice de l'endomorphisme f est :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{ou} \qquad \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 1 & -\frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Cette dernière matrice est-elle diagonalisable sur le corps $\mathbb{R}$?

(e) Etudier de la même manière le cas $m = 4$ en précisant les formes possibles de la matrice de l'endomorphisme f dans des bases convenables de $\mathbb{R}^4$.

(f) On suppose désormais $\dim \ker(3f^2 + 2f + I) > 2q$ avec q entier naturel non nul.
Soit $(e_1, f(e_1), \ldots, e_q, f(e_q))$ une famille libre de vecteurs de $\ker(3f^2 + 2f + I)$. On peut donc trouver un vecteur e_{q+1} appartenant à $\ker(3f^2 + 2f + I)$ tel que $(e_1, f(e_1), \ldots, e_q, f(e_q), e_{q+1})$ soit encore une famille libre.
Montrer que $(e_1, f(e_1), \ldots, e_q, f(e_q), e_{q+1}, f(e_{q+1}))$ est une famille libre de $\ker(3f^2+2f+I)$ et en déduire que la dimension de $\ker(3f^2 + 2f + I)$ est paire.

(g) On pose $2r = \dim \ker(3f^2 + 2f + I)$ $(0 \leqslant 2r \leqslant m)$. …crire la matrice M de l'endomorphisme f dans une base de $\mathbb{R}^m$ obtenue par réunion d'une base convenable de $\ker(3f^2 + 2f + I)$ et d'une base de $\ker(f - I)$.

(h) Réciproquement, vérifier que la matrice M obtenue précédemment satisfait bien la relation $M^3 = \frac{1}{3}(M^2 + M + I_m)$