CHAMBRE DE COMMERCE ET D'INDUSTRIE DE PARIS
DIRECTION DE L'ENSEIGNEMENT
Direction des Admissions et Concours

ECOLE DES HAUTES ETUDES COMMERCIALES

CONCOURS D'ADMISSION SUR CLASSES PREPARATOIRES

MATHEMATIQUES I

OPTION GENERALE

lundi 22 mai 1995, de 14 h à 18 h

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.

Sont autorisées: – Règles graduées.
Calculatrices de poche, y compris les calculatrices programmables et alphanumériques, à fonctionnement autonome, sans imprimante, sans document d'accompagnement et de format maximum 21 cm x 15 cm de large, sans limitation de nombre.

Ce problème a pour objet l'étude d'endomorphismes de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^m$ (où le nombre entier m est supérieur ou égal à 2) vérifiant certaines relations.

Dans toute la suite, si f désigne un tel endomorphisme et k un entier strictement positif, on note f^k la composée $\underbrace{fof\dots of}_{k \text{ fois}}$. Enfin on désigne par I l'application identité de $\mathbb{R}^m$ et par I_m la matrice identité d'ordre m.

On rappelle que l'espace vectoriel $\mathbb{R}^m$ est somme directe de deux sous-espaces vectoriels F et G si tout vecteur x de $\mathbb{R}^m$ peut se décomposer de manière unique sous forme $x = y + z$, avec y et z appartenant respectivement à F et G. L'application qui à x associe cet unique vecteur y est le projecteur de $\mathbb{R}^m$ sur F dans la direction G.

PARTIE I.

On considère dans cette partie un endomorphisme f de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^m$ vérifiant la relation :

$$f^2 = \frac{1}{2}(f+I) \qquad (1)$$

1. Recherche de solutions particulières de (1).

Déterminer les réels α tels que $f = \alpha I$ vérifie (1).

2. Étude des puissances de f et de son inversibilité.

On suppose dans cette question que les endomorphismes f et I sont linéairement indépendants.

a. Exprimer f^3 et f^4 comme combinaison linéaire de I et de f.
Établir par récurrence que, pour tout entier naturel n, il existe un couple (a_n, b_n) de nombres réels et un seul tel que : $f^n = a_n f + b_n I$.

Déterminer a_0, b_0, a_1, b_1 et exprimer a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n pour $n \in \mathbb{N}$.

b. Former une relation entre a_{n+2}, a_{n+1} et a_n d'une part et entre b_{n+2}, b_{n+1} et b_n d'autre part.
En déduire les expressions de a_n et b_n en fonction de n pour $n \in \mathbb{N}$.
Vérifier que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \dfrac{2}{3}$ et que $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = \dfrac{1}{3}$

c. On convient d'appeler limite de $f_n = a_n f + b_n I$ l'endomorphisme $p = \dfrac{2}{3}f + \dfrac{1}{3}I$.

Calculer p^2 et en déduire que p est un projecteur.

d. Prouver que l'endomorphisme f est inversible et exprimer son inverse f^{-1} comme combinaison linéaire de f et de I.

3. Étude des éléments propres de f et des solutions de (1).

a. Soit λ une valeur propre de f. En appliquant la relation (1) à un vecteur propre non nul x de f associé à λ, établir que λ vérifie l'équation $2\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$. En déduire les valeurs propres éventuelles de f.

b. On suppose donné un vecteur x de $\mathbb{R}^m$ écrit sous la forme $x = y + z$ avec $y \in \operatorname{Ker}(f - I)$ et $z \in \operatorname{Ker}(f + \frac{1}{2}I)$.

Exprimer $f(x)$ à l'aide de y et z puis y et z en fonction de x et $f(x)$.

En déduire que $\mathbb{R}^m$ est somme directe de $\operatorname{Ker}(f - I)$ et de $\operatorname{Ker}(f + \frac{1}{2}I)$, que p est le projecteur sur $\operatorname{Ker}(f - I)$ dans la direction $\operatorname{Ker}(f + \frac{1}{2}I)$, et que f est diagonalisable.

c. On pose $r = \dim \operatorname{Ker}(f - I) \qquad (0 \leqslant r \leqslant m)$.

Déterminer f lorsque $r = 0$ ou $r = m$.

On suppose désormais $0 < r < m$.
Écrire la matrice M de f dans une base de $\mathbb{R}^m$ obtenue par réunion d'une base $(e_1, e_2, \ldots, e_r)$ de $\operatorname{Ker}(f - I)$ et d'une base $(e_{r+1}, e_{r+2}, \ldots, e_m)$ de $\operatorname{Ker}(f + \frac{1}{2}I)$.

d. Réciproquement, vérifier que la matrice M obtenue précédemment satisfait bien la relation $M^2 = \frac{1}{2}(M + I_m)$.

e. Calculer $(f + \frac{1}{2}I)o(f - I)$.

En déduire que $\operatorname{Im}(f - I)$ est inclus dans $\operatorname{Ker}(f + \frac{1}{2}I)$, et, en comparant les dimensions de ces deux sous-espaces, prouver leur égalité.
Ainsi donc, p est aussi le projecteur sur $\operatorname{Ker}(f - I)$ dans la direction $\operatorname{Im}(f - I)$.

PARTIE II.

1. Étude d'une suite récurrente.

On étudie dans cette question la convergence des suites complexes $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant pour tout entier naturel n :

$$u_{n+3} = \frac{u_{n+2} + u_{n+1} + u_n}{3} \qquad (2)$$

a. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $r^3 = \dfrac{r^2+r+1}{3}$. On précisera ses racines et l'on notera α et $\overline{\alpha}$ ses racines complexes conjuguées.

b. Déterminer les suites géométriques $(r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant la relation (2).

c. On associe à toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant la relation (2) le système suivant :

$$\begin{cases} x + \ \ y + \ \ z = u_0 \\ x + \alpha y + \overline{\alpha}\, z = u_1 \\ x + \alpha^2 y + \overline{\alpha}^2 z = u_2 \end{cases}$$

- En formant la combinaison linéaire $3u_2 + 2u_1 + u_0$ exprimer x en fonction de u_0, u_1, u_2 et montrer que le système précédent admet une solution (x, y, z) et une seule. (On ne demande pas le calcul des inconnues y et z.)

- Établir par récurrence que l'on a pour tout entier naturel n : $u_n = x + y\,\alpha^n + z\,\overline{\alpha}^n$.

- Déterminer le module de α et en déduire la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en fonction de u_0, u_1 et u_2.

On considère désormais un endomorphisme f de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^m$ vérifiant la relation :

$$f^3 = \frac{1}{3}(f^2 + f + I) \qquad (3)$$

2. Étude des puissances de f et de son inversibilité.

On suppose dans cette question que les endomorphismes I, f et f^2 sont linéairement indépendants.

a. Établir par récurrence que, pour tout entier naturel n, il existe un triplet (a_n, b_n, c_n) de nombres réels et un seul tel que $f^n = a_n\, f^2 + b_n\, f + c_n\, I$.

Déterminer a_n, b_n, c_n pour $0 \leqslant n \leqslant 2$ et exprimer a_{n+1}, b_{n+1} et c_{n+1} en fonction de a_n, b_n, c_n pour $n \in \mathbb{N}$.

b. Prouver que les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifient la relation (2).
En déduire les limites $a = \lim\limits_{n\to+\infty} a_n$, $b = \lim\limits_{n\to+\infty} b_n$ et $c = \lim\limits_{n\to+\infty} c_n$ de ces trois suites.

c. On convient d'appeler limite de $f_n = a_n f^2 + b_n f + c_n I$ l'endomorphisme $q = af^2 + bf + cI$.
Établir que q est un projecteur.

d. Prouver que l'endomorphisme f est inversible et exprimer son inverse f^{-1} comme combinaison linéaire de f^2, f et I.

3. Étude du projecteur q.

a. Déterminer les valeurs propres réelles éventuelles de f.
Existe-t-il un endomorphisme diagonalisable vérifiant (3) ?

b. On suppose donné un vecteur x de $\mathbb{R}^m$ écrit sous la forme $x = y + z$ avec $y \in \mathrm{Ker}(f - I)$ et $z \in \mathrm{Ker}(3f^2 + 2f + I)$.
Exprimer y et z en fonction de x, $f(x)$ et $f^2(x)$.
En déduire que $\mathbb{R}^m$ est somme directe de $\mathrm{Ker}(f-I)$ et de $\mathrm{Ker}(3f^2+2f+I)$, et que q est le projecteur sur $\mathrm{Ker}(f-I)$ dans la direction $\mathrm{Ker}(3f^2 + 2f + I)$.

c. Calculer $(3f^2 + 2f + I)o(f - I)$.
En déduire que $\mathrm{Im}(f-I)$ est inclus dans $\mathrm{Ker}(3f^2+2f+I)$, et, en comparant les dimensions de ces deux sous-espaces, prouver leur égalité.
Ainsi donc, q est aussi le projecteur sur $\mathrm{Ker}(f - I)$ dans la direction $\mathrm{Im}(f - I)$.

4 Étude des solutions de (3)

a. On suppose dans cette question que $\dim \operatorname{Ker}(3f^2+2f+I) > 0$.
Soit e_1 un vecteur non nul appartenant à $\operatorname{Ker}(3f^2+2f+I)$. Montrer que $\big(e_1, f(e_1)\big)$ est une famille libre de $\operatorname{Ker}(3f^2+2f+I)$. En déduire que $\dim \operatorname{Ker}(3f^2+2f+I) \geqslant 2$.

b. On suppose dans cette question que $m = 2$. Ainsi f est-il un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$.
Déterminer les dimensions possibles de $\operatorname{Ker}(3f^2+2f+I)$ et de $\operatorname{Ker}(f-I)$.
En déduire qu'il existe des bases de $\mathbb{R}^2$ dans lesquelles la matrice de l'endomorphisme f est :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{pmatrix} 0 & -1/3 \\ 1 & -2/3 \end{pmatrix}$$

Cette dernière matrice est-elle diagonalisable sur le corps $\mathbb{R}$?

c. On suppose dans cette question que $\dim \operatorname{Ker}(3f^2+2f+I) > 2$.
Soit e_2 un vecteur de $\operatorname{Ker}(3f^2+2f+I)$ tel que la famille $\big(e_1, f(e_1), e_2\big)$ soit libre. Montrer que $\big(e_1, f(e_1), e_2, f(e_2)\big)$ est encore une famille libre de $\operatorname{Ker}(3f^2+2f+I)$.En déduire que $\dim \operatorname{Ker}(3f^2+2f+I) \geqslant 4$.

d. On suppose dans cette question que $m = 3$. Ainsi f est-il un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.
Déterminer les dimensions possibles de $\operatorname{Ker}(3f^2+2f+I)$ et de $\operatorname{Ker}(f-I)$.
En déduire qu'il existe des bases de $\mathbb{R}^3$ dans lesquelles la matrice de l'endomorphisme f est :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{pmatrix} 0 & -1/3 & 0 \\ 1 & -2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Cette dernière matrice est-elle diagonalisable sur le corps $\mathbb{R}$?

e. Étudier de la même manière le cas $m = 4$ en précisant les formes possibles de la matrice de l'endomorphisme f dans des bases convenables de $\mathbb{R}^4$.

f. On suppose désormais $\dim \operatorname{Ker}(3f^2+2f+I) > 2q$ avec q entier naturel non nul.
Soit $\big(e_1, f(e_1), \ldots, e_q, f(e_q)\big)$ une famille libre de vecteurs de $\operatorname{Ker}(3f^2+2f+I)$. On peut donc trouver un vecteur e_{q+1} appartenant à $\operatorname{Ker}(3f^2+2f+I)$ tel que $\big(e_1, f(e_1), \ldots, e_q, f(e_q), e_{q+1}\big)$ soit encore une famille libre.
Montrer que $\big(e_1, f(e_1), \ldots, e_q, f(e_q), e_{q+1}, f(e_{q+1})\big)$ est une famille libre de $\operatorname{Ker}(3f^2+2f+I)$ et en déduire que la dimension de $\operatorname{Ker}(3f^2+2f+I)$ est paire.

g. On pose $2r = \dim \operatorname{Ker}(3f^2+2f+I) \qquad (0 \leqslant 2r \leqslant m)$.
Écrire la matrice M de l'endomorphisme f dans une base de $\mathbb{R}^m$ obtenue par réunion d'une base convenable de $\operatorname{Ker}(3f^2+2f+I)$ et d'une base de $\operatorname{Ker}(f-I)$.

h. Réciproquement, vérifier que la matrice M obtenue précédemment satisfait bien la relation $M^3 = \dfrac{1}{3}(M^2+M+I_m)$.

FIN

PARTIE I

Q1 Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. $f=\alpha I$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$.

$f^2=\frac{1}{2}(f+I) \Leftrightarrow \alpha^2 I=\frac{1}{2}(\alpha I+I) \Leftrightarrow (\alpha^2-\frac{1}{2}\alpha-\frac{1}{2})I=0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)} \Leftrightarrow \alpha^2-\frac{1}{2}\alpha-\frac{1}{2}=0$.

$f^2=\frac{1}{2}(f+I) \Leftrightarrow 2\alpha^2-\alpha-1=0 \Leftrightarrow \alpha=1$ ou $\alpha=-\frac{1}{2}$.

cl.. Les réels α tels que $f=\alpha I$ vérifie (1) sont : 1 et $-\frac{1}{2}$.

Q2 a) $f^3=f\circ f^2=f\circ(\frac{1}{2}(f+I))=\frac{1}{2}f^2+\frac{1}{2}f=\frac{1}{2}(\frac{1}{2}(f+I))+\frac{1}{2}f=\frac{3}{4}f+\frac{1}{4}I$.

$f^3=\frac{3}{4}f+\frac{1}{4}I$.

$f^4=f\circ f^3=f\circ(\frac{3}{4}f+\frac{1}{4}I)=\frac{3}{4}f^2+\frac{1}{4}f=\frac{3}{4}\frac{1}{2}(f+I)+\frac{1}{4}f=\frac{3}{8}f+\frac{3}{8}I+\frac{1}{4}f$.

$f^4=\frac{5}{8}f+\frac{3}{8}I$.

Montrons que : $\forall n\in\mathbb{N}, \exists!(a_n,b_n), f^n=a_nf+b_nI$

→ Unicité..

Supposons que : $n\in\mathbb{N}$ et $f^n=a_nf+b_nI=\hat{a}_nf+\hat{b}_nI$ avec $(a_n,b_n,\hat{a}_n,\hat{b}_n)\in\mathbb{R}^4$.
Alors $(a_n-\hat{a}_n)f+(b_n-\hat{b}_n)I=0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)}$; comme f et I sont linéairement indépendants il vient : $a_n-\hat{a}_n=b_n-\hat{b}_n=0$; $\hat{a}_n=a_n$ et $\hat{b}_n=b_n$. Ceci prouve l'unicité.

→ Existence.. Montrons l'existence par récurrence.

* $f^0=I=0\times f+1\times I$. Posons $a_0=0$ et $b_0=1$.
  $(a_0,b_0)\in\mathbb{R}^2$ et $f^0=a_0f+b_0I$. La propriété est vraie pour $n=0$.

* Supposons que : $\exists(a_n,b_n)\in\mathbb{R}^2$, $f^n=a_nf+b_nI$. Montrons alors que :
  $\exists(a_{n+1},b_{n+1})\in\mathbb{R}^2$, $f^{n+1}=a_{n+1}f+b_{n+1}I$.

$f^{n+1}=f\circ f^n=f\circ(a_nf+b_nI)=a_nf^2+b_nf=\frac{a_n}{2}(f+I)+b_nf=(\frac{a_n}{2}+b_n)f+\frac{a_n}{2}I$

En posant : $a_{n+1}=\frac{a_n}{2}+b_n$ et $b_{n+1}=\frac{a_n}{2}$, on obtient : $f^{n+1}=a_{n+1}f+b_{n+1}I$

ceci achève la récurrence

cl.. $\forall n\in\mathbb{N}, \exists!(a_n,b_n)\in\mathbb{R}^2, f^n=a_nf+b_nI$.

Notons que : $\forall n\in\mathbb{N}$, $a_{n+1}=\frac{a_n}{2}+b_n$ et $b_{n+1}=\frac{a_n}{2}$.

$\begin{cases}a_0=0\\b_0=1\end{cases}$ $\begin{cases}a_1=1\\b_1=0\end{cases}$ $\begin{cases}a_2=\frac{1}{2}\\b_2=\frac{1}{2}\end{cases}$ $\begin{cases}a_3=3/4\\b_3=1/4\end{cases}$ $\begin{cases}a_4=5/8\\b_4=3/8\end{cases}$

b) Soit $n\in\mathbb{N}$. $f^{n+2}=f^n\circ f^2=f^n\circ\left(\frac{1}{2}(f+I)\right)=\frac{1}{2}f^{n+1}+\frac{1}{2}f^n$.

Donc : $a_{n+2}f+b_{n+2}I=\frac{1}{2}(a_{n+1}f+b_{n+1}I)+\frac{1}{2}(a_nf+b_nI)$

Ou : $a_{n+2}f+b_{n+2}I=\frac{1}{2}(a_{n+1}+a_n)f+\frac{1}{2}(b_{n+1}+b_n)I$

La famille (f,I) étant libre il vient : $\begin{cases} a_{n+2}=\frac{1}{2}(a_{n+1}+a_n)\\ b_{n+2}=\frac{1}{2}(b_{n+1}+b_n)\end{cases}$

Cl.. $\forall n\in\mathbb{N},\ a_{n+2}=\frac{1}{2}(a_{n+1}+a_n)$ et $b_{n+2}=\frac{1}{2}(b_{n+1}+b_n)$.

$(a_n)_{n\geq0}$ et $(b_n)_{n\geq0}$ sont des suites satisfaisant à une relation de récurrence linéaire d'ordre 2 d'équation caractéristique : $z\in\mathbb{C}$ et $z^2=\frac{1}{2}(z+1)$. Cette équation admet deux solutions réelles : 1 et $-1/2$.

Donc : $\exists(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2,\ \forall n\in\mathbb{N},\ a_n=\lambda\times1^n+\mu(-1/2)^n$

$\exists(\lambda',\mu')\in\mathbb{R}^2,\ \forall n\in\mathbb{N},\ b_n=\lambda'\times1^n+\mu'(-1/2)^n$

$\begin{cases}0=a_0=\lambda+\mu\\ 1=a_1=\lambda-\frac{\mu}{2}\end{cases}$; $\begin{cases}\mu=-\lambda\\ 1=\lambda+\frac{\lambda}{2}\end{cases}$; $\begin{cases}\lambda=\frac{2}{3}\\ \mu=-\frac{2}{3}\end{cases}$

$\forall n\in\mathbb{N},\ a_n=\frac{2}{3}\left(1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right)$

$\begin{cases}1=b_0=\lambda'+\mu'\\ 0=b_1=\lambda'-\frac{\mu'}{2}\end{cases}$; $\begin{cases}\mu'=2\lambda'\\ 3\lambda'=1\end{cases}$; $\begin{cases}\lambda'=\frac{1}{3}\\ \mu'=\frac{2}{3}\end{cases}$

$\forall n\in\mathbb{N},\ b_n=\frac{1}{3}\left(1+2\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right)$

▼ Remarque.. Il était plus simple

1°.. de remarquer que : $\forall n\in\mathbb{N},\ a_{n+1}+b_{n+1}=\frac{a_n}{2}+b_n+\frac{a_n}{2}=a_n+b_n$; c'est à dire que la suite $(a_n+b_n)_{n\geq0}$ est constante, ou encore que : $\forall n\in\mathbb{N},\ a_n+b_n=a_0+b_0=0+1=1$, soit encore que : $\forall n\in\mathbb{N},\ b_n=1-a_n$

2°.. D'écrire alors : $\forall n\in\mathbb{N},\ a_{n+1}=\frac{a_n}{2}+1-a_n=-\frac{1}{2}a_n+1$

$(a_n)_{n\geq0}$ était alors une suite arithmético-géométrique ... ▲

$\left|-\frac{1}{2}\right|<1$ donc : $\lim_{n\to+\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n=0$. Ceci donne : $\lim_{n\to+\infty}a_n=\frac{2}{3}$ et $\lim_{n\to+\infty}b_n=\frac{1}{3}$.

c) $p = \frac{2}{3} f + \frac{1}{3} I$. $p^2 = \left(\frac{2}{3} f + \frac{1}{3} I\right)^2 \underset{f\circ I = I\circ f}{=} \frac{4}{9} f^2 + \frac{4}{9} f + \frac{1}{9} I = \frac{4}{9}\cdot\frac{1}{2}(f+I) + \frac{4}{9} f + \frac{1}{9} I = \frac{2}{9} f + \frac{4}{9} f + \frac{2}{9} I + \frac{1}{9} I$

donc $p^2 = \frac{6}{9} f + \frac{3}{9} I = \frac{2}{3} f + \frac{1}{3} I = p$. $\underline{p^2 = p}$.

Par conséquent p est endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ vérifiant $p\circ p = p$; <u>p est un projecteur ou une projection de $\mathbb{R}^n$.</u>

d) $f^2 = \frac{1}{2}(f+I)$; $2f^2 - f = I$; $I = (2f - I)\circ f = f\circ(2f - I)$

Par conséquent l'endomorphisme f est bijectif (donc symétrisable pour $\circ$, donc inversible ?)

et $\underline{f^{-1} = 2f - I}$

♥ Exercice de contrôle.. Prouver que : $\forall n \in \mathbb{Z}$, $f^n = \frac{2}{3}\left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right) f + \frac{1}{3}\left(1 + 2\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right) I$ ♥

Q3) a) $\lambda \in \operatorname{Spec} f$. Soit x un vecteur propre de f associé à la valeur propre λ.

$f(x) = \lambda x$; $f^2(x) = f(\lambda x) = \lambda f(x) = \lambda^2 x$

donc $\lambda^2 x = f^2(x) = \frac{1}{2}(f(x) + x) = \frac{1}{2}(\lambda x + x) = \frac{1}{2}(\lambda + 1) x$.

Par conséquent : $\left(\lambda^2 - \frac{1}{2}(\lambda+1)\right) x = 0_{\mathbb{R}^n}$; $\lambda^2 - \frac{1}{2}\lambda - \frac{1}{2} = 0$ car $x \neq 0_{\mathbb{R}^n}$.

$\lambda^2 - \frac{1}{2}\lambda - \frac{1}{2} = 0$ donne alors $\lambda = 1$ ou $\lambda = -\frac{1}{2}$.

c.. $\underline{\operatorname{Spec} f \subset \{-\frac{1}{2}, 1\}}$ (les valeurs propres éventuelles de f sont : $-\frac{1}{2}$ et 1).

b) Montrons que : $\operatorname{Ker}(f - I) \oplus \operatorname{Ker}(f + \frac{1}{2} I) = \mathbb{R}^n$

c'est à dire que pour tout élément x de $\mathbb{R}^n$ il existe un couple (y, z) et un seul tel que : $y \in \operatorname{Ker}(f - I)$, $z \in \operatorname{Ker}(f + \frac{1}{2} I)$ et $x = y + z$.

Analyse/Unicité.. Soit $x \in \mathbb{R}^n$. Supposons que : $(y, z) \in \operatorname{Ker}(f - I) \times \operatorname{Ker}(f + \frac{1}{2} I)$ et $x = y + z$.

Alors $f(x) = f(y) + f(z) = y - \frac{1}{2} z$.

$\begin{cases} x = y + z \\ f(x) = y - \frac{1}{2} z \end{cases}$; donc $\begin{cases} x - f(x) = z + \frac{1}{2} z = \frac{3}{2} z \\ x + 2f(x) = 3y \end{cases}$; $\begin{cases} y = \frac{1}{3}(x + 2f(x)) \\ z = \frac{2}{3}(x - f(x)) \end{cases}$

Ceci prouve l'unicité de la décomposition.

Synthèse/Existence..

Soit $x \in E$. Posons : $y = \frac{1}{3}(x + 2f(x))$ et $z = \frac{2}{3}(x - f(x))$ ..

$\rightarrow y+z = \frac{1}{3}(x+2f(x)+2x-2f(x)) = x$. $\underline{y+z=x}$

$\rightarrow f(y) = \frac{1}{3} f(x) + \frac{2}{3} f^2(x) \underset{f^2=\frac{1}{2}(f+I)}{=} \frac{1}{3} f(x) + \frac{1}{3}(f(x)+x) = \frac{1}{3}(x+2f(x)) = y$; $\underline{y \in \mathrm{Ker}(f-I)}$.

$\rightarrow f(z) = \frac{2}{3} f(x) - \frac{2}{3} f^2(x) = \frac{2}{3} f(x) - \frac{1}{3}(f(x)+x) = -\frac{1}{3}x + \frac{1}{3} f(x) = -\frac{1}{2}\left[\frac{2}{3}(x-f(x))\right] = -\frac{1}{2} z$;

$\underline{z \in \mathrm{Ker}(f+\frac{1}{2} I)}$

Ceci prouve l'existence de la décomposition.

cqfd $\underline{\mathbb{R}^n = \mathrm{Ker}(f-I) \oplus \mathrm{Ker}(f+\frac{1}{2} I)}$

p est le projecteur sur $\mathrm{Ker}(p-I)$ et dans la direction de $\mathrm{Ker}\, p$.

Or : $\begin{cases} p-I = \frac{2}{3} f + \frac{1}{3} I - I = \frac{2}{3}(f-I) \\ p = \frac{2}{3} f + \frac{1}{3} I = \frac{2}{3}(f+\frac{1}{2} I) \end{cases}$; donc $\begin{cases} \mathrm{Ker}(p-I) = \mathrm{Ker}(\frac{2}{3}(f-I)) = \mathrm{Ker}(f-I) \\ \mathrm{Ker}\, p = \mathrm{Ker}(\frac{2}{3}(f+\frac{1}{2} I)) = \mathrm{Ker}(f+\frac{1}{2} I) \end{cases}$

<u>Par conséquent p est le projecteur sur $\mathrm{Ker}(f-I)$ dans la direction de $\mathrm{Ker}(f+\frac{1}{2} I)$</u>

♥ <u>Remarque</u>.. Était-il raisonnable de faire démontrer la supplémentarité de $\mathrm{Ker}(f-I)$ et $\mathrm{Ker}(f+\frac{1}{2} I)$? ♥

Montrons que f est diagonalisable

<u>1er cas</u>.. $\mathrm{Ker}(f-I) = \{0_{\mathbb{R}^n}\}$. Alors : $\mathrm{Ker}(f+\frac{1}{2} I) = \mathbb{R}^n$; $f = -\frac{1}{2} I$. f est diagonalisable.

<u>2ème cas</u>.. $\mathrm{Ker}(f+\frac{1}{2} I) = \{0_{\mathbb{R}^n}\}$. Alors : $\mathrm{Ker}(f-I) = \mathbb{R}^n$; $f = I$. f est diagonalisable.

<u>3ème cas</u>.. $\mathrm{Ker}(f-I) \neq \{0_{\mathbb{R}^n}\}$ et $\mathrm{Ker}(f+\frac{1}{2} I) \neq \{0_{\mathbb{R}^n}\}$

Alors : $1 \in \mathrm{spec}\, f$ et $-\frac{1}{2} \in \mathrm{spec}\, f$. Comme : $\mathrm{Spec}\, f \subset \{-\frac{1}{2}, 1\}$, il vient $\mathrm{Spec}\, f = \{-\frac{1}{2}, 1\}$. De plus les sous-espaces propres associés à $-\frac{1}{2}$ et 1 sont supplémentaires ; la somme de leurs dimensions est donc $\dim \mathbb{R}^n$. Par conséquent : f est diagonalisable.

<u>cqfd.. f est diagonalisable</u>.

c) $r = \dim \mathrm{Ker}(f - I)$

- Si $r = 0$: $\mathrm{Ker}(f-I) = \{0_{\mathbb{R}^n}\}$; $\mathrm{Ker}(f + \frac{1}{2}I) = \mathbb{R}^n$; $f = -\frac{1}{2}I$.

- Si $r = n$: $\mathrm{Ker}(f - I) = \mathbb{R}^n$; $f = I$.

- $0 < r < n$. $\forall k \in [\![1, r]\!]$, $f(e_k) = e_k$ et $\forall k \in [\![r+1, n]\!]$, $f(e_k) = -\frac{1}{2} e_k$

donc :

$$M = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & (0) & \\ & & 1 & & & \\ & & & -\frac{1}{2} & & \\ & (0) & & & \ddots & \\ & & & & & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} I_{n-r} \end{bmatrix}$$

d) Un calcul immédiat donne $M^2 = \frac{1}{2}(M + I_n)$ (passe par un endomorphisme si nécessaire).

e) $(f + \frac{1}{2}I) \circ (f - I) = f^2 - f + \frac{1}{2} f - \frac{1}{2} I = f^2 - \frac{1}{2}(f + I) = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)}$.

$(f + \frac{1}{2}I) \circ (f - I) = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)}$.

donc : $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $(f + \frac{1}{2}I)\big((f - I)(x)\big) = 0$

ou : $\forall y \in \mathrm{Im}(f - I)$, $(f + \frac{1}{2}I)(y) = 0$; $\forall y \in \mathrm{Im}(f - I)$, $y \in \mathrm{Ker}(f + \frac{1}{2}I)$

Par conséquent : $\mathrm{Im}(f - I) \subset \mathrm{Ker}(f + \frac{1}{2}I)$.

Or $\dim \mathrm{Im}(f - I) = n - \dim \mathrm{Ker}(f - I) = \dim \mathrm{Ker}(f - I) + \dim \mathrm{Ker}(f + \frac{1}{2}I) - \dim \mathrm{Ker}(f - I)$

Par conséquent : $\dim \mathrm{Im}(f - I) = \dim \mathrm{Ker}(f + \frac{1}{2}I)$; comme : $\mathrm{Im}(f - I) \subset \mathrm{Ker}(f + \frac{1}{2}I)$

il vient : $\mathrm{Im}(f - I) = \mathrm{Ker}(f + \frac{1}{2}I)$.

p est alors le projecteur sur $\mathrm{Ker}(f - I)$ dans la direction de $\mathrm{Im}(f - I)$.

Fin de la partie I

PARTIE II

Q1.. Etude d'une suite récurrente..

a) Soit $r \in \mathbb{C}$. $r^3 = \frac{r^2+r+1}{3} \iff 0 = 3r^3 - r^2 - r - 1 = (r-1)(3r^2+2r+1) \iff \begin{cases} r = 1 \\ \text{ou} \\ 3r^2+2r+1 = 0 \end{cases}$

$$r^3 = \frac{r^2+r+1}{3} \iff \begin{cases} r = 1 \\ \text{ou} \\ r = \frac{-1+i\sqrt{2}}{3} \text{ ou } r = \frac{-1-i\sqrt{2}}{3} \end{cases} \qquad (\Delta' = 1^2 - 3 = -2 \ldots)$$

Finalement les solutions de l'équation $r \in \mathbb{C}$ et $r^3 = \frac{r^2+r+1}{3}$ sont : $1, \frac{-1+i\sqrt{2}}{3}$ et $\frac{-1-i\sqrt{2}}{3}$.

Dans la suite : $\alpha = \frac{-1+i\sqrt{2}}{3}$.

b) Soit $r \in \mathbb{C}^*$.

$(r^n)_{n\geq 0}$ vérifie (2) $\iff \forall n \in \mathbb{N},\ r^{n+3} = \frac{1}{3}(r^{n+2}+r^{n+1}+r^n) \iff \forall n \in \mathbb{N},\ r^n\left(r^3 - \frac{r^2+r+1}{3}\right) = 0$

$(r^n)_{n\geq 0}$ vérifie (2) $\overset{r \neq 0}{\iff} r^3 - \frac{r^2+r+1}{3} = 0 \iff r \in \{1, \alpha, \bar{\alpha}\}$.

Cl.. $(1^n)_{n\geq 0}$, $(\alpha^n)_{n\geq 0}$ et $(\bar{\alpha}^n)_{n\geq 0}$ sont LES suites du type $(r^n)_{n\geq 0}$ vérifiant (2).

▼ Remarque.. $(r^n)_{n\geq 0}$ "n'a pas de sens" si $r = 0$ $(0^0 = ?)$ ▼

c) $(u_n)_{n\geq 0}$ est une suite vérifiant (2). $(x,y,z) \in \mathbb{C}^3$.

$$\begin{cases} x+y+z = u_0 \\ x+\alpha y+\bar{\alpha} z = u_1 \\ x+\alpha^2 y+\bar{\alpha}^2 z = u_2 \end{cases} \underset{L_3 \leftarrow 3L_3+2L_2+L_1}{\iff} \begin{cases} x+y+z = u_0 \\ x+\alpha y+\bar{\alpha} z = u_1 \\ 6x + y(3\alpha^2+2\alpha+1) + z(3\bar{\alpha}^2+2\bar{\alpha}+1) = 3u_2+2u_1+u_0 \end{cases}$$

Rappelons que : $3\alpha^2+2\alpha+1 = 3\bar{\alpha}^2+2\bar{\alpha}+1 = 0$. Par conséquent :

$$(S) \begin{cases} x+y+z = u_0 \\ x+\alpha y+\bar{\alpha} z = u_1 \\ x+\alpha^2 y+\bar{\alpha}^2 z = u_2 \end{cases} \iff \left.\begin{cases} x = \frac{1}{6}(3u_2+2u_1+u_0) \\ y+z = u_0 - \frac{1}{6}(3u_2+2u_1+u_0) = \frac{1}{6}(5u_0 - 2u_1 - 3u_2) \\ \alpha y + \bar{\alpha} z = u_1 - \frac{1}{6}(3u_2+2u_1+u_0) = \frac{1}{6}(-u_0 + 4u_1 - 3u_2) \end{cases}\right\} (S')$$

Cette dernière équivalence prouve que le système (S) admet une solution et une seule si et seulement si (S') admet une solution et une seule.

La matrice du système (S') est : $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \alpha & \bar{\alpha} \end{bmatrix}$; $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & \bar{\alpha}-\alpha \end{bmatrix}$ en est une réduite de Gauss ;

cette dernière matrice est inversible car $\bar{\alpha}-\alpha$ n'est pas nul ($\bar{\alpha}-\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = \bar{\alpha} \Rightarrow \alpha \in \mathbb{R}$!)

$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \alpha & \bar\alpha \end{bmatrix}$ est donc inversible ; (S') est alors un système de Cramer et admet une solution et une seule.

cl.. $\exists! (x,y,z) \in \mathbb{C}^3$, $\begin{cases} x+y+z = u_0 \\ x+\alpha y+\bar\alpha z = u_1 \\ x+\alpha^2 y+\bar\alpha^2 z = u_2 \end{cases}$.

Montrons alors par une récurrence d'ordre 3 que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = x + y\alpha^n + z\bar\alpha^n$

→ c'est vrai pour $n = 0, 1$ et 2.

→ Supposons la propriété vraie pour n, $n+1$ et $n+2$ ($n \in \mathbb{N}$) et montrons la pour $n+3$.

$u_{n+3} = \frac{1}{3}[u_{n+2} + u_{n+1} + u_n] = \frac{1}{3}[x + y\alpha^{n+2} + z\bar\alpha^{n+2} + x + y\alpha^{n+1} + z\bar\alpha^{n+1} + x + y\alpha^n + z\bar\alpha^n]$

$u_{n+3} = \frac{1}{3}[3x + y(\alpha^{n+2} + \alpha^{n+1} + \alpha^n) + z(\bar\alpha^{n+2} + \bar\alpha^{n+1} + \bar\alpha^n)]$

Comme $(\alpha^n)_{n\geq 0}$ et $(\bar\alpha^n)_{n\geq 0}$ vérifient (2) ceci donne :

$u_{n+3} = \frac{1}{3}[3x + y(3\alpha^{n+3}) + z(3\bar\alpha^{n+3})] = x + y\alpha^{n+3} + z\bar\alpha^{n+3}$ ... et achève la récurrence.

cl.. $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = x + y\alpha^n + z\bar\alpha^n$

▼ Remarque.. L'ensemble des suites complexes $(u_n)_{n\geq 0}$ vérifiant (2) est un espace vectoriel et $((1)_{n\geq 0}, (\alpha^n)_{n\geq 0}, (\bar\alpha^n)_{n\geq 0})$ en est une base. ▼

$|\alpha| = \left|\frac{-1+i\sqrt2}{3}\right| = \frac{\sqrt{1+2}}{3} = \frac{\sqrt3}{3}$. $|\alpha| = |\bar\alpha| < 1$ donc : $\lim_{n\to+\infty} \alpha^n = \lim_{n\to+\infty} \bar\alpha^n = 0$.

Par conséquent : $\lim_{n\to+\infty} u_n = x$; ou : $\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{1}{6}(u_0 + 2u_1 + 3u_2)$.

Q2 Etude des puissances de f et de son inversibilité..

a) On démontre exactement comme en I Q2 a) que :

$\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists! (a_n, b_n, c_n) \in \mathbb{R}^3$, $f^n = a_n f^2 + b_n f + c_n I$

Pris de remords je propose une autre démonstration.

Posons $F = \mathrm{Vect}(f^2, f, I)$. (f^2, f, I) étant une famille libre, c'est une base de F.

Pour montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists! (a_n, b_n, c_n) \in \mathbb{R}^3$; $f^n = a_n f^2 + b_n f + c_n I$ il suffit de prouver que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $f^n \in \mathrm{Vect}(f^2, f, I) = F$ ok?

mation ce dernier résultat par récurrence. Notons avant de commencer que $f^3=\frac{1}{3}(I+f+f^2)$ permet de dire que : $Vect(f^3,f^2,f)\subset Vect(f^2,f,I)=F$.

- La propriété est vraie pour $n=0$ car $f^0=I\in F$
- Supposons que : $f^n\in F$ et montrons que $f^{n+1}\in F$.
  $f^n\in F=Vect(f^2,f,I)$ donc $f^{n+1}=f\circ f^n\in Vect(f^3,f^2,f)\subset F$; $f^{n+1}\in F$. Ce qui achève la récurrence.

Soit $n\in\mathbb{N}$.
$f^{n+1}=f\circ f^n=f\circ(a_nf^2+b_nf+c_nI)=a_nf^3+b_nf^2+c_nf=a_n\frac{1}{3}(f^2+f+I)+b_nf^2+c_nf$

donc $a_{n+1}f^2+b_{n+1}f+c_{n+1}I=(\frac{1}{3}a_n+b_n)f^2+(\frac{1}{3}a_n+c_n)f+\frac{a_n}{3}I$. (f^2,f,I) étant libre :

$a_{n+1}=\frac{1}{3}a_n+b_n$, $b_{n+1}=\frac{1}{3}a_n+c_n$ et $c_{n+1}=\frac{a_n}{3}$ et ceci pour tout $n\in\mathbb{N}$.

n	0	1	2	3
a_n	0	0	1	1/3
b_n	0	1	0	1/3
c_n	1	0	0	1/3

▼ Remarque.. La suite $(a_n+b_n+c_n)_{n\geq 0}$ est constante.
Ainsi $\forall n\in\mathbb{N}$, $a_n+b_n+c_n=1$. ▼

b) Soit $n\in\mathbb{N}$

$a_{n+3}f^2+b_{n+3}f+c_{n+3}I=f^{n+3}=f^n\circ f^3=f^n\circ(\frac{1}{3}(f^2+f+I))=\frac{1}{3}f^{n+2}+\frac{1}{3}f^{n+1}+\frac{1}{3}f^n$

$a_{n+3}f^2+b_{n+3}f+c_{n+3}I=\frac{1}{3}(a_{n+2}f^2+b_{n+2}f+c_{n+2}I)+\frac{1}{3}(a_{n+1}f^2+b_{n+1}f+c_{n+1}I)+\frac{1}{3}(a_nf^2+b_nf+c_nI)$.

(f^2,f,I) étant une famille libre, il vient par " identification ".

$a_{n+3}=\frac{1}{3}(a_{n+2}+a_{n+1}+a_n)$, $b_{n+3}=\frac{1}{3}(b_{n+2}+b_{n+1}+b_n)$ et $c_{n+3}=\frac{1}{3}(c_{n+2}+c_{n+1}+c_n)$.

Cl.. $(a_n)_{n\geq 0}$, $(b_n)_{n\geq 0}$ et $(c_n)_{n\geq 0}$ vérifient (G).

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=\frac{1}{6}(a_0+2a_1+3a_2)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$; $\lim\limits_{n\to+\infty}b_n=\frac{1}{6}(b_0+2b_1+3b_2)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

$\lim\limits_{n\to+\infty}c_n=\frac{1}{6}(c_0+2c_1+3c_2)=\frac{1}{6}$. Cl.. $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=\frac{1}{2}$, $\lim\limits_{n\to+\infty}b_n=\frac{1}{3}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}c_n=\frac{1}{6}$.

c) $q = \frac{1}{2}f^2 + \frac{1}{3}f + \frac{1}{6}I = \frac{1}{6}(3f^2+2f+I)$.

$q^2 = q\circ q = \frac{1}{36}(3f^2+2f+I)\circ(3f^2+2f+I) = \frac{1}{36}(9f^4+6f^3+3f^2+6f^3+4f^2+2f+3f^2+2f+I) = \frac{1}{36}(9f^4+12f^3+10f^2+4f+I)$

$f^3 = \frac{1}{3}(f^2+f+I)$; $12f^3 = 4f^2+4f+4I$. $f^4 = a_4f^2+b_4f+c_4I = \frac{1}{3}(1+\frac{1}{3})f^2+\frac{1}{3}(1+\frac{1}{3})f+\frac{1}{3}(\frac{1}{3})I$; $9f^4 = 4f^2+4f+I$

$q^2 = \frac{1}{36}[4f^2+4f+I+4f^2+4f+4I+10f^2+4f+I] = \frac{1}{36}[18f^2+12f+6I] = \frac{1}{6}(3f^2+2f+I) = q$

q est un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ tel que : $q\circ q = q$. <u>q est donc un projecteur.</u>

d) $3f^3 = f^2+f+I$; $3f^3-f^2-f = I$; $f\circ(3f^2-f-I) = (3f^2-f-I)\circ f = I$.

<u>f est donc inversible et $f^{-1} = 3f^2-f-I$.</u>

<u>Q3 Etude du projecteur q.</u> (Etude d'une malachone unique).

a) Soit λ une valeur propre réelle de f. $\exists x\in\mathbb{R}^n$, $x\neq 0$ et $f(x)=\lambda x$.

$f^2(x) = f(\lambda x) = \lambda f(x) = \lambda^2 x$.

$f^3(x) = f(\lambda^2 x) = \lambda^2 f(x) = \lambda^3 x$

Donc $\lambda^3 x = f^3(x) = \frac{1}{3}(f^2(x)+f(x)+x) = \frac{1}{3}(\lambda^2 x+\lambda x+x) = \frac{1}{3}(\lambda^2+\lambda+1)x$

Comme x n'est pas nul : $\lambda^3 = \frac{1}{3}(\lambda^2+\lambda+1)$; $\lambda\in\{1,\alpha,\bar\alpha\}$; λ étant réel : $\lambda = 1$.

Finalement $\operatorname{Spec} f \subset \{1\}$

<u>1 est la seule valeur propre réelle éventuelle de f...</u> I est un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ diagonalisable et vérifiant (3)... c'est le seul !

b) Montrons que : $\mathbb{R}^n = \operatorname{Ker}(f-I)\oplus\operatorname{Ker}(3f^2+2f+I)$, c'est à dire que tout élément x de $\mathbb{R}^n$ est de manière unique somme d'un élément y de $\operatorname{Ker}(f-I)$ et d'un élément z de $\operatorname{Ker}(3f^2+2f+I)$.

Analyse/Unicité..

Soit x un élément de $\mathbb{R}^n$. Supposons que : $x = y+z$ avec $y\in\operatorname{Ker}(f-I)$ et $z\in\operatorname{Ker}(3f^2+2f+I)$.

$x = y+z$; $z = x-y$

$f(x) = f(y)+f(z) = y+f(z)$; $f(z) = f(x)-y$

$f^2(x) = f^2(y)+f^2(z) = y+f^2(z)$; $f^2(z) = f^2(x)-y$

$0 = 3f^2(z)+2f(z)+z = 3f^2(x)-3y+2f(x)-2y+x-y$; donc <u>$y = \frac{1}{6}(3f^2(x)+2f(x)+x)$</u> et

$z\in\operatorname{Ker}(3f^2+2f+I)$

<u>$z = x-\frac{1}{6}(3f^2(x)+2f(x)+x)$</u>

Ceci achève de prouver l'unicité.

Existence / Synthèse.

Soit $x \in \mathbb{R}^n$. Posons $y = \frac{1}{6}(3f^2(x) + 2f(x) + x)$ et $z = x - \frac{1}{6}(3f^2(x) + 2f(x) + x)$.

→ évidemment $\underline{y + z = x}$

→ Montrons que : $y \in \mathrm{Ker}(f - I)$.

$f^3 = \frac{1}{3}(f^2 + f + I)$; $0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)} = 3f^3 - f^2 - f - I = (f - I)\circ(3f^2 + 2f + I)$; $(f - I)\circ(3f^2 + 2f + I) = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)}$

$(f - I)(y) = \frac{1}{6}(f - I)(3f^2(x) + 2f(x) + x) = \frac{1}{6}(f - I)((3f^2 + 2f + I)(x)) = \frac{1}{6}[(f - I)\circ(3f^2 + 2f + I)](x) = 0_{\mathbb{R}^n}$.

Donc : $\underline{y \in \mathrm{Ker}(f - I)}$.

→ Montrons que : $z \in \mathrm{Ker}(3f^2 + 2f + I)$. Le calcul de $(3f^2 + 2f + I)(z)$ ne me dit rien ...

Alors $f^3 = \frac{1}{3}(f^2 + f + I)$ donne pour problème : $(3f^2 + 2f + I)\circ(f - I) = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)}$

Donc $\forall t \in \mathbb{R}^n$, $(f - I)(t) \in \mathrm{Ker}(3f^2 + 2f + I)$.

Or $z = x - \frac{1}{6}(3f^2(x) + 2f(x) + x) = \frac{1}{6}(-3f^2(x) - 2f(x) + 5x) = \frac{1}{6}[-3(f^2(x) - f(x)) - 5(f(x) - x)]$

$$z = -\frac{1}{2}\underbrace{(f - I)(f(x))}_{\in \mathrm{Ker}(3f^2 + 2f + I)} - \frac{5}{6}\underbrace{(f - I)(x)}_{\in \mathrm{Ker}(3f^2 + 2f + I)}$$

z est donc une combinaison linéaire d'éléments de $\mathrm{Ker}(3f^2 + 2f + I)$; $\underline{z \in \mathrm{Ker}(3f^2 + 2f + I)}$

Ceci achève de prouver que : $\underline{\mathbb{R}^n = \mathrm{Ker}(f - I) \oplus \mathrm{Ker}(3f^2 + 2f + I)}$.

D'après ce qui précède, ~~la projection~~ le projecteur sur $\mathrm{Ker}(f - I)$ dans la direction de $\mathrm{Ker}(3f^2 + 2f + I)$ est l'application qui à tout x dans $\mathbb{R}^n$ associe $\frac{1}{6}(3f^2(x) + 2f(x) + x)$; c'est donc q !

$\underline{\text{cl : } q \text{ est bien le projecteur sur } \mathrm{Ker}(f - I) \text{ dans la direction de } \mathrm{Ker}(3f^2 + 2f + I)}$

c) A presque déjà été fait...

- $(3f^2 + 2f + I)\circ(f - I) = 3f^3 - 3f^2 + 2f^2 - 2f + f - I = 3f^3 - (f^2 + f + I) = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)}$

$\underline{(3f^2 + 2f + I)\circ(f - I) = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)}}$

Donc : $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $(3f^2+2f+I)((f-I)(x)) = 0_{\mathbb{R}^n}$

ou : $\forall y \in \mathrm{Im}(f-I)$, $(3f^2+2f+I)(y) = 0_{\mathbb{R}^n}$

c'est à dire : $\mathrm{Im}(f-I) \subset \mathrm{Ker}(3f^2+2f+I)$.

$\dim \mathrm{Ker}(f-I) + \dim \mathrm{Ker}(3f^2+2f+I) = \dim \mathbb{R}^n = \dim \mathrm{Ker}(f-I) + \dim \mathrm{Im}(f-I)$

Par conséquent : $\dim \mathrm{Ker}(3f^2+2f+I) = \dim \mathrm{Im}(f-I)$.

Les deux résultats précédents donnent : $\mathrm{Ker}(3f^2+2f+I) = \mathrm{Im}(f-I)$.

q est donc le projecteur sur $\mathrm{Ker}(f-I)$ dans la direction de $\mathrm{Im}(f-I)$.

Q4) Etude des solutions de (3).

a) Soit $e_3 \in \mathrm{Ker}(3f^2+2f+I) - \{0_{\mathbb{R}^n}\}$. $(3f^2+2f+I)(f(e_3)) = f((3f^2+2f+I)(e_3)) = f(0_{\mathbb{R}^n}) = 0_{\mathbb{R}^n}$; donc $f(e_3) \in \mathrm{Ker}(3f^2+2f+I)$

montrons que la famille $(e_3, f(e_3))$ est libre.

Soit $(\hat{\alpha}, \hat{\beta}) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $\hat{\alpha} e_3 + \hat{\beta} f(e_3) = 0_{\mathbb{R}^n}$.

- Supposons $\hat{\beta} \neq 0$

Alors $f(e_3) = \lambda e_3$ avec $\lambda = -\dfrac{\hat{\alpha}}{\hat{\beta}}$. Comme e_3 n'est pas nul : $\lambda \in \mathrm{Spec} f \subset \{1\}$.

donc $f(e_3) = e_3$.

$e_3 \in \mathrm{Ker}(3f^2+2f+I)$: $0_{\mathbb{R}^n} = 3f^2(e_3) + 2f(e_3) + e_3 \underset{f(e_3)=e_3 \text{ et } f^2(e_3)=e_3}{=} 6e_3$, $e_3 = 0_{\mathbb{R}^n}$!

- Finalement $\hat{\beta} = 0$.

On a alors $\hat{\alpha} e_3 = 0_{\mathbb{R}^n}$ et donc $\hat{\alpha} = 0$ car e_3 n'est pas nul.

La famille $(e_3, f(e_3))$ est libre dans $\mathrm{Ker}(3f^2+2f+I)$.

Il en résulte clairement que : $\dim \mathrm{Ker}(3f^2+2f+I) \geq 2$.

b) $n = 2$. ou $\dim \mathrm{Ker}(3f^2+2f+I) = 0$ et $\dim \mathrm{Ker}(f-I) = 2$; alors $f = I$

résultat de Q4 a) → $\boxed{\text{ou}}$ $\dim \mathrm{Ker}(3f^2+2f+I) = 2$ et $\dim \mathrm{Ker}(f-I) = 0$; alors $3f^2+2f+I = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^2)}$.

1er cas... $f = I$. La matrice de f dans toute base de $\mathbb{R}^2$ est $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

2ème cas... $\dim \mathrm{Ker}(3f^2+2f+I) = 2$. Soit e_3 un vecteur non nul de $\mathrm{Ker}(3f^2+2f+I)$

$B = (e_3, f(e_3))$ est une famille libre de $\mathbb{R}^2$ donc une base de $\mathbb{R}^2$.

$f(e_3) = 0.e_1 + 1.e_2$.

Rappelons que : $3f^2 + 2f + I = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^2)}$; $f^2 = -\frac{1}{3} I - \frac{2}{3} f$; $f(f(e_3)) = -\frac{1}{3} e_1 - \frac{2}{3} f(e_3)$.

Par conséquent : $M_B(f) = \begin{bmatrix} 0 & -1/3 \\ 1 & -2/3 \end{bmatrix}$.

Ici f n'est pas diagonalisable sur $\mathbb{R}$ car son spectre (sur $\mathbb{R}$) est vide ; en effet $\operatorname{Spec} f \subset \{1\}$ et 1 n'est pas valeur propre de f car $\operatorname{Ker}(f - I) = 0_{\mathbb{R}^2}$. $\begin{bmatrix} 0 & -1/3 \\ 1 & -2/3 \end{bmatrix}$ n'est pas diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

c) $\dim \operatorname{Ker}(3f^2 + 2f + I) > 2$. Soit e_3 un vecteur non nul de $\operatorname{Ker}(3f^2 + 2f + I)$.

$(e_3, f(e_3))$ est une famille libre de $\operatorname{Ker}(3f^2+2f+I)$ qui n'est pas génératrice ; par conséquent il existe un élément e_4 de $\operatorname{Ker}(3f^2+2f+I)$ tel que : $(e_3, f(e_3), e_4)$ soit une famille libre de $\operatorname{Ker}(3f^2+2f+I)$, montrons que $(e_3, f(e_3), e_4, f(e_4))$ est une famille libre de $\operatorname{Ker}(3f^2+2f+I)$.

$e_4 \in \operatorname{Ker}(3f^2+2f+I)$ donc $f(e_4) \in \operatorname{Ker}(3f^2+2f+I)$ (voir pour $f(e_3)$ en a)).

Montrons que la famille $(e_3, f(e_3), e_4, f(e_4))$ est libre.

Comme $(e_3, f(e_3), e_4)$ est libre, il suffit de prouver que $f(e_4) \notin \operatorname{Vect}(e_3, f(e_3), e_4)$.

Supposons que : $f(e_4) \in \operatorname{Vect}(e_3, f(e_3), e_4)$.

$\exists (u,v,w) \in \mathbb{R}^3$, $f(e_4) = u\, e_3 + v f(e_3) + w e_4$

$$0_{\mathbb{R}^3} \underset{e_4 \in \operatorname{Ker}(3f^2+2f+I)}{=} 3f^2(e_4) + 2f(e_4) + e_4 = 3u f(e_3) + 3v f^2(e_3) + 3w f(e_4) + 2u e_3 + 2v f(e_3) + 2w e_4 + e_4$$

$e_3 \in \operatorname{Ker}(3f^2+2f+I)$ donc $3f^2(e_3) = -2f(e_3) - e_3$. Par conséquent :

$$0_{\mathbb{R}^3} = 3u f(e_3) + v(-2f(e_3) - e_3) + 3w(u e_3 + v f(e_3) + w e_4) + 2u e_3 + 2v f(e_3) + 2w e_4 + e_4$$

La famille $(e_3, f(e_3), e_4)$ étant libre il vient :

$$\begin{cases} -v + 3wu + 2u = 0 \\ 3u - 2v + 3wv + 2v = 0 \\ 3w^2 + 2w + 1 = 0 \end{cases}$$

; la dernière équation donne alors $w \in \{\alpha, \bar{\alpha}\}$!

Finalement : $f(e_4) \notin \operatorname{Vect}(e_3, f(e_3), e_4)$. La famille $(e_3, f(e_3), e_4)$ étant libre : la famille $(e_3, f(e_3), e_4, f(e_4))$ est libre. On a alors : $\dim \operatorname{Ker}(3f^2+2f+I) \geq 4$.

d] $n=3$; ou $\dim \mathrm{Ker}(3f^2+2f+I)=0$ et $\dim \mathrm{Ker}(f-I)=3$ (ici $f=I$).
ou $\dim \mathrm{Ker}(3f^2+2f+I)=2$ et $\dim \mathrm{Ker}(f-I)=1$

(On ne peut, d'après a) et c) avoir $\dim \mathrm{Ker}(3f^2+2f+I)=1$ ou 3).

1er cas.. $\dim \mathrm{Ker}(3f^2+2f+I)=0$. $f=I$.
La matrice de f dans toute base de $\mathbb{R}^3$ est $\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$.

2ème cas.. $\dim \mathrm{Ker}(3f^2+2f+I)=2$.

Soit e_1 un vecteur non nul de $\mathrm{Ker}(3f^2+2f+I)$. $(e_1, f(e_1))$ est une famille libre donc une base de $\mathrm{Ker}(3f^2+2f+I)$.

Soit (e_3) une base de $\mathrm{Ker}(f-I)$.

$\mathcal{B}=(e_1, f(e_1), e_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ ($=\mathrm{Ker}(f-I)\oplus\mathrm{Ker}(3f^2+2f+I)$).

$$f(f(e_1))=f^2(e_1)\underset{\substack{\uparrow\\ e_1\in\mathrm{Ker}(3f^2+2f+I)}}{=}-\frac{1}{3}e_1-\frac{2}{3}f(e_1)\ ;\quad f(e_3)\underset{\substack{\uparrow\\ e_3\in\mathrm{Ker}(f-I)}}{=}e_3$$

Par conséquent : $M_{\mathcal{B}}(f)=\begin{bmatrix}0&-1/3&0\\1&-2/3&0\\0&0&1\end{bmatrix}$

f n'est pas diagonalisable car 1 est la seule valeur propre de f ($\mathrm{Ker}(f-I)\neq\{0_{\mathbb{R}^3}\}$ et $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}} f\subset\{1\}$) et le sous-espace propre associé est de dimension 1 ($\dim \mathrm{Ker}(f-I)=1$).

La matrice $\begin{bmatrix}0&-1/3&0\\1&-2/3&0\\0&0&1\end{bmatrix}$ n'est pas diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

---

e] $n=4$. D'après a) et c) $\dim \mathrm{Ker}(3f^2+2f+I)$ est paire, donc trois cas sont à envisager.

1er cas.- $\dim \mathrm{Ker}(3f^2+2f+I)=0$. Alors $\mathrm{Ker}(f-I)=\mathbb{R}^4$; $f=I$.
La matrice de f dans toute base de $\mathbb{R}^4$ est : $\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$

2ème cas.. $\dim \mathrm{Ker}(3f^2+2f+I)=2$; alors $\dim \mathrm{Ker}(f-I)=2$.

Soit e_1 un vecteur non nul de ce noyau. $(e_1, f(e_1))$ est alors une famille libre de $\mathrm{Ker}(3f^2+2f+I)$ donc une base de $\mathrm{Ker}(3f^2+2f+I)$

Soit (e_3, e_4) une base de $\mathrm{Ker}(f-I)$; $\mathcal{B}=(e_1, f(e_1), e_3, e_4)$ est une base de $\mathbb{R}^4$ car $\mathbb{R}^4=\mathrm{Ker}(3f^2+2f+I)\oplus\mathrm{Ker}(f-I)$.

Ecrivons la matrice de f dans la base $\mathcal{B}=(e_1, f(e_1), e_3, e_4)$.

$f(e_1)=0.e_1+1.f(e_1)+0.e_3+0.e_4$

Comme dans d) $f(f(e_1))=-\frac{2}{3}f(e_1)-\frac{1}{3}e_1=-\frac{1}{3}e_1-\frac{2}{3}f(e_1)+0.e_3+0.e_4$ car le vecteur e_1 appartient à $\mathrm{Ker}(3f^2+2f+I)$.

De plus $f(e_3)=e_3$ et $f(e_4)=e_4$. Il vient alors $M_{\mathcal{B}}(f)=\begin{bmatrix} 0 & -1/3 & 0 & 0 \\ 1 & -2/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Remarque.. Ici $\mathrm{Spec} f=\{1\}$ et le sous-espace propre associé est de dimension 2 ; f et la matrice précédente ne sont pas diagonalisables.

3ème cas.. $\dim(\mathrm{Ker}(3f^2+2f+I))=4$. Alors $\mathrm{Ker}(3f^2+2f+I)=\mathbb{R}^4$; $3f^2+2f+I=0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^4)}$.

Soit e_1 un élément non nul de $\mathrm{Ker}(3f^2+2f+I)$.

$(e_1, f(e_1))$ est alors une famille libre et non génératrice de $\mathrm{Ker}(3f^2+2f+I)$

Ajoutons-lui un élément e_2 de $\mathrm{Ker}(3f^2+2f+I)$ tel que $(e_1, f(e_1), e_2)$ soit libre.

D'après e) $(e_1, f(e_1), e_2, f(e_2))$ est une famille libre (de 4 vecteurs) de $\mathrm{Ker}(3f^2+2f+I)=\mathbb{R}^4$

Comme $\dim \mathbb{R}^4=4$, $\mathcal{B}=(e_1, f(e_1), e_2, f(e_2))$ est une base de $\mathrm{Ker}(3f^2+2f+I)=\mathbb{R}^4$.

Comme dans ce qui précède : $f(f(e_1))=-\frac{1}{3}e_1-\frac{2}{3}f(e_1)$ et $f(f(e_2))=-\frac{1}{3}e_2-\frac{2}{3}f(e_2)$.

Il vient alors :

$$M_{\mathcal{B}}(f)=\begin{bmatrix} 0 & -1/3 & 0 & 0 \\ 1 & -2/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1 & -2/3 \end{bmatrix}.$$

Remarque.. Ici $\mathrm{Spec}(f)=\emptyset$. f et la matrice précédente ne sont pas diagonalisables.

f) Ici $\dim(\mathrm{Ker}(3f^2+2f+I))>2q$ $(q\in\mathbb{N}^*)$

$(e_1, f(e_1), e_2, \dots, e_q, f(e_q), e_{q+1})$ est une famille libre de $\mathrm{Ker}(3f^2+2f+I)$

Montrons qu'alors que $(e_1, f(e_1), e_2, \dots, e_q, f(e_q), e_{q+1}, f(e_{q+1}))$ est encore une famille libre de ce sous-espace. Il suffit de prouver que $f(e_{q+1})\in\mathrm{Ker}(3f^2+2f+I)$ et que $f(e_{q+1})\notin\mathrm{Vect}(e_1, f(e_1), e_2, \dots, e_q, f(e_q), e_{q+1})$.

$\Rightarrow (3f^2+2f+I)(f(e_{q+1})) = f((3f^2+2f+I)(e_{q+1})) = f(0) = 0$; $f(e_{q+1}) \in \mathrm{Ker}(3f^2+2f+I)$

→ Supposons que $f(e_{q+1}) \in \mathrm{Vect}(e_1, f(e_1), e_2, \dots, e_q, f(e_q), e_{q+1})$.

$\exists (a_1, a_2, \dots, a_{q+1}) \in \mathbb{R}^{q+1}$, $\exists (b_1, b_2, \dots, b_q) \in \mathbb{R}^q$, $f(e_{q+1}) = \sum_{k=1}^{q+1} a_k e_k + \sum_{k=1}^{q} b_k f(e_k)$.

$0 = 3f^2(e_{q+1}) + 2f(e_{q+1}) + e_{q+1} = 3\sum_{k=1}^{q+1} a_k f(e_k) + 3\sum_{k=1}^{q} b_k f^2(e_k) + 2\sum_{k=1}^{q+1} a_k e_k + 2\sum_{k=1}^{q} b_k f(e_k) + e_{q+1}$

$0 = 3\sum_{k=1}^{q+1} a_k f(e_k) + \sum_{k=1}^{q} b_k (-2f(e_k) - e_k) + 2\sum_{k=1}^{q+1} a_k e_k + 2\sum_{k=1}^{q} b_k f(e_k) + e_{q+1}$ car $3f^2(e_k) = -2f(e_k) - e_k$

Réciproquement on écrit que :

$-3a_{q+1} f(e_{q+1}) = 3\sum_{k=1}^{q} a_k f(e_k) - 2\sum_{k=1}^{q} b_k f(e_k) + \sum_{k=1}^{q} b_k e_k + 2\sum_{k=1}^{q} a_k e_k + 2\sum_{k=1}^{q} b_k f(e_k) + (2a_{q+1}+1) e_{q+1}$

D'après la valeur initiale de $f(e_{q+1})$ on peut aussi écrire :

$-3a_{q+1} f(e_{q+1}) = -3a_{q+1} \left(\sum_{k=1}^{q} a_k e_k + \sum_{k=1}^{q} b_k f(e_k) + a_{q+1} e_{q+1} \right)$

On obtient alors deux écritures de $-3a_{q+1} f(e_{q+1})$ sur la famille libre $(e_1, f(e_1), e_2, \dots, e_q, f(e_q), e_{q+1})$; ces deux écritures sont alors identiques.

En particulier les "composantes sur e_{q+1}" sont identiques.

Il vient alors : $2a_{q+1} + 1 = -3a_{q+1}(a_{q+1})$.

Par conséquent : $3a_{q+1}^2 + 2a_{q+1} + 1 = 0$; $a_{q+1} \in \{\alpha, \bar{\alpha}\}$; $a_{q+1} \notin \mathbb{R}$!!

Cette légère contradiction achève de prouver que la famille $(e_1, f(e_1), e_2, \dots, e_q, f(e_q), e_{q+1}, f(e_{q+1}))$ est une famille libre de $\mathrm{Ker}(3f^2+2f+I)$.

L'itération du processus précédent montre que l'on finira par fabriquer une famille libre et génératrice de $\mathrm{Ker}(3f^2+2f+I)$ possédant un nombre pair de vecteurs. On aura alors une dimension paire pour $\mathrm{Ker}(3f^2+2f+I)$.
Montrons proprement (?) ce résultat par récurrence !
Supposons $\dim \mathrm{Ker}(3f^2+2f+I) = 2p+1$ avec $p \in \mathbb{N}$.
Montrons alors que pour tout $k \in [\![1, p+1]\!]$ on peut construire une famille libre de $\mathrm{Ker}(3f^2+2f+I)$ du type $(e_1, f(e_1), e_2, \dots, e_k, f(e_k))$

Pour $k=p+1$ on aura obtenu une famille libre de $2p+2$ vecteurs de $Ker(3f^2+2f+I)$ qui est de dimension $2p+1$: ce qui prouve que : $2p+2 \leq 2p+1$!!

- $\dim(Ker(3f^2+2f+I)) = 2p+1 > 0$.

  Il existe un vecteur non nul e_1 dans $Ker(3f^2+2f+I)$.

  D'après Q4 e] : $(e_1, f(e_1))$ est une famille libre de $Ker(3f^2+2f+I)$.

  La propriété est vraie pour $k=1$

- Supposons la propriété vraie pour $k \in [\![1,p]\!]$ et montrons qu'elle est vraie pour $k+1$

  (Notons que si $p=0$ la récurrence est déjà terminée ...)

  Supposons que $(e_1, f(e_1), e_2, \dots, e_k, f(e_k))$ soit une famille libre de $Ker(3f^2+2f+I)$.

  Cette famille n'est pas génératrice car sinon on aurait : $2k = 2p+1$!

  Par conséquent il existe un élément e_{k+1} de $Ker(3f^2+2f+I)$ tel que :

  $(e_1, f(e_1), e_2, \dots, e_k, f(e_k), e_{k+1})$ soit une famille libre de $Ker(3f^2+2f+I)$.

  Alors d'après Q4 f] $(e_1, f(e_1), e_2, \dots, e_k, f(e_k), e_{k+1}, f(e_{k+1}))$ est une famille libre de $Ker(3f^2+2f+I)$.

  Ceci achève la récurrence.

  Par conséquent $\dim(Ker(3f^2+2f+I)) = 2p+1$ donne une contradiction.

  Finalement $Ker(3f^2+2f+I)$ est de dimension paire.

g] Ici $\dim Ker(3f^2+2f+I) = 2r \in [\![0,n]\!]$.

Rappelons que $Ker(3f^2+2f+I)$ et $Ker(f-I)$ sont supplémentaires et envisageons (rapidement) 2 cas.

1er cas.- $r=0$. Alors $Ker(f-I) = \mathbb{R}^n$. $f = I$. Dans toute base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^n$,

$$M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{bmatrix} 1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & 1 \end{bmatrix}.$$

2ème cas.- $2r = n$ (ce qui suppose n pair). Alors $Ker(3f^2+2f+I) = \mathbb{R}^n$.

On peut alors construire par récurrence une base $\mathcal{B} = (e_1, f(e_1), e_2, \dots, e_r, f(e_r))$ de $\mathbb{R}^n$.

On a $\forall i \in [\![1,r]\!]$, $f(f(e_i)) = -\frac{1}{3} e_i - \frac{2}{3} f(e_i)$. Par conséquent :

$$M_{\mathcal{B}}(f) = \left[\begin{array}{cc|cc|c|c|cc} 0 & -1/3 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & -2/3 & 0 & 0 & & & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -1/3 & \ddots & & & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & -2/3 & & & & \vdots \\ \hline \vdots & & \ddots & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \hline \vdots & & & & \ddots & 0 \;\; -1/3 & 0 & 0 \\ & & & & & 1 \;\; -2/3 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \cdots & & \cdots & 0 \;\;\; 0 & 0 & -1/3 \\ 0 & 0 & & & & 0 \;\;\; 0 & 1 & -2/3 \end{array}\right] \Bigg\} \text{ r blocs ...}$$

3ème cas.. $0 < 2r < n$.

On peut alors construire

1°. une base $\mathcal{B}_1 = (e_1, f(e_1), e_2, \dots, e_r, f(e_r))$ de $\mathrm{Ker}(3f^2+2f+I)$

2°. une base $\mathcal{B}_2 = (e_{2r+1}, e_{2r+2}, \dots, e_n)$ de $\mathrm{Ker}(f-I)$.

On a donc : $\to \mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ base de $\mathbb{R}^n$

$\to \forall i \in [\![1,r]\!],\ f(f(e_i)) = -\frac{1}{3}e_i - \frac{2}{3}f(e_i)$

$\to \forall i \in [\![2r+1,n]\!],\ f(e_i) = e_i$.

On a alors $M_{\mathcal{B}}(f) = \left[\begin{array}{c|c} \begin{matrix} A_1 & & (0) \\ & A_2 & \\ & \ddots & \\ (0) & & A_r \end{matrix} & 0 \\ \hline 0 & I_{n-2r} \end{array}\right]$ avec $A_i = \begin{bmatrix} 0 & -1/3 \\ 1 & -2/3 \end{bmatrix}$ pour tout $i \in [\![1,r]\!]$

B) On suppose que M est une matrice d'un des types précédents. Soit h l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ est M.
Prouver que $M^3 = \frac{1}{3}(M^2+M+I_n)$ revient à prouver que $h^3 = \frac{1}{3}(h^2+h+I)$ ou que $\forall i \in [\![1,n]\!],\ h^3(u_i) = \frac{1}{3}(h^2(u_i)+h(u_i)+u_i)$. Soit $i \in [\![1,n]\!]$. Trois cas se présentent

1°. $h(u_i) = u_{i+1}$ avec $h(u_{i+1}) = -\frac{1}{3}u_i - \frac{2}{3}u_{i+1}$

Alors $(3h^2+2h+I)(u_i) = 3(-\frac{1}{3}u_i - \frac{2}{3}u_{i+1}) + 2u_{i+1} + u_i = 0$.

$(3h^3-h^2-h-I)(u_i) = (h-I)((3h^2+2h+I)(u_i)) = (h-I)(0) = 0$, $h^3(u_i) = \frac{1}{3}(h^2(u_i)+h(u_i)+u_i)$.

2°. $h(u_i) = -\frac{1}{3}u_{i-1} - \frac{2}{3}u_i$ avec $h(u_{i-1}) = u_i$

Alors $(3h^2+2h+I)(u_i) = 3h(-\frac{1}{3}u_{i-1} - \frac{2}{3}u_i) + 2h(u_i) + u_i = -h(u_{i-1}) + u_i = 0$

De même alors $h^3(u_i) = \frac{1}{3}(h^2(u_i)+h(u_i)+u_i)$

3°. $h(u_i) = u_i$; il est alors clair que : $h^3(u_i) = \frac{1}{3}(h^2(u_i)+h(u_i)+u_i)$ ce qui achève le problème.