$p \in \mathbb{N}$

PARTIE I

Q1 • Soit t un élément de $\mathbb{R}-\{1\}$. $1+t+t^2+\cdots+t^{p+1} = \sum_{i=0}^{p+1} t^i = \frac{1-t^{p+2}}{1-t} = \frac{1}{1-t} - \frac{t^{p+2}}{1-t}$

Par conséquent : $\frac{1}{1-t} = 1+t+t^2+\cdots+t^{p+1} + \frac{t^{p+2}}{1-t}$.

• Soit k un élément de $[\![2,+\infty[\![$. Intégrons l'égalité précédente entre 0 et $1/k$

Il vient : $\int_0^{1/k} \frac{dt}{1-t} = \sum_{i=0}^{p+1} \int_0^{1/k} t^i dt + \int_0^{1/k} \frac{t^{p+2}}{1-t} dt$; $[-\ln(1-t)]_0^{1/k} = \sum_{i=0}^{p+1} \left[\frac{t^{i+1}}{i+1}\right]_0^{1/k} + \int_0^{1/k} \frac{t^{p+2}}{1-t} dt$

donc $-\ln(1-\frac{1}{k}) = \sum_{i=0}^{p+1} \frac{1}{i+1} \frac{1}{k^{i+1}} + \int_0^{1/k} \frac{t^{p+2}}{1-t} dt$

soit : $-\ln(1-\frac{1}{k}) = \frac{1}{k} + \frac{1}{2k^2} + \cdots + \frac{1}{p+2} \frac{1}{k^{p+2}} + \int_0^{1/k} \frac{t^{p+2}}{1-t} dt$

• $\forall t \in [0, \frac{1}{k}]$, $0 \leq \frac{t^{p+2}}{1-t} \leq \frac{1}{1-\frac{1}{k}} t^{p+2} \underset{k \geq 2}{\leq} \frac{1}{1-\frac{1}{2}} t^{p+2} = 2t^{p+2}$

Par intégration il vient : $0 \leq \int_0^{1/k} \frac{t^{p+2}}{1-t} dt \leq 2\int_0^{1/k} t^{p+2} dt = 2\left[\frac{t^{p+3}}{p+3}\right]_0^{1/k} = \frac{2}{p+3} \times \frac{1}{k^{p+3}}$

Posons : $\alpha(k) = k^{p+3} \int_0^{1/k} \frac{t^{p+2}}{1-t} dt$, $\int_0^{1/k} \frac{t^{p+2}}{1-t} dt = \frac{\alpha(k)}{k^{p+3}}$ donc $0 \leq \frac{\alpha(k)}{k^{p+3}} \leq \frac{2}{p+3} \frac{1}{k^{p+3}}$.

Nous avons : $-\ln(1-\frac{1}{k}) = \frac{1}{k} + \frac{1}{2k^2} + \cdots + \frac{1}{p+2} \frac{1}{k^{p+2}} + \frac{\alpha(k)}{k^{p+3}}$ avec $0 \leq \alpha(k) \leq \frac{2}{p+3}$

Q2 • $\forall k \in [\![2,+\infty[\![$, $|\gamma_k| \leq \frac{\eta}{k^{p+2}}$. La série de terme général $\frac{\eta}{k^{p+2}}$ est convergente car $p+2>1$; les règles de comparaison des séries à termes positifs prouvent que la série de terme général $|\gamma_k|$ converge. La série de terme général γ_k est alors absolument convergente donc convergente.

• $n \in \mathbb{N}$ et $m \in [\![n+1,+\infty[\![$

$\forall k \in [\![n, m-1]\!]$, $\forall t \in [k, k+1]$, $\frac{1}{(k+1)^{p+2}} \leq \frac{1}{t^{p+2}}$. Par intégration il vient alors :

$\forall k \in [\![n, m-1]\!]$, $\frac{1}{(k+1)^{p+2}} \leq \int_k^{k+1} \frac{dt}{t^{p+2}}$. Par sommation on obtient : $\sum_{k=n}^{m-1} \frac{1}{(k+1)^{p+2}} \leq \sum_{k=n}^{m-1} \int_k^{k+1} \frac{dt}{t^{p+2}}$

Donc : $\frac{1}{(n+1)^{p+2}} + \frac{1}{(n+2)^{p+2}} + \cdots + \frac{1}{m^{p+2}} \leq \int_n^m \frac{dt}{t^{p+2}}$.

• $\frac{1}{(n+1)^{p+2}} + \frac{1}{(n+2)^{p+2}} + \cdots + \frac{1}{m^{p+2}} \leq \frac{1}{p+1} \frac{1}{n^{p+1}}$ car $\int_n^m \frac{dt}{t^{p+2}} = \frac{1}{p+1}\left[\frac{1}{n^{p+1}} - \frac{1}{m^{p+1}}\right] \leq \frac{1}{p+1} \frac{1}{n^{p+1}}$.

• La série de terme général z_k est <u>absolument convergente</u> donc, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} z_k\right| \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} |z_k| \quad \left(\left|\sum_{k=n+1}^{m} z_k\right| \leq \sum_{k=n+1}^{m} |z_k| + \text{passage à la limite en } m \ldots \right)$$

Donc : $\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} z_k\right| \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} |z_k| \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{\pi}{k^{p+2}}$ (la série de terme général $\frac{\pi}{k^{p+2}}$ converge)

Nous savons que : $\frac{1}{(n+1)^{p+2}} + \frac{1}{(n+2)^{p+2}} + \cdots + \frac{1}{m^{p+2}} \leq \frac{1}{p+1} \frac{1}{n^{p+1}}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $m \in [\![n+1, +\infty[\![$

Ceci nous donne en faisant tendre m vers $+\infty$: $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^{p+2}} \leq \frac{1}{p+1} \frac{1}{n^{p+1}}$

Par conséquent : $\underline{\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} z_k\right| \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{\pi}{k^{p+2}} \leq \frac{\pi}{p+1} \frac{1}{n^{p+1}}}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

PARTIE II

Q1 <u>a)</u> Soit $n \in [\![2, +\infty[\![$, $\sum_{k=2}^{n} v_k = \sum_{k=2}^{n} \ln k - \sum_{k=2}^{n} \int_{k-1}^{k} \ln t \, dt = \ln\left(\prod_{k=1}^{n} k\right) - \int_{1}^{n} \ln t \, dt$

$$\sum_{k=2}^{n} v_k = \ln(n!) - \int_{1}^{n} \ln t \, dt.$$

Par conséquent : $\underline{\ln(n!) = \sum_{k=2}^{n} v_k + \int_{1}^{n} \ln t \, dt}$ pour $n \in [\![2, +\infty[\![$

$\int_{1}^{n} \underset{u'}{1} \cdot \underset{v}{\ln t} \, dt = [t \ln t]_1^n - \int_1^n t \times \frac{1}{t} dt = n \ln n - (n-1)$. $\underline{\int_1^n \ln t \, dt = n \ln n - n + 1}$

<u>b)</u> Soit $k \in [\![2, +\infty[\![$

$$v_k = \ln k - \int_{k-1}^{k} \ln t \, dt = \int_0^1 \ln k \, dt - \int_{k-1}^{k} \ln t \, dt = \int_0^1 \ln k \, dt - \int_1^0 \ln(k-u)(-du)$$

changement de variable dans la 2ème intégrale $\left| \begin{array}{l} u = k-t \ ; \ t = k-u \ ; \\ du = -dt \end{array} \right.$

$v_k = \int_0^1 \ln k \, dt - \int_0^1 \ln(k-u) du$

dt ou du !!

$\underline{v_k = \int_0^1 (\ln k - \ln(k-u)) du.}$

Intégrons par parties en posant $\forall u \in [0,1]$, $f(u) = u - \frac{1}{2}$ et $g(u) = \ln k - \ln(k-u)$

f et g sont de classe C^1 sur $[0,1]$ et $\forall u \in [0,1]$, $f'(u) = 1$ et $g'(u) = \frac{1}{k-u}$.

$v_k = \int_0^1 f'(u) g(u) du = [f(u)g(u)]_0^1 - \int_0^1 f(u) g'(u) du = [(u-\frac{1}{2})(\ln k - \ln(k-u))]_0^1 - \int_0^1 \frac{u - 1/2}{k-u} du$. Ceci donne

$$v_k = \frac{1}{2}\left[\ln k - \ln(k-1)\right] - \int_0^1 \frac{u-1/2}{k-u}\,du .$$

c) Soit $n \in [\![2,+\infty[\![$

$$\ln n! = \sum_{k=2}^{n} v_k + \int_1^n \ln t\,dt = \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{n}(\ln k - \ln(k-1)) - \sum_{k=2}^{n} w_k + n\ln n - n + 1$$

$$\ln n! = \frac{1}{2}(\ln n) + n\ln n - n + 1 - \sum_{k=2}^{n} w_k . \quad \ln n! = n\ln n - n + \frac{1}{2}\ln n + 1 - \sum_{k=2}^{n} w_k$$

(Q2) • Soit $k \in [\![2,+\infty[\![$. Intégrons de nouveau par parties.

$$w_k = \int_0^1 \underbrace{(u-\tfrac{1}{2})}_{f'}\ \underbrace{\frac{1}{k-u}}_{g}\,du = \underbrace{\left[\left(\frac{u^2}{2}-\frac{u}{2}\right)\frac{1}{k-u}\right]_0^1}_{=0} - \int_0^1 \left(\frac{u^2}{2}-\frac{u}{2}\right)\left(-\frac{1}{(k-u)^2}\right)du$$

$$w_k = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{u-u^2}{(k-u)^2}\,du .$$

• Soit $k \in [\![2,+\infty[\![$. $\forall u \in [0,1]$, $0 \leq u - u^2$ et $0 \leq \frac{1}{(k-u)^2} \leq \frac{1}{(k-1)^2}$

$$\forall u \in [0,1],\ 0 \leq \frac{u-u^2}{(k-u)^2} \leq \frac{u-u^2}{(k-1)^2}$$

En intégrant on obtient : $0 \leq \int_0^1 \frac{u-u^2}{(k-u)^2}du = 2w_k \leq \frac{1}{(k-1)^2}\int_0^1 (u-u^2)\,du$

$$0 \leq w_k \leq \frac{1}{2(k-1)^2}\left[\frac{u^2}{2}-\frac{u^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{2(k-1)^2}\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right] = \frac{1}{12(k-1)^2}.$$

Donc $\forall k \in [\![2,+\infty[\![,\ 0 \leq w_k \leq \frac{1}{12(k-1)^2}$.

(Q3) Soit $n \in [\![2,+\infty[\![$. $\ln n! = n\ln n - n + \frac{1}{2}\ln n + 1 - \sum_{k=2}^{n} w_k$

$$\ln n! = n\ln n - n + \frac{1}{2}\ln n + 1 - \left(\sum_{k=2}^{+\infty} w_k - \sum_{k=n+1}^{+\infty} w_k\right)$$

$$\ln n! = n\ln n - n + \frac{1}{2}\ln n + 1 - \left(1 - \frac{1}{2}\ln 2\pi\right) + \varepsilon_n$$

$$\ln n! = n\ln n - n + \frac{1}{2}\ln n + \frac{1}{2}\ln(2\pi) + \varepsilon_n$$

(Q4) $\forall k \in [\![2,+\infty[\![,\quad 0 \leq w_k \leq \frac{1}{12(k-1)^2}$. Les séries de terme général w_k et $\frac{1}{12(k-1)^2}$ sont convergentes donc : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} w_k \leq \frac{1}{12}\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{(k-1)^2} = \frac{1}{12}\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{1}{k^2}$; $\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq \varepsilon_n \leq \frac{1}{12}\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{1}{k^2}$

Si $n \in \mathbb{N}^*$ et si $m \in [\![n+1,+\infty[\![$, $\sum_{k=n+1}^{m} \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{n}$ (I Q2 avec $p=0$)

donc si $n \in \mathbb{N}^*$: $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{n}$ (passage à la limite en m)

donc si $n \in [\![2,+\infty[\![$, $\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{n-1}$

Par conséquent : $\forall n \in [\![2,+\infty[\![$, $0 \leq \varepsilon_n \leq \frac{1}{12(n-1)}$

ce qui signifie que $n\ln n - n + \frac{1}{2}\ln n + \frac{1}{2}\ln(2\pi)$ est une approximation par défaut de $\ln n!$ à $\frac{1}{12(n-1)}$ près ! médiocre, non ?

PARTIE III

(Q1) • Soit $k \in [\![2,+\infty[\![$. $\varepsilon_{k-1} - \varepsilon_k = w_k = \frac{1}{2}(\ln k - \ln(k-1)) - v_k$

$\varepsilon_{k-1} - \varepsilon_k = \frac{1}{2}(\ln k - \ln(k-1)) - \ln k + \int_{k-1}^{k} \ln t\, dt$

$\varepsilon_{k-1} - \varepsilon_k = \frac{1}{2}(\ln k - \ln(k-1)) - \ln k + [t\ln t - t]_{k-1}^{k}$

$\varepsilon_{k-1} - \varepsilon_k = \frac{1}{2}(\ln k - \ln(k-1)) - \ln k + k\ln k - (k-1)\ln(k-1) - k + k - 1$

$\varepsilon_{k-1} - \varepsilon_k = (\frac{1}{2} - 1 + k)\ln k + (-\frac{1}{2} - (k-1))\ln(k-1) - 1 = -(k-\frac{1}{2})(\ln(k-1) - \ln k) - 1 = -(k-\frac{1}{2})\ln\frac{k-1}{k} - 1$.

$$\underline{\underline{\varepsilon_{k-1} - \varepsilon_k = -(k-\tfrac{1}{2})\ln(1-\tfrac{1}{k}) - 1}}$$

<u>Remarque</u>.. On pouvait aussi écrire $\varepsilon_{k-1} - \varepsilon_k = w_k = \int_0^1 \frac{u-1/2}{k-u}\,du = \int_0^1 \frac{u-k}{k-u}\,du + \int_0^1 \frac{k-1/2}{k-u}\,du \ldots$
ou utiliser l'indication du texte !

• $-\ln(1-\frac{1}{k}) = \frac{1}{k} + \frac{1}{2k^2} + \cdots + \frac{1}{(p+2)k^{p+2}} + \frac{\alpha(k)}{k^{p+3}}$ avec $0 \leq \alpha(k) \leq \frac{2}{p+3}$.

donc $\varepsilon_{k-1} - \varepsilon_k = (k-\frac{1}{2})\sum_{i=1}^{p+2} \frac{1}{ik^i} - 1 + \frac{(k-1/2)\alpha(k)}{k^{p+3}}$; distribuons :

$\varepsilon_{k-1} - \varepsilon_k = \underbrace{\sum_{i=1}^{p+2} \frac{1}{ik^{i-1}} - 1} - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{p+2} \frac{1}{ik^i} + \frac{(k-1/2)\alpha(k)}{k^{p+3}}$; regroupons les deux premiers termes :

$\varepsilon_{k-1} - \varepsilon_k = \sum_{i=2}^{p+2} \frac{1}{ik^{i-1}} - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{p+1} \frac{1}{ik^i} - \frac{1}{2}\frac{1}{(p+2)}\frac{1}{k^{p+2}} + \frac{(k-1/2)\alpha(k)}{k^{p+3}}$

$\varepsilon_{k-1} - \varepsilon_k = \sum_{i=0}^{p} \frac{1}{(i+2)k^{i+1}} - \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{p} \frac{1}{(i+1)k^{i+1}} + \frac{\delta(k)}{k^{p+2}}$ avec $\delta(k) = -\frac{1}{2(p+2)} + \frac{(k-1/2)\alpha(k)}{k}$

$$\varepsilon_{k-1}-\varepsilon_k = \sum_{i=0}^{p}\left(\frac{1}{i+2}-\frac{1}{2}\frac{1}{i+1}\right)\frac{1}{k^{i+1}} + \frac{\delta(k)}{k^{p+2}}$$

$\forall i \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{i+2}-\frac{1}{2}\frac{1}{i+1} = \frac{2(i+1)-(i+2)}{2(i+1)(i+2)} = \frac{i}{2(i+1)(i+2)}$. Notons que cette quantité vaut 0 pour $i=0$.

Par conséquent : $\varepsilon_{k-1}-\varepsilon_k = \sum_{\underline{i=1}}^{p}\frac{i}{2(i+1)(i+2)}\frac{1}{k^{i+1}} + \frac{\delta(k)}{k^{p+2}}$

$\varepsilon_{k-1}-\varepsilon_k = \sum_{i=1}^{p}\frac{b_i}{k^{i+1}} + \frac{\delta(k)}{k^{p+2}}$ avec $b_i = \frac{i}{2(i+1)(i+2)}$ pour tout $i\in\mathbb{N}^*$ et $\delta(k) = -\frac{1}{2(p+2)} + \frac{k-1/2}{k}\alpha(k)$

Il ne reste plus qu'à montrer que : $|\delta(k)|\leq 1$.

$|\delta(k)| \leq \frac{1}{2(p+2)} + \frac{k-1/2}{k}|\alpha(k)| \underset{\alpha(k)\geq 0}{=} \frac{1}{2(p+2)} + \frac{k-1/2}{k}\alpha(k) \underset{0\leq\frac{k-1/2}{k}\leq 1 \text{ et } 0\leq\alpha(k)\leq\frac{2}{p+3}}{\leq} \frac{1}{2(p+2)} + 1\times\frac{2}{p+3} = \frac{5p+11}{2(p+2)(p+3)}$

$|\delta(k)| \leq \frac{5p+11}{2(p+2)(p+3)} = 1-\left(1-\frac{5p+11}{2(p+2)(p+3)}\right) = 1-\frac{2p^2+5p+1}{2(p+2)(p+3)} \leq 1.$

Finalement : $\underline{\varepsilon_{k-1}-\varepsilon_k = \sum_{i=1}^{p}\frac{b_i}{k^{i+1}} + \frac{\delta(k)}{k^{p+2}}}$ avec $b_i = \frac{i}{2(i+1)(i+2)}$ et $|\delta(k)|\leq 1$

(Q2) <u>Une première évaluation de ε_n.</u> Ici $p=1$.

$\varepsilon_{k-1}-\varepsilon_k = \frac{1}{12k^2} + \frac{\delta(k)}{k^3}$ avec $|\delta(k)|\leq 1$. On pose aussi $r_k = \varepsilon_k - \frac{c_1}{k}$.

<u>a)</u> Soit $k\in[2,+\infty[$. $\frac{1}{1-\frac{1}{k}} - 1 - \frac{1}{k} = \frac{k}{k-1}-\frac{k+1}{k} = \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k^2}\frac{k}{k-1}$

donc $\frac{1}{1-\frac{1}{k}} = 1+\frac{1}{k}+\frac{\beta(k)}{k^2}$ avec $\beta(k) = \frac{k}{k-1}$.

$\beta(k)\geq 0$ et $2-\beta(k) = 2-\frac{k}{k-1} = \frac{k-2}{k-1}\geq 0$ donc $0\leq\beta(k)\leq 2$.

$$\underline{\frac{1}{1-\frac{1}{k}} = 1+\frac{1}{k}+\frac{\beta(k)}{k^2} \text{ avec } 0\leq\beta(k)\leq 2.}$$

<u>b)</u> Soit $k\in[\![2,+\infty[\![$. $r_{k-1}-r_k = \varepsilon_{k-1}-\varepsilon_k - \frac{c_1}{k-1}+\frac{c_1}{k} = \frac{1}{12k^2}+\frac{\delta(k)}{k^3}+\frac{c_1}{k}\left(1-\frac{1}{1-\frac{1}{k}}\right)$

$r_{k-1}-r_k = \frac{1}{12k^2}+\frac{\delta(k)}{k^3}+\frac{c_1}{k}\left(-\frac{1}{k}-\frac{\beta(k)}{k^2}\right) = \frac{1}{12k^2}-\frac{c_1}{k^2}+\frac{\delta(k)-c_1\beta(k)}{k^3}$

Posons donc $c_1 = \frac{1}{12}$! ($|r_{k-1}-r_k|\leq 7/6k^3$ invite à faire disparaître les $1/k^2$).

Il vient alors : $|r_{k-1}-r_k| = \dfrac{|S(k) - B(k)/12|}{k^3} \le \dfrac{|S(k)|}{k^3} + \dfrac{|B(k)|}{12}\times\dfrac{1}{k^3} \le \dfrac{1}{k^3} + \dfrac{2}{12}\dfrac{1}{k^3} = \dfrac{7}{6k^3}$

Pour $c_3 = \frac{1}{12}$: $|r_{k-1}-r_k| \le \dfrac{7}{6k^3}$

■ Remarque .. $\frac{1}{12}$ est la seule valeur de c_3 permettant d'obtenir $|r_{k-1}-r_k| \le \frac{7}{6k^3}$ car si $c_3 \ne \frac{1}{12}$, $r_{k-1}-r_k \sim \frac{1}{k^2}\left(\frac{1}{12}-c_3\right)$ donc $|r_{k-1}-r_k| \sim \dfrac{|1/12-c_3|}{k^2}$ et ne peut donc pas être plus petit que $\frac{7}{6k^3}$ car on aurait alors $|r_{k-1}-r_k| = o(1/k^2)$! ■

$|r_{k-1}-r_k| \le \frac{7}{6k^3}$ pour tout $k \in [\![2,+\infty[\![$ donc $\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty}(r_{k-1}-r_k)\right| \le \dfrac{7/6}{3-1}\ \dfrac{1}{n^{3-1}}$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$

d'après I Q 2 ($z_k = r_{k-1}-r_k$, $\alpha = 7/6$ et $p = 3$)

Par conséquent : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty}(r_{k-1}-r_k)\right| \le \dfrac{7}{12n^2}$

c) $\sum_{k=n+1}^{+\infty}(r_{k-1}-r_k) = \lim_{m\to+\infty}\left[\sum_{k=n+1}^{m}(r_{k-1}-r_k)\right] = \lim_{m\to+\infty}\left[r_n - r_m\right] = r_n$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.

$\sum_{k=n+1}^{+\infty}(r_{k-1}-r_k) = r_n$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.

$\lim_{m\to+\infty} r_m = \lim_{m\to+\infty}\left(\varepsilon_m - \frac{c_1}{m}\right) = 0$.

Ceci donne alors : $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $|r_n| \le \dfrac{7}{12n^2}$.

Soit $n\in\mathbb{N}^*$. $\ln n! = n\ln n - n + \frac{1}{2}\ln n + \frac{1}{2}\ln(2\pi) + \overbrace{r_n + \frac{c_1}{n}}^{\varepsilon_n}$. Or $c_1 = \frac{1}{12}$;

$\ln n! = n\ln n - n + \frac{1}{2}\ln n + \frac{1}{2}\ln 2\pi + \dfrac{1}{12n} + \dfrac{n^2 r_n}{n^2}$. Posons $\lambda_3(n) = n^2 r_n$.

Il vient alors : $\ln n! = n\ln n - n + \frac{1}{2}\ln n + \frac{1}{2}\ln 2\pi + \dfrac{1}{12n} + \dfrac{\lambda_3(n)}{n^2}$ avec

$|\lambda_3(n)| = |n^2 r_n| \le n^2\dfrac{7}{12n^2} = \dfrac{7}{12}$

Donc $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\ln n! = n\ln n - n + \frac{1}{2}\ln n + \frac{1}{2}\ln 2\pi + \dfrac{1}{12n} + \dfrac{\lambda_3(n)}{n^2}$ avec $|\lambda_3(n)| \le \dfrac{7}{12}$

Remarque .. $n\ln n - n + \frac{1}{2}\ln n + \frac{1}{2}\ln 2\pi + \frac{1}{12n}$ est une valeur approchée de $\ln n!$ à $\frac{7}{12n^2}$ près.

C'est mieux !

(Q3) Une seconde évaluation. Ici $p=2$. $\varepsilon_{k-1}-\varepsilon_k=\frac{1}{12k^2}+\frac{1}{12k^3}+\frac{\delta(k)}{k^4}$ avec $|\delta(k)|\le 1$. $r_k=\varepsilon_k-\frac{1}{12k}-\frac{c_2}{k^2}$

a) Soit $k\in[\![2,+\infty[\![$

$$\frac{1}{1-\frac{1}{k}}-1-\frac{1}{k}-\frac{1}{k^2}=\frac{1}{k^2(k-1)}\left[k^3-k^2(k-1)-k(k-1)-(k-1)\right]=\frac{1}{k^2(k-1)}=\frac{1}{k^3}\,\frac{k}{k-1}$$

Posons $\beta_1(k)=\beta(k)=\frac{k}{k-1}$; $\underline{\frac{1}{1-\frac{1}{k}}=1+\frac{1}{k}+\frac{1}{k^2}+\frac{\beta_1(k)}{k^3}}$ avec $\underline{0\le\beta_1(k)=\beta(k)\le 2}$.

$$\frac{1}{1-\frac{1}{k}}=1+\frac{1}{k}+\frac{\beta(k)}{k^2}\ \text{avec}\ 0\le\beta(k)\le 2\ ;\quad \frac{1}{\left(1-\frac{1}{k}\right)^2}=1+\frac{1}{k^2}+\frac{(\beta(k))^2}{k^4}+\frac{2}{k}+\frac{2\beta(k)}{k^2}+\frac{2\beta(k)}{k^3}$$

$$\frac{1}{\left(1-\frac{1}{k}\right)^2}=1+\frac{2}{k}+\frac{\beta_2(k)}{k^2}\ \text{avec}\ \beta_2(k)=1+\frac{(\beta(k))^2}{k^2}+2\beta(k)+\frac{2\beta(k)}{k}$$

$$\beta_2(k)\ge 0\ \text{et}\ \beta_2(k)=1+\frac{(\beta(k))^2}{k^2}+2\beta(k)+\frac{2\beta(k)}{k}\underset{\beta(k)\le 2}{\le}1+\frac{4}{k^2}+4+\frac{4}{k}\underset{k\ge 2}{\le}1+\frac{4}{4}+4+\frac{4}{2}=8$$

Donc $\underline{\frac{1}{\left(1-\frac{1}{k}\right)^2}=1+\frac{2}{k}+\frac{\beta_2(k)}{k^2}\ \text{avec}\ 0\le\beta_2(k)\le 8}$.

b) Soit $k\in[\![2,+\infty[\![$.

$$r_{k-1}-r_k=\varepsilon_{k-1}-\varepsilon_k-\frac{1}{12(k-1)}+\frac{1}{12k}-\frac{c_2}{(k-1)^2}+\frac{c_2}{k^2}$$

$$r_{k-1}-r_k=\frac{1}{12k^2}+\frac{1}{12k^3}+\frac{\delta(k)}{k^4}-\frac{1}{12k}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{k}}\right)+\frac{1}{12k}-\frac{c_2}{k^2}\times\frac{1}{\left(1-\frac{1}{k}\right)^2}+\frac{c_2}{k^2}$$

$$r_{k-1}-r_k=\frac{1}{12k^2}+\frac{1}{12k^3}+\frac{1}{12k}-\frac{1}{12k}\left(1+\frac{1}{k}+\frac{1}{k^2}+\frac{\beta_1(k)}{k^3}\right)-\frac{c_2}{k^2}\left(1+\frac{2}{k}+\frac{\beta_2(k)}{k^2}\right)+\frac{\delta(k)}{k^4}+\frac{c_2}{k^2}$$

$$r_{k-1}-r_k=-\frac{\beta_1(k)}{12k^4}-\frac{2c_2}{k^3}-\frac{c_2\beta_2(k)}{k^4}+\frac{\delta(k)}{k^4}$$

$$\underline{r_{k-1}-r_k=-\frac{2c_2}{k^3}+\left(\delta(k)-\frac{\beta_1(k)}{12}-c_2\beta_2(k)\right)\frac{1}{k^4}}\ .$$

Posons alors $c_2=0$.

$$|r_{k-1}-r_k|\le\frac{1}{k^4}\left[|\delta(k)|+\frac{1}{12}|\beta_1(k)|+0\right]\le\frac{1}{k^4}\left[1+\frac{1}{12}\times 2\right]=\frac{7}{6k^4}$$

Donc pour $c_2 = 0$: $\underline{\forall k \in [\![2,+\infty[\![,\ |r_{k-1} - r_k| \leq \dfrac{7}{6k^4}}$

Remarque.. Ici encore 0 est la seule valeur de c_2 permettant d'obtenir la majoration proposée.

c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$

$$\ln n! = n\ln n - n + \frac{1}{2}\ln(2\pi) + \frac{1}{12n} + \frac{0}{n^2} + r_n$$

Comme dans la question précédente

1°. $r_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} (r_{k-1} - r_k)$

2°. $|r_n| = \left|\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} (r_{k-1} - r_k)\right| \leq \dfrac{7/6}{2+1}\ \dfrac{1}{n^{2+1}}$ d'après I Q 2 avec

$\delta_k = r_{k-1} - r_k$, $M = \frac{7}{6}$ et $p = 2$. Par conséquent : $|r_n| \leq \dfrac{7}{18n^3}$.

Donc $\ln n! = n\ln n - n + \dfrac{1}{2}\ln 2\pi + \dfrac{1}{12n} + \dfrac{n^3 r_n}{n^3}$. Posons $\lambda_2(n) = n^3 r_n$; on

obtient alors : $\underline{\ln n! = n\ln n - n + \dfrac{1}{2}\ln 2\pi + \dfrac{1}{12n} + \dfrac{\lambda_2(n)}{n^3} \text{ avec } |\lambda_2(n)| \leq \dfrac{7}{18}}$.

Remarque.. $\ln n - n + \frac{1}{2}\ln 2\pi + \frac{1}{12n}$ est maintenant une valeur approchée à $\frac{7}{18n^3}$ près de $\ln(n!)$. C'est encore mieux mais vous n'avez pas tout vu.

(Q4) Etude d'un système auxiliaire..

$\forall i \in [\![1,p]\!]$, $a_{ii} = C_i^{i-1} = C_i^1 = i \neq 0$.

A est une matrice triangulaire inférieure dont les éléments de la diagonale sont non nuls. A est inversible donc $\exists! X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$, $AX = B$. Le système admet donc une solution et une seule ... que nous noterons $(c_1, c_2, \dots, c_p)$.

(Q5) Evaluation asymptotique de ε_n. ($p \in \mathbb{N}^*$)

a) Une récurrence simple montre que pour tout $i \in \mathbb{N}$, $h : t \mapsto \dfrac{1}{(1-t)^q}$ est i fois dérivable sur $\mathbb{R} - \{1\}$ et $\forall t \in \mathbb{R} - \{1\}$, $h^{(i)}(t) = \dfrac{q(q+1)\cdots(q+i-1)}{(1-t)^{q+i}} = \dfrac{i!\ C_{q+i-1}^{i}}{(1-t)^{q+i}}$

h est donc de classe C^∞ sur $\mathbb{R} - \{1\}$.

Appliquons à h la formule de Taylor avec reste intégral sur l'intervalle $[0, \frac{1}{k}]$ ($k \in [\![2,+\infty[\![$) à l'ordre $p-q+1$ ($q \in [\![1,p]\!]$)

$$h(1/k) = \sum_{i=0}^{p-q+1} \frac{(1/k-0)^i}{i!} h^{(i)}(0) + \int_0^{1/k} \frac{(1/k-t)^{p-q+1}}{(p-q+1)!} h^{(p-q+2)}(t)\,dt$$

$$\frac{1}{(1-1/k)^q} = \sum_{i=0}^{p-q+1} \frac{1}{i!}\frac{1}{k^i}\frac{i!\,C_{q+i-1}^{i}}{(1-0)^{q+i}} + \int_0^{1/k} \frac{1}{(p-q+1)!}\left(\frac{1}{k}-t\right)^{p-q+1}(p-q+2)!\,C_{q+p-q+2-1}^{p-q+2}\frac{dt}{(1-t)^{q+p-q+2}}$$

$$\frac{1}{(1-\frac{1}{k})^q} = \sum_{i=0}^{p-q+1} C_{q+i-1}^{i}\frac{1}{k^i} + \underbrace{(p-q+2)\,C_{p+1}^{p-q+2}}\int_0^{1/k}\frac{(\frac{1}{k}-t)^{p-q+1}}{(1-t)^{p+2}}\,dt$$

$$(p-q+2)\frac{(p+1)(p)(p-1)\cdots(p+1-(p-q+2)+1)}{(p-q+2)!} = \frac{(p+1)(p)(p-1)\cdots(q)}{(p-q+1)!}$$

Finalement pour $q\in [\![1,p]\!]$ et $k\in [\![2,+\infty[\![$:

$$\boxed{\frac{1}{(1-\frac{1}{k})^q} = 1 + C_q^1\frac{1}{k} + C_{q+1}^2\frac{1}{k^2} + \cdots + C_p^{p-q+1}\frac{1}{k^{p-q+1}} + \frac{q(q+1)\cdots(p+1)}{(p-q+1)!}\int_0^{1/k}\frac{(1/k-t)^{p-q+1}}{(1-t)^{p+2}}\,dt}$$

$k\in [\![2,+\infty[\![$ et $q\in[\![1,p]\!]$

$$\forall t\in\left[0,\frac{1}{k}\right],\quad 0 \le \frac{(1/k-t)^{p-q+1}}{(1-t)^{p+2}} \underset{\uparrow}{\le} \frac{1}{(1-\frac{1}{k})^{p+2}}\left(\frac{1}{k}-t\right)^{p-q+1} = \left(\frac{k}{k-1}\right)^{p+2}\left(\frac{1}{k}-t\right)^{p-q+1}$$

$1-t\geq 1-\frac{1}{k}>0$ et $\frac{1}{k}-t\geq 0$

En intégrant il vient : $0\le \int_0^{1/k}\frac{(1/k-t)^{p-q+1}}{(1-t)^{p+2}}\,dt \le \left(\frac{k}{k-1}\right)^{p+2}\int_0^{1/k}\left(\frac{1}{k}-t\right)^{p-q+1}dt$

En posant $u=\frac{1}{k}-t$ il vient $\int_0^{1/k}\left(\frac{1}{k}-t\right)^{p-q+1}dt = \int_{1/k}^{0} u^{p-q+1}(-du) = \int_0^{1/k} u^{p-q+1}\,du$

Finalement : $0\le \int_0^{1/k}\frac{(1/k-t)^{p-q+1}}{(1-t)^{p+2}}\,dt \le \left(\frac{k}{k-1}\right)^{p+2}\int_0^{1/k} u^{p-q+1}\,du$

Posons $\beta_q(k) = k^{p-q+2}\times\dfrac{q(q+1)\cdots(p+1)}{(p-q+1)!}\displaystyle\int_0^{1/k}\frac{(1/k-t)^{p-q+1}}{(1-t)^{p+2}}\,dt$

En particulier : $\dfrac{1}{(1-\frac{1}{k})^q} = 1 + C_q^1\dfrac{1}{k} + C_{q+1}^2\dfrac{1}{k^2}+\cdots+C_p^{p-q+1}\dfrac{1}{k^{p-q+1}} + \dfrac{\beta_q(k)}{k^{p-q+2}}$

$$0\le \beta_q(k) = k^{p-q+2}\underbrace{\frac{q(q+1)\cdots(p+1)}{(p-q+1)!}}\int_0^{1/k}\frac{(1/k-t)^{p-q+1}}{(1-t)^{p+2}}\,dt \le k^{p-q+2}\underbrace{C_{p+1}^{q-1}\times(p-q+2)}\times\left(\frac{k}{k-1}\right)^{p+2}\int_0^{1/k}u^{p-q+1}\,du$$

$$0\le\beta_q(k)\le k^{p-q+2}\left(\frac{k}{k-1}\right)^{p+2}C_{p+1}^{q-1}(p-q+2)\left[\frac{u^{p-q+2}}{p-q+2}\right]_0^{1/k} = C_{p+1}^{q-1}k^{p-q+2}\left(\frac{k}{k-1}\right)^{p+2}\left(\frac{1}{k}\right)^{p-q+2} = C_{p+1}^{q-1}\left(\frac{k}{k-1}\right)^{p+2}$$

Or $0 \leq \frac{k}{k-1} \leq 2$ car $k \geq 2$ donc $0 \leq \beta_q(k) \leq C_{p+1}^{q-1} 2^{p+2}$.

Finalement : $\forall k \in [\![2,+\infty[\![$, $\frac{1}{(1-\frac{1}{k})^q} = 1 + C_q^1 \frac{1}{k} + C_{q+1}^2 \frac{1}{k^2} + \cdots + C_p^{p-q+1} \frac{1}{k^{p-q+1}} + \frac{\beta_q(k)}{k^{p-q+2}}$

avec $0 \leq \beta_q(k) \leq C_{p+1}^{q-1} 2^{p+2}$.

b) Soit $k \in [\![2,+\infty[\![$

$$\sum_{q=1}^{p} \frac{c_q}{(k-1)^q} - \sum_{q=1}^{p} \frac{c_q}{k^q} = \sum_{q=1}^{p} \frac{c_q}{k^q}\left[\frac{1}{(1-\frac{1}{k})^q} - 1\right] = \sum_{q=1}^{p} \frac{c_q}{k^q}\left[\sum_{j=1}^{p-q+1} C_{q+j-1}^{j} \frac{1}{k^j} + \frac{\beta_q(k)}{k^{p-q+2}}\right]$$

$$= \sum_{q=1}^{p} \sum_{j=1}^{p-q+1} c_q C_{q+j-1}^{j} \frac{1}{k^{j+q}} + \sum_{q=1}^{p} \frac{c_q \beta_q(k)}{k^{p+2}}.$$

$$\underset{i=j+q-1}{=} \sum_{q=1}^{p} \sum_{i=q}^{p} c_q C_i^{i-q+1} \frac{1}{k^{i+1}} + \left(\sum_{q=1}^{p} c_q \beta_q(k)\right) \frac{1}{k^{p+2}}$$

$$\underset{\text{interversion des deux } \Sigma}{=} \sum_{i=1}^{p} \sum_{q=1}^{i} c_q C_i^{i-q+1} \frac{1}{k^{i+1}} + \left(\sum_{q=1}^{p} c_q \beta_q(k)\right) \frac{1}{k^{p+2}}$$

Notons que pour $i \in [\![1,p]\!]$ et $q \in [\![1,i]\!]$, $C_i^{i-q+1} = C_i^{q-1} = a_{iq}$

Par conséquent :

$$\sum_{q=1}^{p} \frac{c_q}{(k-1)^q} - \sum_{q=1}^{p} \frac{c_q}{k^q} = \sum_{i=1}^{p} \underbrace{\left(\sum_{q=1}^{i} a_{iq} c_q\right)}_{y_i} \frac{1}{k^{i+1}} + \left[\sum_{q=1}^{p} c_q \beta_q(k)\right] \frac{1}{k^{p+2}}$$

Donc

$$\sum_{q=1}^{p} \frac{c_q}{(k-1)^q} - \sum_{q=1}^{p} \frac{c_q}{k^q} = \sum_{i=1}^{p} \frac{y_i}{k^{i+1}} + \left[\sum_{q=1}^{p} c_q \beta_q(k)\right] \frac{1}{k^{p+2}} \text{ pour } k \in [\![2,+\infty[\![.$$

c) Soit $k \in [\![2,+\infty[\![$.

$$|r_{k-1} - r_k| = \left|\varepsilon_{k-1} - \varepsilon_k - \sum_{q=1}^{p} \frac{c_q}{(k-1)^q} + \sum_{q=1}^{p} \frac{c_q}{k^q}\right| = \left|\sum_{i=1}^{p} \frac{b_i}{k^{i+1}} + \frac{S(k)}{k^{p+2}} - \sum_{i=1}^{p} \frac{y_i}{k^{i+1}} - \sum_{q=1}^{p} c_q \beta_q(k) \frac{1}{k^{p+2}}\right| \underset{b_i = \sum_{j=1}^{i} a_{ij} c_j = y_i}{=} \frac{1}{k^{p+2}} \left|S(k) - \sum_{q=1}^{p} c_q \beta_q(k)\right| \underset{\substack{|S(k)| \leq 1 \\ |c_q| \leq m_p}}{\leq} \frac{1}{k^{p+2}} \left[1 + m_p \sum_{q=1}^{p} |\beta_q(k)|\right]$$

donc $|r_{k-1}-r_k| \leq \frac{1}{k^{p+2}}\left[1+m_p\sum_{q=1}^{p}|\beta_q(k)|\right] \leq \frac{1}{k^{p+2}}\left[1+m_p\sum_{q=1}^{p}C_{p+1}^{q-1}\,2^{p+2}\right]$

$$\sum_{q=1}^{p}C_{p+1}^{q-1}=\sum_{q=0}^{p-1}C_{p+1}^{q}\leq\sum_{q=0}^{p+1}C_{p+1}^{q}=2^{p+1}$$

donc $|r_{k-1}-r_k| \leq \frac{1}{k^{p+2}}\left[1+m_p\times 2^{p+1}\times 2^{p+2}\right]=\frac{1}{k^{p+2}}\left[1+2^{2p+3}m_p\right]=\frac{M_p}{k^{p+2}}$

Donc $\forall k\in[\![2,+\infty[\![,\ |r_{k-1}-r_k|\leq\frac{M_p}{k^{p+2}}$ avec $M_p=1+2^{2p+3}m_p$.

d) Ici encore :

1°.. $r_n=\sum_{k=n+1}^{+\infty}(r_{k-1}-r_k)$

2°.. $|r_n|=\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty}(r_{k-1}-r_k)\right|\leq\frac{M_p}{p+1}\,\frac{1}{n^{p+1}}$ d'après I g 2 avec

$u_k=r_{k-1}-r_k$ et $M=M_p$.

Donc $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ |r_n|\leq\frac{M_p}{p+1}\times\frac{1}{n^{p+1}}$.

Soit $n\in\mathbb{N}^*$. $\ln(n!)=n\ln n-n+\frac12\ln n+\frac12\ln(2\pi)+r_n+\sum_{q=1}^{p}\frac{c_q}{n^q}$

Posons $\lambda_p(n)=r_n\,n^{p+1}$; $|\lambda_p(n)|\leq\frac{M_p}{p+1}$.

$\ln(n!)=n\ln n-n+\frac12\ln n+\frac12\ln 2\pi+\sum_{q=1}^{p}\frac{c_q}{n^q}+\frac{\lambda_p(n)}{n^{p+1}}$ avec $|\lambda_p(n)|\leq\frac{M_p}{p+1}$.

Remarques 1.. $n\ln n-n+\frac12\ln n+\frac12\ln 2\pi-\sum_{q=1}^{p}\frac{c_q}{n^q}$ est une valeur approchée de $\ln n!$ à $\frac{M_p}{p+1}\times\frac{1}{n^{p+1}}$ près.

2.. les 3 premières lignes du système de g 4 donnent :
$$\begin{cases}c_1=b_1=1/12\\ c_1+2c_2=b_2=1/12\\ c_1+3c_2+3c_3=b_3=3/40\end{cases}$$

donc $c_1=\frac{1}{12}$, $c_2=0$ (et c'est heureux !) et $c_3=-\frac{1}{360}$

3.. Les initiés diront avec moi que : $\forall k\in\mathbb{N}^*,\ c_k=\frac{1}{k(k+1)}b_{k+1}$ où $(b_n)_{n\geq0}$ est la suite (classique) des nombres de Bernoulli.

Donnez p. p=10

1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	2	0	0	0	0	0	0	0	0
1	3	3	0	0	0	0	0	0	0
1	4	6	4	0	0	0	0	0	0
1	5	10	10	5	0	0	0	0	0
1	6	15	20	15	6	0	0	0	0
1	7	21	35	35	21	7	0	0	0
1	8	28	56	70	56	28	8	0	0
1	9	36	84	126	126	84	36	9	0
1	10	45	120	210	252	210	120	45	10

```
c1= 8.3333333333E-02
c2= 0.0000000000E+00
c3=-2.7777777778E-03
c4=-2.8421709430E-14
c5= 7.9365079370E-04
c6=-3.7895612574E-14
c7=-5.9523809523E-04
c8= 1.4210854715E-14
c9= 8.4175084174E-04
c10=-5.6843418861E-15

Press any key to return to Turbo Pascal
```

En fait $c_1 = \frac{1}{12}$; $\forall k \in [\![1,10[\![$, $c_{2k} = 0$!!

$$c_3 = -\frac{1}{360}$$

$$c_5 = \frac{1}{1260}$$

$$c_7 = -\frac{1}{1680}$$

$$c_9 = \frac{1}{1188}$$

$$c_{11} = -\frac{691}{360360}$$

$$c_{13} = \frac{1}{156}$$

$$c_{15} = -\frac{3617}{122400} \quad \dots \quad c_{27} = -\frac{9349 \times 362903}{23490} \quad \dots$$

j'ai ↑

je n'ai plus !

```
Program hec94M1;

uses crt;
const max=50;
type vecteur = array[1..max] of real;
     matrice = array[1..max,1..max] of integer;
var b,c:vecteur;a : matrice;i,j,p:integer;

procedure secondMembre(var b : vecteur);
var i: integer;
begin
for i:=1 to p do b[i]:=i/2/(i+1)/(i+2)
end;

procedure Coefficients(var a:matrice);
var i,j:integer;
begin
a[1,1]:=1;
For j:=2 to p do a[1,j]:=0;
for i:=2 to p do begin
   a[i,1]:=1;
   for j:=2 to i-1 do a[i,j]:=a[i-1,j-1]+a[i-1,j];
   a[i,i]:=i;
   for j:=i+1 to p do a[i,j]:=0
end;
end;

procedure Approximation(a:matrice;b : vecteur;var c:vecteur);

var i,j:integer;s:real;
begin
c[1]:=b[1]/a[1,1];
for i:=2 to p do
begin
s:=0;
for j:=1 to i-1 do s:=s+a[i,j]*c[j];
c[i]:=(b[i]-s)/a[i,i];
end;
end;
begin
clrscr;
write('Donnez p. p=');readln(p);
writeln;
Coefficients(a);
SecondMembre(b);
Approximation(a,b,c);
for i:=1 to p do
begin
for j:=1 to p do write (a[i,j]:5);
writeln;
end;
writeln;
for i:=1 to p do
writeln('c',i,'=',c[i])
end.
```

```
c5= 7.9365079370E-04
c6=-3.7895612574E-14
c7=-5.9523809523E-04
c8= 1.4210854715E-14
c9= 8.4175084174E-04
c10=-5.6843418861E-15
c11=-1.9175269176E-03
c12= 3.2211270688E-13
c13= 6.4102564098E-03
c14=-4.9128954873E-13
c15=-2.9550653593E-02
c16= 4.3947068207E-12
c17= 1.7964437235E-01
c18=-2.2415254837E-11
c19=-1.3924322166E+00
c20=-4.6465373771E-10
c21= 1.3402864044E+01
c22= 1.7399408782E-09
c23=-1.5684828462E+02
c24= 2.2894295644E-08
c25= 2.1931033332E+03
c26=-1.0751639715E-07
c27=-3.6108771250E+04
c28=-6.2112542025E-06
Press any key to return to Turbo Pascal
```