CHAMBRE DE COMMERCE ET D'INDUSTRIE DE PARIS
DIRECTION DE L'ENSEIGNEMENT
Direction des Admissions et Concours

École des Hautes Études Commerciales

CONCOURS D'ADMISSION DE 1993

Mathématiques I

OPTION GÉNÉRALE

jeudi 20 mai 1993, de 14 h à 18 h

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Sont autorisées:

–. Règles graduées.
–. Calculatrices de poche, y compris les calculatrices programmables et alphanumériques, à fonctionnement autonome, sans imprimante, sans document d'accompagnement et de format maximum 21 cm de long x 15 cm de large.

Les trois parties du problème sont indépendantes.

On désigne par K le corps $\mathbf{R}$ des nombres réels ou le corps $\mathbf{C}$ des nombres complexes.

Dans tout le problème, on considère l'espace vectoriel K^n (où $n \geq 2$) rapporté à sa base canonique, notée $B = (e_1, e_2,..., e_n)$. On note v_1 le vecteur de K^n dont les composantes dans la base B sont toutes égales à 1.

On rappelle que l'espace vectoriel K^n est somme directe de deux sous-espaces vectoriels F et G, ce qu'on note $K^n = F \oplus G$, si tout vecteur x de K^n peut s'écrire d'une manière et d'une seule sous la forme $x = y + z$, où y appartient à F et z appartient à G. L'application $p : x \mapsto y$ est alors un endomorphisme de K^n, appelé projecteur sur F de direction G.

Enfin, l'application identique de K^n est notée Id.

On se propose d'étudier l'ensemble S_n des matrices stochastiques d'ordre n, c'est-à-dire des éléments $M = (m_{ij})$ de $\mathbf{M}_n(K)$ dont les coefficients sont réels positifs ou nuls et tels que, pour tout nombre entier i appartenant à $[1, n]$:

$$m_{i1} + m_{i2} + \cdots + m_{in} = 1$$

(Ces matrices jouent un rôle important, notamment en calcul des probabilités.)

PARTIE I : ***un premier exemple***

On considère des nombres réels a et b appartenant à l'intervalle $]0, 1[$ et tels que $a + b = 1$. Soit f l'endomorphisme de $\mathbf{R}^3$ dont la matrice dans la base B est la matrice stochastique :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b & a & 0 \\ 0 & b & a \end{pmatrix}$$

1. *a*) Déterminer à quelle condition un vecteur $v = (x, y, z)$ appartient au noyau de $f - \mathrm{Id}$; expliciter une base de ce sous-espace vectoriel.

b) Montrer que (e_2, e_3) est une base de l'image de $f - \mathrm{Id}$.

c) Établir que $\mathbf{R}^3 = \mathrm{Ker}\,(f - \mathrm{Id}) \oplus \mathrm{Im}\,(f - \mathrm{Id})$.

d) Soit p le projecteur sur le sous-espace vectoriel $\mathrm{Ker}\,(f - \mathrm{Id})$ de direction $\mathrm{Im}\,(f - \mathrm{Id})$. Déterminer $p\,(v_1)$, puis $p\,(e_3)$, $p\,(e_2)$ et $p\,(e_1)$. Expliciter la matrice P associée à p dans la base B.

2. Déterminer les valeurs propres de f et les sous-espaces propres associés. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

3. On considère la base $B' = (v_1, e_2, e_3)$ de $\mathbf{R}^3$.

a) Déterminer la matrice M' associée à f dans la base B'.

b) Pour tout nombre entier naturel non nul k, calculer par récurrence M'^k.

c) Déterminer la matrice de passage C de la base B à la base B'. Calculer son inverse.

d) Déduire de ces résultats l'expression de la matrice M^k, ainsi que sa limite lorsque k tend vers $+\infty$ (c'est-à-dire la matrice dont les coefficients sont les limites des coefficients de M^k). Comparer cette limite à la matrice P obtenue dans la question **1**.

PARTIE II : ***un second exemple***

Dans cette partie, on suppose que $n \geq 3$. On considère l'endomorphisme f de $\mathbf{R}^n$ dont la matrice dans la base B est la matrice stochastique :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{n-1} & \cdots & \frac{1}{n-1} \\ \frac{1}{n-1} & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \frac{1}{n-1} \\ \frac{1}{n-1} & \cdots & \frac{1}{n-1} & 0 \end{pmatrix}.$$

1. *a*) Déterminer une base du noyau de $f - \mathrm{Id}$.

b) Montrer que $(e_1 - e_2, e_1 - e_3, \ldots, e_1 - e_n)$ est une famille libre d'éléments de l'image de $f - \mathrm{Id}$, puis établir que c'en est une base.

c) Établir que $\mathbf{R}^n = \mathrm{Ker}\,(f - \mathrm{Id}) \oplus \mathrm{Im}\,(f - \mathrm{Id})$.

d) Soit p le projecteur sur le sous-espace vectoriel $\mathrm{Ker}\,(f - \mathrm{Id})$ de direction $\mathrm{Im}\,(f - \mathrm{Id})$. Déterminer $p\,(v_1)$, puis $p\,(e_1), p\,(e_2), \ldots, p\,(e_n)$. Expliciter la matrice P associée à p dans la base B.

e) Soit q le projecteur sur le sous-espace vectoriel $\mathrm{Im}\,(f - \mathrm{Id})$ de direction $\mathrm{Ker}\,(f - \mathrm{Id})$. Établir que $p + q = \mathrm{Id}$, et que $p \circ q = q \circ p = 0$. Expliciter la matrice Q associée à q dans la base B.

2. Déterminer les valeurs propres de f et les sous-espaces propres associés. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

3. Exprimer M comme combinaison linéaire de P et Q. En déduire l'expression de la matrice M^k, ainsi que sa limite lorsque k tend vers $+\infty$ en fonction des matrices P et Q. Exprimer de même l'inverse de M en fonction de P et Q.

PARTIE III : ***étude du cas général***

1. Soit V_1 la matrice colonne d'ordre n dont les coefficients sont tous égaux à 1.

a) Montrer qu'une matrice M de $\mathbf{M}_n(\mathbf{C})$ à coefficients réels positifs ou nuls est stochastique si et seulement si $MV_1 = V_1$.

b) En déduire que, pour tout couple (A, B) d'éléments de S_n, le produit AB appartient encore à S_n, de même que les puissances positives de A et B.

2. Soient E un espace vectoriel de dimension n sur K et u un endomorphisme de E dont le noyau n'est pas réduit au vecteur nul.

Soit $(e_1, e_2, \ldots, e_r)$ une base de $\mathrm{Ker}\,(u)$, que l'on complète en une base $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ de E. Établir que $(u(e_{r+1}), u(e_{r+2}), \ldots, u(e_n))$ est une base de $\mathrm{Im}\,(u)$. En déduire que :

$$\dim \mathrm{Im}\,(u) + \dim \mathrm{Ker}\,(u) = n$$

Dans la suite, on désigne par f un endomorphisme de $\mathbf{C}^n$ dont la matrice $M = (m_{ij})$ dans la base B est stochastique. Pour tout vecteur $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de $\mathbf{C}^n$, on convient de noter :

$$\|x\| = \max\,(|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|)$$

On remarquera que, pour tout couple (x, x') d'éléments de $\mathbf{C}^n$, $\|x + x'\| \leq \|x\| + \|x'\|$.

3. *a*) Établir que, pour tout élément x de $\mathbf{C}^n$, $\|f(x)\| \leq \|x\|$.

b) En déduire que les modules de toutes les valeurs propres de f sont inférieurs ou égaux à 1. Montrer que 1 est valeur propre de f.

4. *a*) Soit y un élément de $\mathrm{Im}\,(f - \mathrm{Id}) \cap \mathrm{Ker}\,(f - \mathrm{Id})$, écrit sous la forme $f(x) - x$. Pour tout nombre entier naturel non nul k, exprimer $f^k(x)$ en fonction de k, x et y.

Déduire du **3.** *a*) que $k\,|y| \leq 2|x|$, puis prouver que y est nul.

b) Déduire des questions précédentes que $\mathrm{Ker}\,(f - \mathrm{Id}) \oplus \mathrm{Im}\,(f - \mathrm{Id}) = \mathbf{C}^n$.

c) Montrer que, pour tout élément x de $\mathrm{Im}\,(f - \mathrm{Id})$, $f(x)$ appartient à $\mathrm{Im}\,(f - \mathrm{Id})$.

Établir que tout sous-espace propre de f associé à une valeur propre autre que 1 est inclus dans $\mathrm{Im}\,(f - \mathrm{Id})$.

On suppose désormais que l'endomorphisme f est diagonalisable.

5. *a*) Montrer que la somme directe des sous-espaces propres associés aux valeurs propres de f autres que 1 est égale à $\mathrm{Im}\,(f - \mathrm{Id})$.

b) On complète une base $(v_1, v_2, \ldots, v_p)$ de $\mathrm{Ker}\,(f - \mathrm{Id})$ en une base $B' = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ de vecteurs propres de f. On note $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ les valeurs propres de f rangées par modules décroissants ($1 = |\lambda_1| = \ldots = |\lambda_r| > |\lambda_{r+1}| \geq \ldots \geq |\lambda_n|$), associées à ces vecteurs propres $v_1, v_2, \ldots, v_n$. Soit D la matrice associée à f dans la base B'.

Prouver que la suite (M^k) converge si et seulement si la suite (D^k) converge.

c) En déduite que la suite (M^k) converge si et seulement si 1 est la seule valeur propre de M de module 1.

d) Dans ces conditions, montrer que la limite de la suite (M^k) est la matrice associée dans la base B au projecteur sur $\mathrm{Ker}\,(f - \mathrm{Id})$ de direction $\mathrm{Im}\,(f - \mathrm{Id})$.

Que permet de préciser le résultat établi dans la partie I ?

PARTIE I : un premier exemple.

Q1.. a) $v=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$.

$$v\in \mathrm{Ker}(f-\mathrm{Id}) \Leftrightarrow f(v)=v \Leftrightarrow \begin{bmatrix}1&0&0\\ b&a&0\\ 0&b&a\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases}x=x\\ bx+ay=y\\ by+az=z\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}bx+(a-1)y=0\\ by+(a-1)z=0\end{cases}$$

$$v\in \mathrm{Ker}(f-\mathrm{Id}) \underset{a-1=-b}{\Leftrightarrow} \begin{cases}bx-by=0\\ by-bz=0\end{cases} \underset{b\neq 0}{\Leftrightarrow} x=y=z$$

Par conséquent $\mathrm{Ker}(f-\mathrm{Id})=\mathrm{Vect}((1,1,1))=\mathrm{Vect}(e_1+e_2+e_3)=\mathrm{Vect}(v_1)$, (v_1) est donc une base de $\mathrm{Ker}(f-\mathrm{Id})$.

b) $\mathrm{Im}(f-\mathrm{Id})=\mathrm{Vect}((f-\mathrm{Id})(e_1),(f-\mathrm{Id})(e_2),(f-\mathrm{Id})(e_3))=\mathrm{Vect}(e_1+be_2-e_1,\ ae_2+be_3-e_2,\ ae_3-e_3)$

$$\mathrm{Im}(f-\mathrm{Id})=\mathrm{Vect}(be_2,(a-1)e_2+be_3,(a-1)e_3)\underset{b\neq 0 \text{ et } a\neq 1}{=}\mathrm{Vect}(e_2,(a-1)e_2+be_3,e_3)=\mathrm{Vect}(e_2,e_3).$$

(e_2,e_3) est une famille génératrice de $\mathrm{Im}(f-\mathrm{Id})$; de plus cette famille est libre comme sous-famille d'une famille libre.

Par conséquent (e_2,e_3) est une base de $\mathrm{Im}(f-\mathrm{Id})$.

c) Pour montrer que $\mathbb{R}^3=\mathrm{Ker}(f-\mathrm{Id})\oplus\mathrm{Im}(f-\mathrm{Id})$, il suffit de prouver que :

- $\mathrm{Ker}(f-\mathrm{Id})\cap\mathrm{Im}(f-\mathrm{Id})=\{0\}$
- $\dim \mathrm{Ker}(f-\mathrm{Id})+\dim(\mathrm{Im}(f-\mathrm{Id}))=\dim\mathbb{R}^3$

Notons que cette dernière assertion est claire car $\dim(\mathrm{Ker}(f-\mathrm{Id}))=1$, $\dim(\mathrm{Im}(f-\mathrm{Id}))=2$ et $\dim\mathbb{R}^3=3$. Montrons la première égalité.

Soit $v=(x,y,z)\in\mathrm{Ker}(f-\mathrm{Id})\cap\mathrm{Im}(f-\mathrm{Id})$.

$x=y=z$ et $\exists(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$, $v=(x,y,z)=xe_1+ye_2+ze_3=\alpha e_2+\beta e_3$

Donc $x=0$, $y=\alpha$ et $z=\beta$; soit $x=y=z=0$; $v=0$

0 est bien le seul élément de $\mathrm{Ker}(f-\mathrm{Id})\cap\mathrm{Im}(f-\mathrm{Id})$.

Donc $\mathbb{R}^3=\mathrm{Ker}(f-\mathrm{Id})\oplus\mathrm{Im}(f-\mathrm{Id})$.

d) $p(v_1)=v_1$ car $v_1\in\mathrm{Ker}(f-\mathrm{Id})$

$p(e_2)=p(e_3)=0$ car e_2 et e_3 sont dans $\mathrm{Im}(f-\mathrm{Id})$.

$e_1+e_2+e_3=v_1=p(v_1)=p(e_1+e_2+e_3)=p(e_1)+p(e_2)+p(e_3)=p(e_1)$.

Donc $p(e_1)=e_1+e_2+e_3$, $p(e_2)=p(e_3)=0$.

$$P = M_B(p) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Q2.. La matrice de f dans la base B est triangulaire ; les éléments de sa diagonale sont 1, a et a. Par conséquent le spectre de f est $\{1, a\}$.

Le sous-espace propre associé à la valeur propre 1 est $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id})$, soit : $\mathrm{vect}(v_1)$

Soit $v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

$$f(v) = av \Leftrightarrow \begin{cases} x = ax \\ bx + ay = ay \\ by + az = az \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (1-a)x = 0 \\ bx = 0 \\ by = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = 0 \quad (b \neq 0)$$

$\mathrm{Ker}(f - a\mathrm{Id}) = \mathrm{Vect}(e_3)$; le sous-espace propre associé à la valeur propre a est $\mathrm{vect}(e_3)$.

f n'est pas diagonalisable car la somme des dimensions de ses sous-espaces propres est 2 et non 3

Q3.. a) $f(v_1) = v_1$; $f(e_2) = ae_2 + be_3$; $f(e_3) = ae_3$.

$$M' = M_{B'}(f) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & b & a \end{bmatrix}$$

b) $$M'^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & b & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & b & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 & 0 \\ 0 & 2ab & a^2 \end{bmatrix}$$

$$M'^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 & 0 \\ 0 & 2ab & a^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & b & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a^3 & 0 \\ 0 & 3a^2b & a^3 \end{bmatrix}$$

Montrons par récurrence que : $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $M'^k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a^k & 0 \\ 0 & ka^{k-1}b & a^k \end{bmatrix}$

- C'est clair pour $k = 1$
- Supposons l'égalité vraie pour $k \in \mathbb{N}^*$ et montrons la pour $k+1$.

$$M'^{k+1} = M'^k M' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a^k & 0 \\ 0 & ka^{k-1}b & a^k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & b & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a^{k+1} & 0 \\ 0 & (k+1)a^k b & a^{k+1} \end{bmatrix}.$$ Ceci achève la récurrence.

Finalement : $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $M'^k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a^k & 0 \\ 0 & ka^{k-1}b & a^k \end{bmatrix}$ ... formule qui vaut encore pour $k = 0$ $(a \neq 0 !)$

c) $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ car $v_1 = e_1 + e_2 + e_3$, $e_2 = e_2$ et $e_3 = e_3$!

On a encore $e_1 = v_1 - e_2 - e_3$, $e_2 = e_2$ et $e_3 = e_3$. C^{-1} qui est la matrice de passage de B' à B vaut donc $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

$$C^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

d) $\Pi' = C^{-1}\Pi C$ donc $\Pi = C\Pi' C^{-1}$.

Une récurrence simple donne alors : $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\Pi^k = C\,\Pi'^k\,C^{-1}$

donc $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\Pi^k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a^k & 0 \\ 0 & ka^{k-1}b & a^k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & a^k & 0 \\ 1 & ka^{k-1}b & a^k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \ \Pi^k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1-a^k & a^k & 0 \\ 1-ka^{k-1}b-a^k & ka^{k-1}b & a^k \end{bmatrix}.$$

$|a|<1$ donc $\lim\limits_{k\to+\infty} a^k = \lim\limits_{k\to+\infty}(ka^{k-1}) = 0$

Par conséquent : $\lim\limits_{k\to+\infty} \Pi^k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = L$

PARTIE II : un second exemple.

Q1 a) Soit $v = (x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1e_1 + x_2e_2 + \dots + x_ne_n \in \mathbb{R}^n$.

$v \in \mathrm{Ker}(f-\mathrm{Id}) \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{n-1} & \cdots & \frac{1}{n-1} \\ \frac{1}{n-1} & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \frac{1}{n-1} \\ \frac{1}{n-1} & \cdots & \frac{1}{n-1} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{n-1}(x_2+x_3+\dots+x_n) = x_1 \\ \frac{1}{n-1}(x_1+x_3+\dots+x_n) = x_2 \\ \dots \\ \frac{1}{n-1}(x_1+x_2+x_3+\dots+x_{n-1}) = x_n \end{cases}$

$v \in \mathrm{Ker}(f-\mathrm{Id}) \Leftrightarrow x_1+x_2+\dots+x_n = (n-1)x_1+x_1 = (n-1)x_2+x_2 = \dots = (n-1)x_n+x_n$

$v \in \mathrm{Ker}(f-\mathrm{Id}) \Leftrightarrow x_1+x_2+\dots+x_n = nx_1 = nx_2 = \dots = nx_n \Leftrightarrow \begin{cases} x_1+x_2+\dots+x_n = nx_1 \text{ et} \\ nx_1 = nx_2 = \dots = nx_n \end{cases}$

$v \in \mathrm{Ker}(f-\mathrm{Id}) \Leftrightarrow \begin{cases} x_1+x_2+\dots+x_n = nx_1 \\ \text{et} \\ x_1 = x_2 = \dots = x_n \end{cases} \Leftrightarrow x_1 = x_2 = x_3 = \dots = x_n.$

Par conséquent : $\mathrm{Ker}(f-\mathrm{Id}) = \mathrm{Vect}(e_1+e_2+\dots+e_n) = \mathrm{Vect}(V_1)$.

b) $\mathrm{Im}(f-\mathrm{Id}) = \mathrm{Vect}(f(e_1)$

$\forall k \in [\![1,n]\!]$, $f(e_k) = \frac{1}{n-1}(e_1+e_2+\dots+e_n) - \frac{1}{n-1}e_k$

$\forall k \in [\![1,n]\!]$, $f(e_k-e_1) = f(e_k)-f(e_1) = \frac{1}{n-1}(e_1+e_2+\dots+e_n) - \frac{1}{n-1}e_k - \frac{1}{n-1}(e_1+e_2+\dots+e_n) + \frac{1}{n-1}e_1$

(*) $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $f(e_k-e_1) = -\frac{1}{n-1}(e_k-e_1)$; $(f-\mathrm{Id})(e_k-e_1) = -\frac{1}{n-1}(e_k-e_1)-(e_k-e_1) = (1+\frac{1}{n-1})(e_1-e_k)$

$\forall k \in [\![2,n]\!], (f-Id)(e_k-e_1) = \frac{n}{n-1}(e_1-e_k)$; $\forall k \in [\![2,n]\!], (f-Id)\left(\frac{n-1}{n}(e_k-e_1)\right) = e_1-e_k$.

Par conséquent $e_1-e_2, e_1-e_3, \dots, e_1-e_n$ sont des éléments de $Im(f-Id)$. Montrons qu'ils constituent une famille libre.

Soit $(\alpha_2,\alpha_3,\dots,\alpha_n) \in \mathbb{R}^{n-1}$ tel que : $\alpha_2(e_1-e_2)+\alpha_3(e_1-e_3)+\dots+\alpha_n(e_1-e_n)=0$.

$(\alpha_2+\alpha_3+\dots+\alpha_n)e_1 - \alpha_2 e_2 - \alpha_3 e_3 - \dots - \alpha_n e_n = 0$ donc $\alpha_2=\alpha_3=\dots=\alpha_n=0$ car la famille $(e_1,e_2,\dots,e_n)$ est libre.

Ceci achève donc de prouver que $(e_1-e_2, e_1-e_3, \dots, e_1-e_n)$ est une famille libre de $Im(f-Id)$.

Pour montrer que cette famille est une base de $Im(f-Id)$ il suffit de prouver que :

$Im(f-Id) \subset Vect(e_1-e_2,\dots,e_1-e_n)$; c'est à dire que : $Vect((f-Id)(e_1),\dots,(f-Id)(e_n)) \subset Vect(e_1-e_2,\dots,e_1-e_n)$, ou encore que : $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $(f-Id)(e_k) \in Vect(e_1-e_2,\dots,e_1-e_n)$.

Soit $k \in [\![1,n]\!]$. Prouvons que $(f-Id)(e_k) \in Vect(e_1-e_2,\dots,e_1-e_n)$.

$(f-Id)(e_k) = f(e_k)-e_k = \frac{1}{n-1}(e_1+e_2+\dots+e_n) - \frac{1}{n-1}e_k - e_k = \frac{1}{n-1}\left[e_1+e_2+\dots+e_n - n e_k\right]$

$(f-Id)(e_k) = \frac{1}{n-1}\left[(e_1-e_1)+(e_2-e_1)+\dots+(e_n-e_1) - n e_k + n e_1\right]$

$(f-Id)(e_k) = \frac{1}{n-1}\left[n(e_1-e_k) - (e_1-e_2) - (e_1-e_3) - \dots - (e_1-e_n)\right] \in Vect(e_1-e_2, e_1-e_3, \dots, e_1-e_n)$.

Ceci achève de prouver que <u>$(e_1-e_2, e_1-e_3, \dots, e_1-e_n)$ est une base de $Im(f-Id)$.</u>

<u>c)</u> Pour montrer que $\mathbb{R}^n = Ker(f-Id) \oplus Im(f-Id)$ il suffit de prouver que

- $Ker(f-Id) \cap Im(f-Id) = \{0\}$
- $\dim(Ker(f-Id)) + \dim(Im(f-Id)) = \dim \mathbb{R}^n$

Le dernier point est clair car $\dim(Ker(f-Id)) = 1$ (<u>a)</u>) $\dim(Im(f-Id)) = n-1$ (<u>b)</u>) et $\dim \mathbb{R}^n = n$.

Montrons le premier point. Soit $v \in Ker(f-Id) \cap Im(f-Id)$.

$\exists \alpha \in \mathbb{R}, v = \alpha(e_1+e_2+\dots+e_n)$.

$\exists (\alpha_2,\alpha_3,\dots,\alpha_n) \in \mathbb{R}^{n-1}, v = \alpha_2(e_1-e_2)+\alpha_3(e_1-e_3)+\dots+\alpha_n(e_1-e_n)$.

$\alpha e_1 + \alpha e_2 + \dots + \alpha e_n = v = (\alpha_2+\alpha_3+\dots+\alpha_n)e_1 - \alpha_2 e_2 - \alpha_3 e_3 - \dots - \alpha_n e_n$.

Par conséquent : $\alpha = \alpha_2+\alpha_3+\dots+\alpha_n = -\alpha_2 = -\alpha_3 = \dots = -\alpha_n$.

$\alpha_2 = \alpha_3 = \dots = \alpha_n = -\alpha$ et $\alpha = \alpha_2+\alpha_3+\dots+\alpha_n = -(\alpha+\alpha+\dots+\alpha)$; $\alpha = -(n-2)\alpha$; $(n-1)\alpha = 0$; $\alpha = 0$.

Donc $v = 0(e_1+e_2+\dots+e_n) = 0$. Par conséquent $Ker(f-Id) \cap Im(f-Id) = \{0\}$.

Ceci achève de prouver que : $\mathbb{R}^n = Ker(f-Id) \oplus Im(f-Id)$.

d) $p(v_1)=v_1$ car $v_1 \in \mathrm{Ker}(f-\mathrm{Id})$ qui est la base de p.

$p(e_1-e_2)=p(e_1-e_3)=\cdots=p(e_1-e_n)=0$ car $(e_1-e_2, e_1-e_3, \ldots, e_1-e_n)$ est une base de $\mathrm{Ker}\, p$.

Par conséquent : $p(e_1+e_2+\cdots+e_n)=e_1+e_2+\cdots+e_n$ et

$p(e_1)-p(e_2)=p(e_1)-p(e_3)=\cdots=p(e_1)-p(e_n)=0$.

Donc $p(e_1)=p(e_2)=\cdots=p(e_n)$ et $e_1+e_2+\cdots+e_n=p(e_1+e_2+\cdots+e_n)=p(e_1)+p(e_2)+\cdots+p(e_n)=n\,p(e_1)$.

$\forall k \in [\![1,n]\!],\ p(e_k)=\frac{1}{n}(e_1+e_2+\cdots+e_n)$.

Par conséquent : $\Pi_B(p)=\frac{1}{n}\begin{bmatrix}1 & \cdots & 1\\ \vdots & & \vdots\\ 1 & \cdots & 1\end{bmatrix}=P$

e) Montrons que : $p+q=\mathrm{Id}$ et que $p\circ q=q\circ p=0$.

Soit $v \in \mathbb{R}^n$. $v=w+\hat{w}$ avec $w \in \mathrm{Ker}(f-\mathrm{Id})$ et $\hat{w} \in \mathrm{Im}(f-\mathrm{Id})$.

$p(v)=w$ et $q(v)=\hat{w}$. Notons encore que $p(\hat{w})=q(w)=0$.

$(p+q)(v)=p(v)+q(v)=w+\hat{w}=v=\mathrm{Id}(v)$

$(p\circ q)(v)=p(\hat{w})=0$ et $(q\circ p)(v)=q(w)=0$.

Finalement. $\forall v \in \mathbb{R}^n$, $(p+q)(v)=\mathrm{Id}(v)$, $(p\circ q)(v)=(q\circ p)(v)=0$.

Donc $p+q=\mathrm{Id}$ et $p\circ q=q\circ p=0$

$$Q=\Pi_B(q)=\Pi_B(\mathrm{Id}-p)=\begin{bmatrix}1 & & (0)\\ & \ddots & \\ (0) & & 1\end{bmatrix}-\frac{1}{n}\begin{bmatrix}1 & \cdots & 1\\ \vdots & & \vdots\\ 1 & \cdots & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{n-1}{n} & -\frac{1}{n} & \cdots & -\frac{1}{n}\\ -\frac{1}{n} & \ddots & & \vdots\\ \vdots & & \ddots & -\frac{1}{n}\\ -\frac{1}{n} & \cdots & -\frac{1}{n} & \frac{n-1}{n}\end{bmatrix}=Q=\frac{1}{n}\begin{bmatrix}n-1 & & (-1)\\ & n-1 & \\ (-1) & & \ddots \\ & & & n-1\end{bmatrix}.$$

Q2.. $\mathrm{Ker}(f-\mathrm{Id})=\mathrm{Vect}(v_1)$. 1 est donc valeur propre de f et le sous-espace propre associé est la droite vectorielle engendrée par v_1.

Nous avons vu à la fin de la page 3 que :

$\forall k \in [\![1,n]\!]$, $f(e_k-e_1)=\frac{-1}{n-1}(e_k-e_1)$

ou $\forall k \in [\![2,n]\!]$, $f(e_1-e_k)=-\frac{1}{n-1}(e_1-e_k)$. $-\frac{1}{n-1}$ est valeur propre de f.

Notons $F_{-\frac{1}{n-1}}$ le sous-espace propre associé. Ce sous-espace contient la famille libre $(e_1-e_2, e_1-e_3, \ldots, e_1-e_n)$ il est donc de dimension supérieure ou égale à $n-1$; il ne peut être de dimension n car il est en somme directe avec le sous-espace propre associé à la valeur propre 1. Il est donc de dimension $n-1$.

Résumons la situation. 1 et $-\frac{1}{n-1}$ sont des valeurs propres de f et la somme des dimensions des sous-espaces propres associés est n. Ceci suffit pour dire que

- f n'a pas d'autre valeur propre et donc que $\mathrm{Spec}(f)=\{1, -\frac{1}{n-1}\}$
- f est diagonalisable (la somme des dimensions des sous-espaces propres est égale à la dimension de l'espace)

Remarque.. On pouvait encore trouver les valeurs propres de f en étudiant le noyau de $f-\lambda Id$ ou en cherchant une réduite de Gauss de $M-\lambda Id$. Utilisons la 1ère méthode

Soit $v=(x_1,x_2,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n$ et soit $\lambda\in\mathbb{R}$.

$$f(v)-\lambda v=0 \iff \begin{cases} \frac{1}{n-1}(x_2+x_3+\dots+x_n)-\lambda x_1=0 \\ \frac{1}{n-1}(x_1+x_3+\dots+x_n)-\lambda x_2=0 \\ \dots \\ \frac{1}{n-1}(x_1+x_2+\dots+x_{n-1})-\lambda x_{n}=0 \end{cases} \iff \frac{1}{n-1}(x_1+x_2+\dots+x_n)=(\lambda+\tfrac{1}{n-1})x_1=(\lambda+\tfrac{1}{n-1})x_2=\dots=(\lambda+\tfrac{1}{n-1})x_n$$

1er Cas.. $\lambda=\frac{-1}{n-1}$

$f(v)-\lambda v \iff x_1+x_2+\dots+x_n=0$. $-\frac{1}{n-1}$ est valeur propre de f et le sous-espace propre associé est l'hyperplan d'équation $x_1+x_2+\dots+x_n=0$.

2e Cas.. $\lambda\neq-\frac{1}{n-1}$

$f(v)-\lambda v=0 \iff x_1=x_2=\dots=x_n$ et $\frac{1}{n-1}(nx_1)=(\lambda+\frac{1}{n-1})x_1$

a) $\frac{n}{n-1}=\lambda+\frac{1}{n-1}$; soit $\lambda=1$

$f(v)-\lambda v=0 \iff x_1=x_2=\dots=x_n$. 1 est valeur propre de f et le sous-espace propre associé est la droite vectorielle engendrée par $e_1+e_2+\dots+e_n$.

b) $\frac{n}{n-1}\neq\lambda+\frac{1}{n-1}$; soit $\lambda\neq1$.

$f(v)-\lambda v=0 \iff x_1=x_2=\dots=x_n$ et $x_1=0 \iff x_1=x_2=\dots=x_n=0$; λ n'est pas valeur propre.

On a bien ainsi retrouvé les résultats précédents.

Q3.. $$M=\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{n-1} & \cdots & \frac{1}{n-1} \\ \frac{1}{n-1} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \frac{1}{n-1} \\ \frac{1}{n-1} & \cdots & \frac{1}{n-1} & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{n-1}\left(\begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & 1 \end{bmatrix}\right) = \frac{1}{n-1}\left[nP-I_n\right]=\frac{1}{n-1}\left[nP-(P+Q)\right]$$

$$\underline{\underline{M=P-\frac{1}{n-1}Q}}$$

Soit $k\in\mathbb{N}^*-\{1\}$. $M^k=(P-\frac{1}{n-1}Q)^k \underset{\substack{\uparrow \\ PQ=QP=0}}{=} \sum_{i=0}^{k} C_k^i P^i\left(-\frac{1}{n-1}\right)^{k-i}Q^{k-i} = \sum_{i=0}^{k} C_k^i\left(-\frac{1}{n-1}\right)^{k-i}P^iQ^{k-i}$

Notons que si $i \in [\![1,k-1]\!]$, $P^i Q^{k-i} = P^{i-1}(PQ)\,Q^{k-1-i} = P^{i-1}\,0\,Q^{k-1-i} = 0$.

Par conséquent :

$$\Pi^k = C_k^0\left(-\frac{1}{n-1}\right)^{k-0} P^0 Q^{k-0} + C_k^k\left(-\frac{1}{n-1}\right)^{k-k} P^k Q^{k-k} = \left(-\frac{1}{n-1}\right)^k Q^k + P^k$$

Notons encore que : $P^k = P$ et $Q^k = Q$ car $P^2 = P$ et $Q^2 = Q$

Finalement : $\forall k \in \mathbb{N}^* - \{1\}$, $\Pi^k = P + \left(-\frac{1}{n-1}\right)^k Q$.

cette formule vaut encore pour $k = 1$ et même pour $k = 0$!

$\forall k \in \mathbb{N}$, $\Pi^k = P + \left(-\frac{1}{n-1}\right)^k Q$. $\quad \lim_{k \to +\infty} \Pi^k = P \quad \left(\lim_{k\to+\infty}\left(-\frac{1}{n-1}\right)^k = 0\right)$.

Notons que Π est inversible car 0 n'est pas valeur propre de Π $\left(\operatorname{spec}\Pi = \operatorname{spec} f = \{1, -\frac{1}{n-1}\}\right)$

Posons $S = P + \left(-\frac{1}{n-1}\right)^{-1} Q$ (you see ?). $S = P - (n-1)Q$.

$\Pi S = (P - \frac{1}{n-1}Q)(P - (n-1)Q) = P^2 - \frac{1}{n-1} QP - (n-1)PQ + Q^2 = P + Q = I_n$; donc $\Pi^{-1} = S$!

Par conséquent : $\Pi^{-1} = P - (n-1)Q$.

Remarques .. 1. On peut maintenant facilement prouver que : $\forall k \in \mathbb{Z}$, $\Pi^k = P + \left(-\frac{1}{n-1}\right)^k Q$.

2.. Pour obtenir $\Pi = P - \frac{1}{n-1}Q$ on pouvait encore remarquer que : p (resp. q) est la projection sur F_1 (resp. $F_{-\frac{1}{n-1}}$) de direction $F_{-\frac{1}{n-1}}$ (resp. F_1) avec $F_1 = \operatorname{Ker}(f - Id)$ et

$F_{-\frac{1}{n-1}} = \operatorname{Ker}(f + \frac{1}{n-1} Id) = \operatorname{Im}(f - Id) = \operatorname{Vect}(e_1 - e_2, e_1 - e_3, \dots, e_1 - e_n)$.

On a alors $\forall \omega \in F_1$, $f(\omega) = \omega$, $p(\omega) = \omega$ et $q(\omega) = 0$

$\forall \hat\omega \in F_{-\frac{1}{n-1}}$, $f(\hat\omega) = -\frac{1}{n-1}\hat\omega$, $p(\hat\omega) = \hat\omega$ et $q(\hat\omega) = \hat\omega$

Il devient alors aisé d'obtenir $f = p - \frac{1}{n-1} q$

Pas content le J.F. !

Je me refuse à utiliser ces notations stupides. Il était déjà plus raisonnable de noter normalement le module des éléments de $\mathbb{C}$ et d'écrire $\|x\| = \max(|x_1|, \dots, |x_n|)$

Appelons un chat un chat et notons $\|x\|$ le max de $\{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|\}$ lorsque $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Par conséquent si $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n$, $\|x\| = \max(|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|)$.

$\|\;\|$ est une norme sur $\mathbb{C}^n$. voir p. 9

PARTIE III : étude du cas général.

Q1 a) Soit $M = (m_{ij}) \in M_n(\mathbb{C})$ telle que : $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $m_{ij} \in \mathbb{R}_+$.

Posons $W = MV_1$. $W = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$ avec $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $y_i = \sum_{k=1}^{n} m_{ik} \times 1 = \sum_{k=1}^{n} m_{ik}$

$MV_1 = V_1 \Leftrightarrow W = V_1 \Leftrightarrow \forall i \in [\![1,n]\!], y_i = 1 \Leftrightarrow \forall i \in [\![1,n]\!], \sum_{k=1}^{n} m_{ik} = 1 \underset{\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, m_{ij} \in \mathbb{R}_+}{\Leftrightarrow} M$ est stochastique.

c'est ce qu'il fallait montrer.

b) Soit $(A,B) \in S_n$. Montrons que $AB \in S_n$. Les coefficients de A et B étant des réels positifs il en est de même pour AB. Par conséquent pour montrer que AB est stochastique il suffit de prouver que $ABV_1 = V_1$.

$ABV_1 = A(BV_1) \underset{B \in S_n}{=} AV_1 \underset{A \in S_n}{=} V_1$; donc $AB \in S_n$.

donc $\forall (A,B) \in S_n$, $AB \in S_n$.

Une récurrence élémentaire et ce dernier résultat montrent que si $A \in S_n$, $\forall k \in \mathbb{N}$, $A^k \in S_n$.

Q2 C'est (presque) une question de cours. Notons qu'ici $r \in [\![1, n-1]\!]$ (?)

Montrons tout d'abord que la famille $(u(e_{r+1}), \dots, u(e_n))$ est libre

Soit $(\alpha_{r+1}, \alpha_{r+2}, \dots, \alpha_n) \in K^{n-r}$ tel que $\sum_{i=r+1}^{n} \alpha_i u(e_i) = 0$.

$u(\sum_{i=r+1}^{n} \alpha_i e_i) = 0$ donc $\sum_{i=r+1}^{n} \alpha_i e_i \in \operatorname{Ker} u = \operatorname{Vect}(e_1, e_2, \dots, e_r)$

Par conséquent $\exists (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r) \in K^r$ tel que $\sum_{i=r+1}^{n} \alpha_i e_i = \sum_{i=1}^{r} \beta_i e_i$

$\sum_{i=1}^{r} \beta_i e_i - \sum_{i=r+1}^{n} \alpha_i e_i = 0$ donc $\beta_1 = \dots = \beta_r = \alpha_{r+1} = \dots = \alpha_n = 0$; c'est ce qu'il fallait montrer.

Montrons que $(u(e_{r+1}), \dots, u(e_n))$ est une famille génératrice de Im u

Notons tout d'abord que cette famille est constituée d'éléments de Im u !

Soit $y \in \operatorname{Im} u$. $\exists x \in E$, $y = u(x)$.

$\exists (x_1, x_2, \dots, x_n) \in K^n$, $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$. $y = u(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i u(e_i) \overset{e_1, e_2, \dots, e_r \text{ sont dans Ker } u.}{=} \sum_{i=r+1}^{n} x_i u(e_i)$

Nous venons donc de démontrer que tout élément de Im u est combinaison linéaire de la famille $(u(e_{r+1}), \dots, u(e_n))$

Ceci achève de prouver que $(u(e_{r+1}), \dots, u(e_n))$ est une base de Im u

En particulier $\dim \operatorname{Im} u = n - r$

Donc $\dim \operatorname{Im} u + \dim \operatorname{Ker} u = n - r + r = n$. $\underline{\underline{\dim \operatorname{Im} u + \dim \operatorname{Ker} u = n}} = \dim E$ Théorème du rang !

Notons pour préserver l'avenir que ceci vaut encore dans les deux cas particuliers $\dim \operatorname{Ker} u = 0$ et $\dim \operatorname{Ker} u = n$

Q3.. Notons la couardise du concepteur qui a essayé de dissimuler par des notations grotesques la notion de norme.

Je n'utiliserai pas la notation $|x| = \max(|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|)$ car ma fille n'a pas voulu me prêter ses feutres.

Pour $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n$ je poserai $\|x\| = \max(|x_1|, \dots, |x_n|)$. Montrons pour commencer que $\| \ \|$ est une norme sur $\mathbb{C}^n$.

Soit $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n$

N1 – $\|x\| = 0 \iff \max(|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|) = 0 \iff \forall k \in [\![1, n]\!],\ x_k = 0 \iff x = 0$.

N2 – $\|\lambda x\| = \max(|\lambda x_1|, |\lambda x_2|, \dots, |\lambda x_n|) = \max(|\lambda||x_1|, |\lambda||x_2|, \dots, |\lambda||x_n|) = |\lambda| \max(|x_1|, \dots, |x_n|) = |\lambda|\, \|x\|$

N3 – Soit $y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{C}^n$. $x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$.

$\forall k \in [\![1, n]\!],\ |x_k + y_k| \leq |x_k| + |y_k| \leq \|x\| + \|y\|$.

Donc $\max(|x_1 + y_1|, |x_2 + y_2|, \dots, |x_n + y_n|) \leq \|x\| + \|y\|$; $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Ces trois propriétés donnent à $\| \ \|$ le statut de norme sur $\mathbb{C}^n$.

a) Soit $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n$. Posons $y = f(x)$. $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ avec $\forall i \in [\![1, n]\!],\ y_i = \sum_{k=1}^{n} m_{ik} x_k$

$$\forall i \in [\![1, n]\!],\ |y_i| \leq \sum_{k=1}^{n} |m_{ik}||x_k| \leq \sum_{k=1}^{n} |m_{ik}|\, \|x\| \overset{m_{ik} \in \mathbb{R}_+}{=} \|x\| \sum_{k=1}^{n} m_{ik} \overset{\pi \in S_n}{=} \|x\|$$

$\forall i \in [\![1, n]\!],\ |y_i| \leq \|x\|$; par conséquent : $\max(|y_1|, |y_2|, \dots, |y_n|) \leq \|x\|$; $\|y\| \leq \|x\|$

Finalement : $\|f(x)\| \leq \|x\|$ pour tout $x \in \mathbb{C}^n$.

Remarque.. ceci montre que $|||f||| \leq 1$. En fait $|||f||| = 1$ (prendre $x = v_1 \dots$) | pour les initiés.

b) Soit $\lambda \in \operatorname{Spec}(f)$. $\exists x \in \mathbb{C}^n$, $x \neq 0$ et $f(x) = \lambda x$.

$|\lambda|\, \|x\| \overset{N2}{=} \|\lambda x\| = \|f(x)\| \leq \|x\|$. Or $\|x\| \neq 0$ car $x \neq 0$ $(x = 0 \overset{N1}{\iff} \|x\| = 0)$

donc en divisant par $\|x\|$ on obtient $|\lambda| \leq 1$.

Par conséquent les modules de toutes les valeurs propres de f sont inférieurs ou égaux à 1.

$\Pi \in S_n$ donc $\Pi V_1 = V_1$; comme V_1 n'est pas nulle 1 est valeur propre de Π donc de f.

Q4 a) Soit $y \in \mathrm{Im}(f-\mathrm{Id}) \cap \mathrm{Ker}(f-\mathrm{Id})$.

$\exists x \in E$, $y = (f-\mathrm{Id})(x) = f(x) - x$; $f(x) = x + y$

Notons que $y \in \mathrm{Ker}(f-\mathrm{Id})$ donc $f(y) = y$.

$f^2(x) = f(x+y) = f(x) + y = x + y + y = x + 2y$.

Montrons par récurrence que : $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $f^k(x) = x + ky$.

- c'est vrai pour $k=1$.
- Supposons la propriété vraie pour $k \in \mathbb{N}^*$ et montrons la pour $k+1$.

$f^{k+1}(x) = f(f^k(x)) = f(x+ky) = f(x) + k f(y) = x + y + ky = x + (k+1)y$. Ceci achève la récurrence.

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. $ky = f^k(x) - x$. $\|ky\| = \|f^k(x) - x\| \leq \|f^k(x)\| + \|-x\| = \|f^k(x)\| + \|x\|$.

$\|f(x)\| \leq \|x\|$; une récurrence simple fournit $\|f^k(x)\| \leq \|x\|$ et ceci pour tout $k \in \mathbb{N}^{(*)}$

Donc $k\|y\| = |k|\,\|y\| = \|ky\| \leq \|f^k(x)\| + \|x\| \leq \|x\| + \|x\| = 2\|x\|$

Par conséquent : $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $k\|y\| \leq 2\|x\|$

Supposons $\|y\| \neq 0$ alors $\underline{\underline{\forall}} k \in \mathbb{N}^*$, $k \leq \dfrac{2\|x\|}{\|y\|}$!! (prendre $k = E\left(\dfrac{2\|x\|}{\|y\|}\right) + 1$).

Par conséquent $\|y\| = 0$ et donc $y = 0$.

Finalement $\mathrm{Im}(f-\mathrm{Id}) \cap \mathrm{Ker}(f-\mathrm{Id}) = \{0\}$.

<u>b)</u> Pour montrer que $\mathbb{C}^n = \mathrm{Ker}(f-\mathrm{Id}) \oplus \mathrm{Im}(f-\mathrm{Id})$ il suffit de prouver que

- $\mathrm{Ker}(f-\mathrm{Id}) \cap \mathrm{Im}(f-\mathrm{Id}) = \{0\}$ qui est donné par <u>a)</u>
- $\dim \mathrm{Ker}(f-\mathrm{Id}) + \dim \mathrm{Im}(f-\mathrm{Id}) = n$ qui est donné par III Q2

En deux tout est fait.

<u>c)</u> Il s'agit de montrer que $\mathrm{Im}(f-\mathrm{Id})$ est stable par f

Soit $x \in \mathrm{Im}(f-\mathrm{Id})$. $\exists t \in \mathbb{C}^n$, $x = f(t) - t$.

$f(x) = f(f(t) - t) = f(f(t)) - f(t) = (f-\mathrm{Id})(f(t)) \in \mathrm{Im}(f-\mathrm{Id})$.

$\underline{\underline{\forall x \in \mathrm{Im}(f-\mathrm{Id}),\ f(x) \in \mathrm{Im}(f-\mathrm{Id})}}$.

Soit F un sous-espace propre associé à une valeur propre λ de f distincte de 1.

Soit $x \in F$. $f(x) = \lambda x$. $f(x) - x = (\lambda - 1)x$; $x = \dfrac{1}{\lambda-1}(f-\mathrm{Id})(x) = (f-\mathrm{Id})\left(\dfrac{1}{\lambda-1}x\right) \in \mathrm{Im}(f-\mathrm{Id})$.

Par conséquent $F \subset \mathrm{Im}(f-\mathrm{Id})$.

Q5 a) Notons $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_q$ les valeurs propres de f autres que 1. Notons $F_{\alpha_1}, F_{\alpha_2}, \dots, F_{\alpha_q}$ les sous-espaces propres associés à ces valeurs propres.

$F_{\alpha_1}, F_{\alpha_2}, \dots, F_{\alpha_q}$ sont contenus dans le sous-espace $\mathrm{Im}(f-Id)$; leur somme, qui est directe, aussi ; $F_{\alpha_1} \oplus \dots \oplus F_{\alpha_q} \subset \mathrm{Im}(f-Id)$. Pour prouver l'égalité de $F_{\alpha_1} \oplus \dots \oplus F_{\alpha_q}$ avec $\mathrm{Im}(f-Id)$ il suffit donc de montrer qu'ils ont même dimension.

$\mathbb{C}^n = \mathrm{Ker}(f-Id) \oplus F_{\alpha_1} \oplus \dots \oplus F_{\alpha_q}$ car f est diagonalisable ; par conséquent :

$\dim \mathrm{Ker}(f-Id) + \dim(F_{\alpha_1} \oplus \dots \oplus F_{\alpha_q}) = \dim \mathbb{C}^n = n = \dim \mathrm{Ker}(f-Id) + \dim(\mathrm{Im}(f-Id))$ et donc

$\dim(F_{\alpha_1} \oplus \dots \oplus F_{\alpha_q}) = \dim(\mathrm{Im}(f-Id))$

Finalement $\underline{\underline{F_{\alpha_1} \oplus F_{\alpha_2} \oplus \dots \oplus F_{\alpha_q} = \mathrm{Im}(f-Id)}}$.

b) Notons que : $D = C^{-1} \Pi C$ où C est la matrice de passage de la base B à la base B'.

On a encore $\Pi = C D C^{-1}$ et $\forall k \in \mathbb{N}$, $D^k = C^{-1} \Pi^k C$ et $\Pi^k = C D^k C^{-1}$.

Nous allons pour répondre montrer les résultats suivants.

Si $A \in M_n(\mathbb{C})$ et si $(A^k)_{k \geq 0}$ converge vers $L \in M_n(\mathbb{C})$ alors pour tout élément H de $M_n(\mathbb{C})$, $(HA^k)_{k\geq 0}$ converge vers HL et $(A^k H)_{k \geq 0}$ converge vers LH.

$A = (a_{ij})$; $A^k = (a_{ij}^{(k)})$ (ce n'est pas une puissance !) pour tout $k \in \mathbb{N}$. $L = (l_{ij})$ et $H = (h_{ij})$.

$HA^k = \left(\sum_{s=1}^{n} h_{is} a_{sj}^{(k)}\right)$

Pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $(a_{ij}^{(k)})_{k\geq 0}$ converge vers l_{ij}

Par conséquent pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $\left(\sum_{s=1}^{n} h_{is} a_{sj}^{(k)}\right)_{k\geq 0}$ converge vers $\sum_{s=1}^{n} h_{is} l_{sj}$;

la suite $(HA^k)_{k\geq 0}$ converge vers la matrice $\left(\sum_{s=1}^{n} h_{is} l_{sj}\right)$ qui n'est autre que la matrice HL

On montre de la même manière que $(A^k H)_{k\geq 0}$ converge vers LH.

Montrons maintenant que $(\Pi^k)_{k\geq 0}$ converge ssi $(D^k)_{k\geq 0}$ converge.

Supposons que $(\Pi^k)_{k\geq 0}$ converge vers $\hat{\Pi}$.

$(C^{-1}\Pi^k)_{k\geq 0}$ converge alors vers $C^{-1}\hat{\Pi}$; $((C^{-1}\Pi^k) C)_{k\geq 0}$ converge vers $(C^{-1}\hat{\Pi}) C$.

$(D^k)_{k\geq 0} = (C^{-1}\Pi^k C)_{k\geq 0}$ converge vers $C^{-1}\hat{\Pi} C$.

De la même manière on montre que si $(D^k)_{k\geq 0}$ converge vers $\hat{D}$ alors $(\Pi^k)_{k\geq 0}$ converge vers $C\hat{D}C^{-1}$

Par conséquent 1°- $(\Pi^k)_{k\geq 0}$ converge ssi $(D^k)_{k\geq 0}$ converge.

2°- En cas de convergence :

$\lim_{k\to+\infty} D^k = C^{-1} \lim_{k\to+\infty} \Pi^k C$ et $\lim_{k\to+\infty} \Pi^k = C \lim_{k\to+\infty} D^k C^{-1}$.

c) $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $D^k = \begin{bmatrix} \lambda_1^k & & (0) \\ & \lambda_2^k & \\ (0) & & \ddots \ \lambda_n^k \end{bmatrix}$. Par conséquent $(M^k)_{k\geq 0}$ converge si et seulement si $(D^k)_{k\geq 0}$ converge ; autrement dit si et seulement si pour tout $s \in [\![1,n]\!]$, la suite $(\lambda_s^k)_{k\geq 0}$ converge.

Notons que pour tout $s \in [\![r+1,n]\!]$, $(\lambda_s^k)_{k\geq 0}$ converge vers 0 car $|\lambda_s| < 1$.

Donc $(M^k)_{k\geq 0}$ converge si et seulement les suites $(\lambda_1^k)_{k\geq 0}, (\lambda_2^k)_{k\geq 0}, \ldots, (\lambda_r^k)_{k\geq 0}$ convergent.

1er Cas.. 1 est la seule valeur propre de module 1.

Par conséquent $r=p$ et $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_p = 1$. Pour tout $s \in [\![1,r]\!] = [\![1,p]\!]$, $(\lambda_s^k)_{k\geq 0}$ converge vers 1 et : $(M^k)_{k\geq 0}$ converge.

Notons alors que $(D^k)_{k\geq 0}$ converge vers : $\left[\begin{array}{c|c} I_p & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right]$ où I_p est la matrice identité de $M_p(\mathbb{C})$.

2ième Cas.. Il existe une valeur propre de module 1 distincte de 1.

$\exists s \in [\![1,r]\!]$, $|\lambda_s| = 1$ et $\lambda_s \neq 1$.

Notons alors que $(\lambda_s^k)_{k\geq 0}$ diverge ce qui entraînera la divergence de $(M^k)_{k\geq 0}$ et achèvera la question.

$\exists \theta \in]0,\pi[$, $\lambda_s = e^{i\theta}$. $\forall k \in \mathbb{N}$, $\lambda_s^k = e^{ik\theta} = \cos k\theta + i\sin k\theta$

Prouvons que la suite $(\cos k\theta)_{k\geq 0}$ diverge ce qui amènera la divergence de $(e^{ik\theta})_{k\geq 0}$ donc de $(\lambda_s^k)_{k\geq 0}$. Sup.

1er Cas.. $\theta = \pi$. $\cos k\theta = \cos k\pi = (-1)^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$; $(\cos k\theta)_{k\geq 0}$ diverge.

2ième Cas.. $\theta \neq \pi$. Supposons que $(\cos k\theta)_{k\geq 0}$ converge et notons ℓ sa limite.

$\forall k \in \mathbb{N}$, $\cos (k+1)\theta = \cos k\theta \cos\theta - \sin k\theta \sin\theta$

$\forall k \in \mathbb{N}$, $\sin(k\theta) = \frac{1}{\sin\theta}[\cos k\theta \cos\theta - \cos(k+1)\theta]$ $(\sin\theta \neq 0)$

Donc $(\sin(k\theta))_{k\geq 0}$ converge vers $\ell' = \frac{1}{\sin\theta}[\ell\cos\theta - \ell] = \frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}\ell = \frac{2\cos^2\theta/2}{2\sin\theta/2\cos\theta/2}\ell = \cotan\frac{\theta}{2}\ell$

$\forall k \in \mathbb{N}$, $\cos(2k\theta) = 2\cos^2 k\theta - 1 = 1 - 2\sin^2 k\theta$; $\ell = 2\ell^2 - 1 = 1 - 2\ell'^2$

Ceci donne : $2\ell^2 - \ell - 1 = 0$ et $\ell^2 + \ell'^2 = 1$; soit $\ell = 1$ et $\ell' = 0$ ou $\ell = -\frac{1}{2}$ et $\ell'^2 = \frac{3}{4}$.

Notons encore que : $\forall k \in \mathbb{N}$, $\sin 2k\theta = 2\sin k\theta \cos k\theta$; $\ell' = 2\ell'\ell$ donc $\ell' = 0$ ou $\ell = 1/2$.

Or ℓ ne peut valoir $1/2$ donc $\ell' = 0$ et $\ell = 1$.

Mais $\ell' = \cotan\frac{\theta}{2}\ell$ donc $\cotan\frac{\theta}{2} = 0$; ceci est impossible car $\theta \in]0,\pi[\cup]\pi,2\pi[$

Par conséquent $(\cos k\theta)_{k\geq 0}$ ne peut converger.

Dans tous les cas $(\cos k\theta)_{k\geq 0}$ diverge ceci achève de traiter c) d] On suppose que 1 est la seule valeur propre de Π de module 1.

Alors $(D^k)_{k\geq 0}$ converge vers $\left[\begin{array}{c|c} I_p & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right]$ comme nous l'avons vu.

Soit h l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ dont la matrice dans la base B' est $\left[\begin{array}{c|c} I_p & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right]$

h n'est autre que la projection sur $Vect(v_1, v_2, \dots, v_p)$ et de direction $Vect(v_{p+1}, \dots, v_n)$

(h et cette projection coïncident sur la base B' et sont donc égales).

Notons que $Vect(v_1, v_2, \dots, v_p) = Ker(f - Id)$ et $Vect(v_{p+1}, \dots, v_n) = Im(f - Id)$ (Q4 + Q5 a])

Soit N la matrice de h dans la base B. Rappelons que C est la matrice de passage de B à B'.

$$N = C \left[\begin{array}{c|c} I_p & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right] C^{-1} = C \lim_{k\to +\infty} D^k \, C^{-1} = \lim_{k\to+\infty} \Pi^k .$$

La limite de la suite $(\Pi^k)_{k\geq 0}$ est la matrice dans B de la projection sur $Ker(f - Id)$ de direction $Im(f - Id)$.

I permet de dire que f diagonalisable n'est pas une condition nécessaire pour que $(\Pi^k)_{k\geq 0}$ converge.