CHAMBRE DE COMMERCE ET D'INDUSTRIE DE PARIS

DIRECTION DE L'ENSEIGNEMENT

Direction des Admissions et Concours

École des Hautes Études Commerciales

CONCOURS D'ADMISSION DE 1991

Mathématiques I

OPTION GÉNÉRALE

Mardi 14 mai 1991, de 8 h. à 12 h.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

sont autorisées : règles graduées, tables de valeurs numériques **sans formulaire,** calculatrices de poche, y compris les calculatrices programmables et alphanumériques, à fonctionnement autonome, sans imprimante, sans document d'accompagnement et de format maximum 21 cm de long X 15 cm de large.

LIMINAIRE

Soit a un nombre réel strictement supérieur à -1. Pour tout nombre réel strictement positif x, établir la convergence de l'intégrale :

$$\int_x^{+\infty} t^a \, e^{-t^2/2} \, dt$$

puis celle de l'intégrale :

$$\int_0^{+\infty} t^a \, e^{-t^2/2} \, dt$$

L'objet de la partie I est l'étude de la fonction f_a définie sur $[0, +\infty[$ par la relation :

$$f_a(x) = \int_x^{+\infty} t^a \, e^{-t^2/2} \, dt$$

L'objet de la partie II est l'étude d'une méthode de calcul de valeurs approchées de la fonction φ définie pour $a > -1$ par la relation :

$$\varphi(a) = f_a(0) = \int_0^{+\infty} t^a \, e^{-t^2/2} \, dt$$

PARTIE I

1. *Cas particulier $a = 0$*

a) Montrer que la fonction f_0 est en fait définie sur $\mathbb{R}$.

b) Interpréter la fonction $\dfrac{1}{\sqrt{2\,\pi}}\, f_0$ en termes de probabilités.

En déduire la valeur de $f_0(0)$, ainsi que les limites de f_0 en $+\infty$ et en $-\infty$.

2. *Propriétés générales de f_a*

a) Montrer que la fonction f_a est de classe C^∞ sur l'intervalle $]0,\ +\infty[$.
Calculer les dérivées première et seconde de f_a.

b) Déterminer le sens de variation de f_a sur $]0,\ +\infty[$.

c) Étudier la limite de f_a en $+\infty$.

3. *Étude du cas $a > 0$*

a) Montrer que f_a est de classe C^1 sur $[0,\ +\infty[$. Calculer $f_a'(0)$.

b) Étudier la variation de la fonction f_a'.

c) Donner l'allure de la courbe représentative de f_a.

4. *Étude du cas $-1 < a < 0$*

a) Montrer que la fonction f_a est continue sur $[0,\ +\infty[$. Cette fonction est-elle dérivable en 0 ?

b) Montrer que la fonction f_a est convexe.

c) Donner l'allure de la courbe représentative de f_a.

5. *Étude de f_a au voisinage de $+\infty$ ($a > -1$)*

a) À l'aide d'une intégration par parties, montrer que, pour tout nombre réel strictement positif x :

$$f_a(x) = x^{a-1}\,\mathrm{e}^{-x^2/2} + (a-1)\int_x^{+\infty} t^{a-2}\,\mathrm{e}^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t$$

cette dernière intégrale étant convergente.

b) En déduire le signe de :

$$f_a(x) - x^{a-1}\,\mathrm{e}^{-x^2/2}$$

selon les valeurs de a.

c) Établir que pour $x > 0$ et pour $a > -1$:

$$\left|f_a(x) - x^{a-1}\,\mathrm{e}^{-x^2/2}\right| \leq \frac{|a-1|}{x^2}\, f_a(x)$$

(On pourra utiliser la décroissance de la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t^2}$ sur l'intervalle $[x,\ +\infty[$.)

d) En déduire qu'au voisinage de $+\infty$:

$$f_a(x) \sim x^{a-1}\,\mathrm{e}^{-x^2/2}$$

Application

Établir la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_a(x)\,\mathrm{d}x$.

À l'aide d'une intégration par partie, justifier l'égalité :

$$f_{a+1}(0) = \int_0^{+\infty} f_a(x)\ \mathrm{d}x$$

e) Déduire également de la question c) que si $-1 < a \leq 1$ et $x > 0$:

$$(1) \qquad \left| f_a(x) - x^{a-1}\ \mathrm{e}^{-x^2/2} \right| \leq\ 2\ x^{a-3}\ \mathrm{e}^{-x^2/2}$$

PARTIE II

Pour tout nombre réel $a > -1$, on pose :

$$\varphi(a) = \int_0^{+\infty} t^a\ \mathrm{e}^{-t^2/2}\ \mathrm{d}t$$

Pour tout nombre réel strictement positif x, on écrit $\varphi(a)$ sous la forme :

$$\varphi(a) = g_a(x) + f_a(x) \qquad \text{avec} \qquad g_a(x) = \int_0^x t^a\ \mathrm{e}^{-t^2/2}\ \mathrm{d}t$$

1. *Relation fonctionnelle vérifiée par* φ

a) Établir l'égalité :

$$(2) \qquad \varphi(a+2) = (a+1)\ \varphi(a)$$

b) Pour tout nombre entier naturel n, exprimer $\varphi(a + 2\ n)$ en fonction de $\varphi(a)$. Calculer $\varphi(0)$ et $\varphi(1)$. En déduire la valeur de $\varphi(n)$ pour tout nombre entier naturel n.

2. *Développement en série de* $g_a(x)$

Pour tout nombre entier naturel n et pour tout nombre réel t positif ou nul, on pose :

$$S_n(t) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k\ \frac{t^{2k+a}}{2^k\ k\ !}$$

a) Écrire la formule de Taylor avec reste intégral pour la fonction $u \mapsto \mathrm{e}^{-u}$ sur l'intervalle $\left[0,\ \dfrac{t^2}{2}\right]$ à l'ordre n, où $n \in \mathbb{N}$.

En déduire le signe de $t^a\ \mathrm{e}^{-t^2/2} - S_n(t)$ selon les valeurs de n. En conclure que, pour tout nombre réel strictement positif t et pour tout couple $(p,\ q)$ de nombres entiers naturels :

$$S_{2p+1}(t) \leq t^a\ \mathrm{e}^{-t^2/2} \leq S_{2q}(t)$$

b) Montrer alors que, pour tout nombre entier naturel non nul n :

$$\left| t^a\ \mathrm{e}^{-t^2/2} - S_n(t) \right| \leq \frac{t^{2n+a}}{2^n\ n\ !}$$

(On distinguera deux cas suivant la parité de n.)

c) En conclure que, pour tout nombre entier naturel n et pour tout nombre réel strictement positif x :

$$(3) \qquad \left| g_a(x) - \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+a+1}}{2^k\ k\,!\ (2\ k+a+1)} \right| \leq \frac{x^{2n+a+1}}{2^n\ n\,!\ (2\ n+a+1)}$$

Justifier l'écriture :

$$(4) \qquad g_a(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+a+1}}{2^k\ k\,!\ (2\ k+a+1)}$$

3. *Méthode d'approximation de $\varphi(a)$*

On suppose désormais que $-1 < a \leq 1$. (On remarque que, grâce à l'égalité (2), on peut toujours se ramener à ce cas.)

On écrit :

$$\varphi(a) = g_a(x) + f_a(x)$$

Grâce à l'inégalité (1), on choisit une valeur de x pour laquelle $f_a(x)$ est suffisamment petit. Le nombre x étant ainsi fixé, on approche $g_a(x)$ par une somme partielle de la série (4) :

$$s_n(x) = x^{a+1} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k\ \frac{x^{2k}}{2^k\ k\,!\ (2\ k+a+1)}$$

a) Déterminer le plus petit des nombres entiers naturels p tels que, pour tout élément a de $]-1,\ 1]$:

$$2\ p^{a-3}\ \mathrm{e}^{-p^2/2} \leq 10^{-5}$$

b) En utilisant l'inégalité (1), montrer que pour $x = 5$ et pour tout élément a de $]-1,\ 1]$:

$$\left| f_a(x) - x^{a-1}\ \mathrm{e}^{-x^2/2} \right| \leq 10^{-5}$$

c) On prend donc désormais $x = 5$. Pour $a \in]-1,\ 1]$ et pour tout nombre entier naturel k, on pose :

$$u_k = \frac{5^{2k}}{2^k\ k\,!\ (2\ k+a+1)}$$

Exprimer u_{k+1} en fonction de k et de u_k. Mettre en place un algorithme de calcul de u_n pour des valeurs données de n et de a.

d) Grâce à l'inégalité (3), déterminer un nombre entier naturel n tel que, pour tout élément a de $]-1,\ 1]$:

$$|g_a(5) - s_n(5)| \leq 10^{-5}$$

e) La méthode proposée permet-elle, avec les choix effectués pour x et n, d'obtenir des valeurs approchées de $\varphi(a)$ à 2×10^{-5} près lorsque a est donné dans l'intervalle $]-1,\ 1]$?

$a \in \mathbb{R}$ et $a > -1$. Notons que $t \mapsto t^a e^{-t^2/2}$ est continue et positive sur $\mathbb{R}_+^*$; en particulier elle est localement intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Fixons x dans $\mathbb{R}_+^*$.

$\lim_{t \to +\infty} t^2 (t^a e^{-t^2/2}) = 0$, par conséquent : $\exists A \in \mathbb{R}_+^*$, $\forall t \in [A, +\infty[$, $0 \leq t^2 (t^a e^{-t^2/2}) \leq 1$.

Donc $\forall t \in [A, +\infty[$, $0 \leq t^a e^{-t^2/2} \leq \frac{1}{t^2}$

$\int_A^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$ converge donc $\int_A^{+\infty} t^a e^{-t^2/2} dt$ aussi ; $\int_x^{+\infty} t^a e^{-t^2/2} dt$ encore !

La convergence de $\int_0^{+\infty} t^a e^{-t^2/2} dt$ résultera donc de la convergence de $\int_0^x t^a e^{-t^2/2} dt$.

▲ $\forall t \in \mathbb{R}_+^*$, $t^a e^{-t^2/2} \geq 0$ et $t^a e^{-t^2/2} \underset{0}{\sim} t^a = \frac{1}{t^{-a}}$.

$-a < 1$ car $a > -1$ donc $\int_0^x \frac{dt}{t^{-a}}$ converge, par conséquent : $\int_0^x t^a e^{-t^2/2} dt$ converge.

Finalement
- pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\int_x^{+\infty} t^a e^{-t^2/2} dt$ converge. (← ceci vaut en fait pour tout $a \in \mathbb{R}$ mais pas cela)
- $\int_0^{+\infty} t^a e^{-t^2/2} dt$ converge.

▲ Voici enfin une démonstration conforme au programme

PARTIE I

Q1. $a = 0$. a) f_0 est définie sur $\mathbb{R}$ si $\int_x^{+\infty} e^{-t^2/2} dt$ converge pour tout réel x.

Le préliminaire montre que $\int_1^{+\infty} e^{-t^2/2} dt$ existe ($x = 1$ et $a = 0$ ...), de plus pour tout réel x, $\int_x^1 e^{-t^2/2} dt$ existe ; par conséquent $\int_x^{+\infty} e^{-t^2/2} dt$ converge pour tout réel x.

Par conséquent : "$D_{f_0} = \mathbb{R}$." (f_0 est en "fait" (sic) définie sur $\mathbb{R}$).

b) Posons, $\forall t \in \mathbb{R}$, $\varphi_0(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}$.

Soit X une var suivant une loi normale centrée réduite.

φ_0 est une densité de X.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $P(X \geq x) = 1 - P(X < x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_0(t) dt - \int_{-\infty}^{x} \varphi_0(t) dt = \int_x^{+\infty} \varphi_0(t) dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} f_0(x)$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} f_0(x) = P(X \geq x) = 1 - F_X(x)$ (F_X étant la fonction de répartition de X).

Donc $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} f_0(0) = P(X \geq 0) = \frac{1}{2}$; $f_0(0) = \frac{\sqrt{2\pi}}{2} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

$\lim_{x \to +\infty} f_0(x) = \lim_{x \to +\infty} \sqrt{2\pi}(1 - F_X(x)) = \sqrt{2\pi}(1-1) = 0$, $\lim_{x \to -\infty} f_0(x) = \sqrt{2\pi}(1-0) = \sqrt{2\pi}$

Donc $f_a(0) = \ldots$, $\lim_{x\to+\infty} f_a(x)=0$ et $\lim_{x\to 0} f_a(x) = \ldots$

Q2 Propriétés générales de f_a. ($a>-1$ ← oublié dans le texte à ce niveau).

a) $\forall x \in]0,+\infty[$, $f_a(x) = \int_1^{+\infty} t^a e^{-t^2/2}\,dt - \int_1^x t^a e^{-t^2/2}\,dt$

$x \mapsto \int_1^x t^a e^{-t^2/2}\,dt$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ car $t \mapsto t^a e^{-t^2/2}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$; par conséquent f_a est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f_a'(x) = 0 - x^a e^{-x^2/2}$

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f_a'(x) = -x^a e^{-x^2/2}$

f_a' est donc de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$ comme produit de deux fonctions de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$
(faut-il le montrer ? En toute rigueur oui, mais vu la longueur de l'épreuve... non)
f_a' étant de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$, f_a aussi.

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f_a''(x) = [-a x^{a-1} + x^{a+1}]e^{-x^2/2} = x^{a-1}(x^2-a)e^{-x^2/2}$

b) $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f_a'(x)<0$. f_a est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$

c) $\int_1^{+\infty} t^a e^{-t^2/2}\,dt$ converge ; en particulier $\lim_{x\to+\infty} \int_x^{+\infty} t^a e^{-t^2/2}\,dt = 0$

Donc $\lim_{x\to+\infty} f_a(x) = 0$.

Q3 Etude du cas $a>0$.

a) Posons $\forall t \in \mathbb{R}_+^*$, $\varphi_a(t) = t^a e^{-t^2/2}$ et $\varphi_a(0)=0$.
φ_a est évidemment continue sur $[0,+\infty[$ (... $\lim_{t\to 0} t^a e^{-t^2/2} = 0$ car $a>0$)
$\forall x \in [0,+\infty[$, $f_a(x) = \int_x^{+\infty} t^a e^{-t^2/2}\,dt = \int_x^{+\infty} \varphi_a(t)\,dt = \int_1^{+\infty} \varphi_a(t)\,dt - \int_1^x \varphi_a(t)\,dt$

φ_a étant continue sur $[0,+\infty[$, f_a est dérivable sur $\mathbb{R}_+$; de plus $f_a' = -\varphi_a$.
Par conséquent f_a' est continue sur $[0,+\infty[$.
Finalement f_a est de classe C^1 sur $[0,+\infty[$.
$f_a'(0) = -\varphi_a(0) = 0$.

b) $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $f_a'(x) = -x^a e^{-x^2/2}$; f_a' est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ (mais pas nécessairement en 0)
et $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f_a''(x) = x^{a-1}(x^2-a)e^{-x^2/2}$. Le signe de f_a'' sur $\mathbb{R}_+^*$ est celui de $x \mapsto x - \sqrt{a}$

Remarque.. f_a est convexe sur $[\sqrt{a},+\infty[$ et concave sur $[0,\sqrt{a}]$, le point de $\mathcal{C}_{f_a}$ d'abscisse $\sqrt{a}$ est un point d'inflexion.

c) voir p 3 (Q4 1)

Q4 Etude du cas $-1<a<0$.

a) $\int_0^{+\infty} t^a e^{-t^2/2}\,dt$ converge donc $\lim_{x\to 0^+}\int_x^{+\infty} t^a e^{-t^2/2}\,dt = \int_0^{+\infty} t^a e^{-t^2/2}\,dt$;

par conséquent : $\lim_{x\to 0^+} f_a(x) = f_a(0)$; f_a est continue en 0.

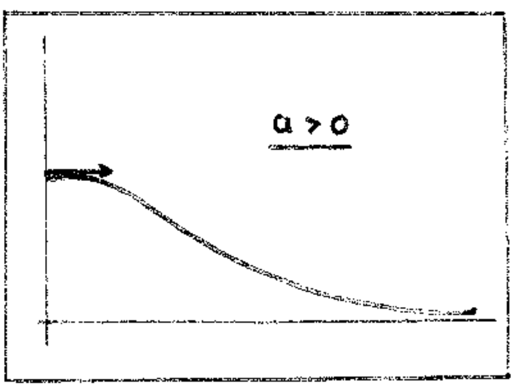
Nous avons vu dans Q2 que f_a est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$; par conséquent f_a est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

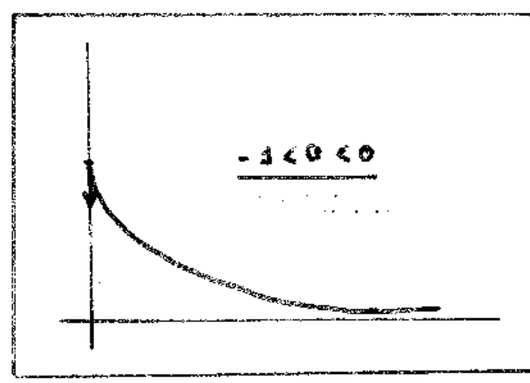
Finalement f_a est continue sur $\mathbb{R}_+$.

$\forall x \in]0,+\infty[$, $f_a'(x) = -x^a e^{-x^2/2}$ donc $\lim_{x\to 0^+} f_a'(x) = -\infty$ ($a<0$) ; par conséquent : $\lim_{x\to 0^+} \frac{f_a(x)-f_a(0)}{x-0} = -\infty$ ("théorème du prolongement de la dérivée").

Donc f_a n'est pas dérivable en 0 mais sa courbe représentative admet au point d'abscisse 0 une demi-tangente "verticale".

b) $\forall x\in\mathbb{R}_+^*$, $f_a''(x) = (x^2-a)\,e^{-x^2/2}\,x^{a-1} > 0$; f_a étant continue sur $\mathbb{R}_+$, f_a est convexe sur $\mathbb{R}_+$.





Q5 Etude de f_a au voisinage de $+\infty$.

a) Soit $x\in\mathbb{R}_+^*$. Soit $A\in\mathbb{R}_+^*$.

$$\int_x^A t^a e^{-t^2/2}\,dt = \int_x^A \underbrace{(-t^{a-1})}_{u}\underbrace{(-t e^{-t^2/2})}_{v'}\,dt = \left[-t^{a-1}e^{-t^2/2}\right]_x^A - \int_x^A -(a-1)t^{a-2}e^{-t^2/2}\,dt$$

$$\int_x^A t^a e^{-t^2/2}\,dt = -A^{a-1}e^{-A^2/2} + x^{a-1}e^{-x^2/2} + (a-1)\int_x^A t^{a-2}e^{-t^2/2}\,dt$$

$\lim_{A\to+\infty}(A^{a-1}e^{-A^2/2}) = 0$; donc $f_a(x) = x^{a-1}e^{-x^2/2} + (a-1)\int_x^{+\infty} t^{a-2}e^{-t^2/2}\,dt$

$$\forall x\in\mathbb{R}_+^*,\ f_a(x) = x^{a-1}e^{-x^2/2} + (a-1)\int_x^{+\infty} t^{a-2}e^{-t^2/2}\,dt$$

<u>Remarque</u>. L'existence de $\lim_{A\to+\infty}(A^{a-1}e^{-A^2/2})$ et sa "finitude" montre que $\int_x^{+\infty} t^{a-2}e^{-t^2/2}\,dt$ est de même nature que $\int_x^{+\infty} t^a e^{-t^2/2}\,dt$ donc converge (... au moins pour $a\neq 1$!)

b) $\forall t \in \mathbb{R}_+^*, \ t^{a-2} e^{-t^2/2} > 0$

Donc $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ \int_x^{+\infty} t^{a-2} e^{-t^2/2} > 0$.

$f_a(x) - x^{a-1}e^{-x^2/2}$ est donc du signe de $a-1$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$.

Si $a = 1$: $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ f_a(x) - x^{a-1}e^{-x^2/2} = 0$

Si $a > 1$: $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ f_a(x) - x^{a-1}e^{-x^2/2} > 0$

Si $a < 1$: $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ f_a(x) - x^{a-1}e^{-x^2/2} < 0$

c) $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ |f_a(x) - x^{a-1}e^{-x^2/2}| = \left|\int_x^{+\infty} t^{a-2}e^{-t^2/2}dt\right| |a-1| = \int_x^{+\infty} t^{a-2}e^{-t^2/2}dt \times |a-1|$

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. $\forall t \in [x,+\infty[, \ t^{a-2}e^{-t^2/2} = \frac{1}{t^2} t^a e^{-t^2/2} \leq \frac{1}{x^2} t^a e^{-t^2/2}$

$\underline{\int_x^{+\infty} t^a e^{-t^2/2}dt \text{ étant convergente}}$: $\int_x^{+\infty} t^{a-2}e^{-t^2/2}dt \leq \frac{1}{x^2}\int_x^{+\infty} t^a e^{-t^2/2}dt = \frac{1}{x^2} f_a(x)$

Finalement : $\underline{\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ |f_a(x) - x^{a-1}e^{-x^2/2}| \leq \frac{|a-1|}{x^2} f_a(x).}$

d) Ce qui précède donne : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ \left|1 - \frac{x^{a-1}e^{-x^2/2}}{f_a(x)}\right| \leq \frac{|a-1|}{x^2}$ (division par $f_a(x) > 0$!)

$\lim_{x \to +\infty} \frac{|a-1|}{x^2} = 0$; par conséquent, "par encadrement", $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^{a-1}e^{-x^2/2}}{f_a(x)} = 1$

Donc $\underline{f_a(x) \underset{+\infty}{\sim} x^{a-1}e^{-x^2/2}}$.

Application.- f_a est continue et positive sur $[0,+\infty[$; en particulier f_a est localement intégrable sur $[0,+\infty[$. La convergence de $\int_0^{+\infty} f_a(x)dx$ résulte donc de la convergence de $\int_1^{+\infty} f_a(x)dx$
& $\forall x \in [1,+\infty[, \ f_a(x) \geq 0$, $f_a(x) \underset{+\infty}{\sim} x^{a-1}e^{-x^2/2}$ et $\int_1^{+\infty} x^{a-1}e^{-x^2/2}dx$ converge (pour $a>0$ c'est immédiat et pour $-1<a\leq 0$ même démonstration que le cas précédent)

Soit $(\varepsilon, A) \in \mathbb{R}_+^{*2}$

$\int_\varepsilon^A f_a(x)dx = [x f_a(x)]_\varepsilon^A - \int_\varepsilon^A x f_a'(x)dx$ (f_a est de classe $\underline{C^1 \text{ sur } \mathbb{R}_+^*}$).

$\int_\varepsilon^A f_a(x)dx = A f_a(A) - \varepsilon f_a(\varepsilon) - \int_\varepsilon^A x(-x^a e^{-x^2/2})dx = A f_a(A) - \varepsilon f_a(\varepsilon) + \int_\varepsilon^A x^{a+1}e^{-x^2/2}dx$

f_a est continue en 0 donc $\lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon f_a(\varepsilon) = 0$. $A f_a(A) \underset{+\infty}{\sim} A\, A^{a-1}e^{-A^2/2} = A^a e^{-A^2/2}$ donc $\lim_{A\to+\infty} A f_a(A) = 0$

Par conséquent : $\int_0^{+\infty} f_a(x)dx = \int_0^{+\infty} x^{a+1}e^{-x^2/2}dx = f_{a+1}(0)$. $\underline{f_{a+1}(0) = \int_0^{+\infty} f_a(x)dx}$.

e) $-1 < a \leq 1$; $a-1 \leq 0$ donc $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ f_a(x) - x^{a-1}e^{-x^2/2} \leq 0$ $|a-1| \leq 2$ car $-1<a\leq 1$

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ |f_a(x) - x^{a-1}e^{-x^2/2}| \leq \frac{|a-1|}{x^2} f_a(x) \leq \frac{|a-1|}{x^2} x^{a-1}e^{-x^2/2} = |a-1| x^{a-3}e^{-x^2/2} \leq 2x^{a-3}e^{-x^2/2}$

Finalement : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ |f_a(x) - x^{a-1}e^{-x^2/2}| \leq 2x^{a-3}e^{-x^2/2}$

PARTIE II | Q1 Relation fonctionnelle vérifiée [illegible]

a) $\forall x\in\mathbb{R}_+^*,\ f_{a+2}(x) = x^{a+1}e^{-x^2/2} + (a+1)\int_x^{+\infty} t^a e^{-t^2/2}\,dt$ (I Q5 a))

donc $\forall x\in\mathbb{R}_+^*,\ f_{a+2}(x) = x^{a+1}e^{-x^2/2} + (a+1) f_a(x)$.

$\lim\limits_{x\to 0}(x^{a+1}e^{-x^2/2}) = 0$ $(a+1>0)$ et f_a et f_{a+2} sont continues en 0. En passant à la limite en 0 par la relation précédente on obtient : $f_{a+2}(0) = (a+1)f_a(0)$, c'est à dire :

$\varphi(a+2) = (a+1)\varphi(a)$.

b) Une récurrence simple donne : $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \varphi(a+2n) = \prod_{k=0}^{n-1}(a+2k+1)\ \varphi(a)$

$\varphi(0) = \int_0^{+\infty} e^{-t^2/2}\,dt = \frac{\sqrt{2\pi}}{2} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

$\varphi(1) = \int_0^{+\infty} t e^{-t^2/2}\,dt = \left[-e^{-t^2/2}\right]_0^{+\infty} = 1$ (en toute rigueur $\int_0^A \cdots$ et passage à la limite)

$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \varphi(2n) = \prod_{k=0}^{n-1}(2k+1)\ \varphi(0) \underset{\text{bien connu}}{=} \frac{(2n)!}{2^n n!}\varphi(0) = \frac{(2n)!}{2^n n!}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \varphi(2n) = \frac{(2n)!}{2^n n!}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$; ceci vaut encore pour $n=0$. Finalement :

$$\forall n\in\mathbb{N},\ \varphi(2n) = \frac{(2n)!}{2^n n!}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \varphi(2n+1) = \prod_{k=0}^{n-1}(2k+2)\ \varphi(1) = 2^n n!\,\varphi(1) = 2^n n!$

$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \varphi(2n+1) = 2^n n!$; ceci vaut encore pour $n=0$, finalement :

$$\forall n\in\mathbb{N},\ \varphi(2n+1) = 2^n n!$$

[Attention que pour $t=0$ la définition de $S_n(t)$ pose problème ! ($k=0$ et $a<0$)]

Q2 Développement en série de $g_n(x)$.

a) $h : u\mapsto e^{-u}$ est de classe C^∞ sur $[0, t^2/2]$. $\forall k\in\mathbb{N},\ h^{(k)}(0) = (-1)^k$

$\forall n\in\mathbb{N},\ h(t^2/2) = \sum_{k=0}^{n}\frac{(t^2/2-0)^k}{k!}h^{(k)}(0) + \int_0^{t^2/2}\frac{(t^2/2-u)^n}{n!}h^{(n+1)}(u)\,du$

$\forall n\in\mathbb{N},\ e^{-t^2/2} = \sum_{k=0}^{n}\frac{t^{2k}}{2^k k!}(-1)^k + \frac{(-1)^{n+1}}{n!}\int_0^{t^2/2}(t^2/2-u)^n e^{-u}\,du$. Supposons $t>0$

(et non pas simplement $t\geq 0$)

$t^a e^{-t^2/2} = S_n(t) + \frac{(-1)^{n+1}}{n!}t^a\int_0^{t^2/2}(t^2/2-u)^n e^{-u}\,du$

$t^a e^{-t^2/2} - S_n(t) = \frac{(-1)^{n+1}}{n!}t^a\int_0^{t^2/2}(t^2/2-u)^n e^{-u}\,du$.

$\forall u \in [0, t^2/2]$, $(t^2/2 - u)^n e^{-u} \geq 0$ donc $t^a \displaystyle\int_0^{t^2/2} (t^2/2-u)^n e^{-u}\,du \geq 0$.

Le signe de $t^a e^{-t^2/2} - S_n(t)$ est donc celui de $\dfrac{(-1)^{n+1}}{n!}$ ou celui de $(-1)^{n+1}$.

Par conséquent si n est pair : $\forall t \in \mathbb{R}_+^*$, $t^a e^{-t^2/2} \leq S_n(t)$;
si n est impair : $\forall t \in \mathbb{R}_+^*$, $t^a e^{-t^2/2} \geq S_n(t)$.

Clairement : $\forall t \in \mathbb{R}_+^*, \forall (p,q) \in \mathbb{N}^2,\ S_{2p+1}(t) \leq t^a e^{-t^2/2} \leq S_{2q}(t)$.

b) Soit $t \in \mathbb{R}_+^*$ et soit $n \in \mathbb{N}$.

$$|t^a e^{-t^2/2} - S_n(t)| = \frac{t^a}{n!}\int_0^{t^2/2} (t^2/2-u)^n e^{-u}\,du \leq \frac{t^a}{n!}\left(\frac{t^2}{2}\right)^n \int_0^{t^2/2} e^{-u}\,du = \frac{t^{2n+a}}{2^n n!}\left[-e^{-u}\right]_0^{t^2/2}$$

$$|t^a e^{-t^2/2} - S_n(t)| \leq \frac{t^{2n+a}}{2^n n!}(1 - e^{-t^2/2}) \leq \frac{t^{2n+a}}{2^n n!}.$$

$\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in \mathbb{R}_+^*$, $|t^a e^{-t^2/2} - S_n(t)| \leq \dfrac{t^{2n+a}}{2^n n!}$; les spécialistes des séries alternées riront !

Remarque. On pouvait aussi utiliser a) " + 2 cas " pour obtenir cette inégalité !!

c) Soit $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $\varepsilon \in]0, x[$.

$$\left|\int_\varepsilon^x t^a e^{-t^2/2}\,dt - \int_\varepsilon^x S_n(t)\,dt\right| \leq \int_\varepsilon^x |t^a e^{-t^2/2} - S_n(t)|\,dt \leq \int_\varepsilon^x \frac{t^{2n+a}}{2^n n!}\,dt = \left[\frac{t^{2n+a+1}}{(2n+a+1)\,2^n n!}\right]_\varepsilon^x$$

$$\left|\int_\varepsilon^x t^a e^{-t^2/2}\,dt - \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2^k k!}\left[\frac{1}{2k+a+1} t^{2k+a+1}\right]_\varepsilon^x\right| \leq \frac{x^{2n+a+1} - \varepsilon^{2n+a+1}}{(2n+a+1)\,2^n n!}$$

En faisant tendre ε vers 0 on obtient :

$$\left| g_a(x) - \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2^k k!}\,\frac{x^{2k+a+1}}{2k+a+1}\right| \leq \frac{x^{2n+a+1}}{2^n n!\,(2n+a+1)}$$

$\forall y \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{y^n}{n!} = 0$ (... la série de terme général $\dfrac{y^n}{n!}$ converge), donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(x^2/2)^n}{n!} = 0$

comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x^{a+1}}{2^n(2n+a+1)} = 0$: $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x^{2n+a+1}}{2^n n!\,(2n+a+1)} = 0$

Par conséquent : $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k+a+1}}{2^k k!\,(2k+a+1)} = g_a(x)$

donc pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $g_a(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+a+1}}{2^k k!\,(2k+a+1)}$

Q3) Méthode d'approximation de $\varphi(a)$.

a) $\forall a\in]-1,1]$, $\forall p\in\mathbb{N}^*$, $2p^{a-3}e^{-p^2/2} \leqslant 2p^{-2}e^{-p^2/2} = \dfrac{e^{-p^2/2}}{p^2/2}$

Il nous faut déterminer le plus petit strictement p tel que : $\dfrac{e^{-p^2/2}}{p^2/2} \leqslant 10^{-5}$

La suite $\left(\dfrac{e^{-p^2/2}}{p^2/2}\right)_{p\geqslant 1}$ est décroissante comme produit de deux suites strictement décroissantes et positives ; de plus elle converge vers 0 ; par conséquent $\exists!\, p_0\in\mathbb{N}^*$ tel que :

$\forall p\in [\![1,p_0[\![$, $\dfrac{e^{-p^2/2}}{p^2/2} > 10^{-5}$ et $\forall p\in [\![p_0,+\infty[\![$, $\dfrac{e^{-p^2/2}}{p^2/2} \leqslant 10^{-5}$.

$$\frac{e^{-p^2/2}}{p^2/2} \simeq \begin{cases} 4{,}19\times 10^{-5} & \text{pour } p=4 \\ 2{,}98\times 10^{-7} & \text{pour } p=5 \end{cases} \quad ; \text{ donc } p_0=5$$

5 est le plus petit entier p tel que : $\forall a\in]-1,1]$, $2p^{a-3}e^{-p^2/2}\leqslant 10^{-5}$.

b) $a\in]-1,1]$. $\forall x\in\mathbb{R}_+^*$, $|\varphi_a(x) - x^{a-1}e^{-x^2/2}| \leqslant 2x^{a-3}e^{-x^2/2}$

Pour $x=5$: $|\varphi_a(5) - 5^{a-1}e^{-5^2/2}| \leqslant 2\,5^{a-3}e^{-5^2/2} \leqslant 10^{-5}$

Pour $x=5$: $\underline{|\varphi_a(5) - 5^{a-1}e^{-5^2/2}| \leqslant 10^{-5}}$

c) $x=5$ et $a\in]-1,1]$

$\forall k\in\mathbb{N}$, $\dfrac{u_{k+1}}{u_k} = \dfrac{5^{2k+2}}{2^{k+1}(k+1)!\,(2k+2+a+1)} \times \dfrac{2^k\, k!\,(2k+a+1)}{5^{2k}} = \dfrac{25\,(2k+a+1)}{2(k+1)(2k+a+3)}$

$\forall k\in\mathbb{N}$, $\underline{u_{k+1}} = 12{,}5\,\dfrac{2k+a+1}{(k+1)(2k+a+3)}\,u_k = \underline{12{,}5\times\dfrac{1}{k+1}\times\left[1-\dfrac{2}{2k+a+3}\right]u_k}$.

Notons que $u_0 = \dfrac{1}{a+1}$.

Calculer u_k n'a strictement aucun intérêt. Ce qui importe c'est de savoir calculer $S_n(5)$ ou encore $S_n(5) - 5^{a-1}e^{-5^2/2}$.
Voir donc à la fin

d) $a\in]-1,1]$. Version 1... Version rapide.

$\begin{cases} 2n+a+1 \leqslant 2n+1+1 = 2(n+1) \\ 2n+a+1 > 2n \end{cases}$

Soit $n\in\mathbb{N}^*$. $|\varphi_a(5) - S_n(5)| \leqslant \dfrac{5^{2n+a+1}}{2^n\, n!\,(2n+a+1)} \leqslant \dfrac{5^{2(n+1)}}{2^n\, n!\,(2n)} = \dfrac{5^{2(n+1)}}{2^{n+1}\times n\times n!} = \dfrac{(12{,}5)^{n+1}}{n\times n!}$

Un programme simple montre que le plus petit entier n tel que : $\dfrac{(12{,}5)^{n+1}}{n\times n!}\leqslant 10^{-5}$ est 41... et pas 39 le bœuf !

__Version 2.-__ Davantage pour le même résultat.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Posons $\forall a \in]-1,1]$, $f(a) = \dfrac{5^a}{2n+a+1}$

f est dérivable sur $]-1,1]$ et $\forall a \in]-1,1]$, $f'(a) = \dfrac{1}{(2n+a+1)^2}\left[\ln 5 \times 5^a \times (2n+a+1) - 5^a\right]$

$\forall a \in]-1,1]$, $f'(a) = \dfrac{5^a \ln 5}{(2n+a+1)^2}\left[2n+a+1 - \dfrac{1}{\ln 5}\right] > 0$ $\left(\dfrac{1}{\ln 5} \simeq 0,62,\ a+1>0 \text{ et } n \geq 1\right)$

f est donc croissante sur $]-1,1]$. $\forall a \in]-1,1]$, $\dfrac{5^a}{2n+a+1} \leq \dfrac{5}{2n+2}$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $|g_a(5) - A_n(5)| \leq \dfrac{5^{2n+a+1}}{2^n n!\,(2n+a+1)} = \dfrac{5^{2n+1}}{2^n n!} f(a) \leq \dfrac{5^{2n+1}}{2^n n!} \times \dfrac{5}{2n+2} = \dfrac{5^{2(n+1)}}{2^{n+1}(n+1)!}$

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $|g_a(5) - A_n(5)| \leq \dfrac{(12,5)^{n+1}}{(n+1)!}$ $\left(\text{au lieu de } \dfrac{(12,5)^{n+1}}{n \times n!}\right)$

Posons $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $t_n = \dfrac{(12,5)^{n+1}}{(n+1)!}$. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{t_{n+1}}{t_n} = \dfrac{12,5}{n+2}$

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{12,5}{n+2} < 1 \iff n > 10,5$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{12,5}{n+2} > 1 \iff n < 10,5$

Par conséquent $(t_n)_{n \in [\![1,11]\!]}$ est strictement croissante et $(t_n)_{n \geq 11}$ est décroissante strictement

$\forall n \in [\![1,11]\!]$, $t_n \geq t_1 = 78,125$. De plus $\lim\limits_{n \to +\infty} t_n = 0$.

Par conséquent : $\exists!\, n_0 \in \mathbb{N}^*$, $\forall n \in [\![1, n_0-1]\!]$, $t_n > 10^{-5}$ et $\forall n \in [\![n_0, +\infty[\![$, $t_n \leq 10^{-5}$

Notons que $n_0 > 11$!

$t_n \simeq \begin{cases} 2,8 \times 10^{-5} \text{ pour } n = 40 \\ 8,1 \times 10^{-6} \text{ pour } n = 41 \end{cases}$

Donc $|g_a(5) - A_n(5)| \leq 10^{-5}$ pour tout $a \in]-1,1]$ dès que $n \geq 41$.

__e)__ Oui ! Soit $a \in]-1,1]$, $x = 5$ et $n = 41$.

$|\varphi(a) - x^a e^{-x^2/2} - A_n(x)| = |f_a(x) + g_a(x) - x^a e^{-x^2/2} - A_n(x)| \leq |f_a(x) - x^a e^{-x^2/2}| + |g_a(x) - A_n(x)|$

$|\varphi(a) - x^a e^{-x^2/2} - A_n(x)| \leq 10^{-5} + 10^{-5} = 2 \times 10^{-5}$

Pour $a \in]-1,1]$, $x = 5$ et $n = 41$, $x^a e^{-x^2/2} - A_n(x)$ est une valeur approchée à 10^{-4} près de $\varphi(a)$.

Donnons maintenant un programme permettant pour $a \in]-1,1]$ d'obtenir récursivement $\varphi(a)$ à 10^{-E} près.

Rappelons que : $\forall a \in]-1,1]$, $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $|f_a(x) - x^{a-1} e^{-x^2/2}| \leq 2x^{a-3} e^{-x^2/2}$

et que : $\forall a \in]-1,+\infty[$, $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $|g_a(x) - s_n(x)| \leq \dfrac{x^{2n+a+1}}{2^n n! (2n+a+1)}$.

La 1ère étape consiste à calculer x entier tel que : $2x^{a-3} e^{-x^2/2} < \dfrac{10^{-p}}{2}$

La 2ème étape consiste à calculer $s_n(x)$ jusqu'à ce que : $\dfrac{x^{2n+a+1}}{2^n n! (2n+a+1)} < \dfrac{10^{-p}}{2}$

On affiche pour finir $s_n(x) + x^{a-1} e^{-x^2/2}$. <u>En CASIO 7000G.</u>

```
"A"?→A:"P"?→P:(10 x^y(-P))÷2→Z:0→X
Lbl 0: X+1→X: 2×X x^y(A-3)×e(-X²÷2) ≥ Z ⇒ Goto 0: X ◢
X x^y(A+1)÷(A+1)→U: U→S: 0→K
Lbl 1
K+1→K: -X² U(2K+A-1)÷2÷K÷(2K+A+1)→U: S+U→S: Abs(U) ≥ Z ⇒ Goto 1: K ◢
S+(X x^y(A-1)) e(-X²÷2) ◢
```

Les résultats !

$a = 1$

<u>$\varphi(a) = 1$</u>

$p = 3$	$X = 4$	$N = 26$	1,000 049 646
$p = 4$	$X = 4$	$N = 28$	1,000 003 705
$p = 5$	$X = 5$	$N = 42$	1,000 000 507
$p = 6$	$X = 5$	$N = 44$	1,000 000 009
$p = 7$	$X = 6$	$N = 61$	0,999 999 002
$p = 8$	$X = 6$	$N = 63$	0,999 990 0443
$p = 9$	$X = 7$	$N = 83$	1,000 261 139
$p = 10$	$X = 7$	$N = 84$	1,000 261 139
$p = 11$	$X = 7$	$N = 86$	1,000 261 139
$p = 12$	$X = 8$	$N = 109$	3,499 384 244

! ← méditez !

$a = 0$ $\varphi(a) = \sqrt{\pi/2} \simeq 1,253\ 314\ 137$

$p = 3$	$X = 4$	$N = 25$	1,253 274 694
$p = 4$	$X = 4$	$N = 21$	1,253 315 105
$p = 5$	$X = 5$	$N = 41$	1,253 313 783
$p = 6$	$X = 5$	$N = 42$	1,253 314 275
$p = 7$	$X = 6$	$N = 59$	1,253 313 646
$p = 8$	$X = 6$	$N = 61$	1,253 313 655
$p = 9$	$X = 6$	$N = 63$	1,253 313 656

En T°4.

```
program hec91d;

uses crt;
var p,x,k:integer;a,Epsilon,u,s:real;

begin
{clrscr;}
write('Donnez a. a=');readln(a);
write('Précision de 10 puissance -p.Donnez p. p=');readln(p);
Epsilon:=exp(-p*ln(10))/2;

x:=1;
while 2*exp((a-3)*ln(x)-x*x/2)>Epsilon do x:=x+1;
writeln;write('x vaut ',x);

u:=exp((a+1)*ln(x))/(a+1);s:=u;k:=0;
while abs(u)>Epsilon do
      begin
      k:=k+1;u:=-u*x*x/2/k*(1-2/(k+k+a+1));s:=s+u;
      end;

writeln('. On a calculé s(',k,').');writeln;
write(s+exp((a-1)*ln(x)-x*x/2),' est une valeur approchée ');
writeln('de Φ(',a:1:0,') à ',2*Epsilon,' près');
end.
```

```
Donnez a. a=1
Précision de 10 puissance -p.Donnez p. p=6

x vaut 5. On a calculé s(44).

 1.0000001085E+00 est une valeur approchée de Φ(1) à  1.0000000000E-06 près
```

```
Donnez a. a=1
Précision de 10 puissance -p.Donnez p. p=8

x vaut 6. On a calculé s(63).

 1.0000119550E+00 est une valeur approchée de Φ(1) à  1.0000000000E-08 près
```

```
Donnez a. a=1
Précision de 10 puissance -p.Donnez p. p=10

x vaut 7. On a calculé s(84).

 1.0072927043E+00 est une valeur approchée de Φ(1) à  1.0000000000E-10 près
```

```
Donnez a. a=0
Précision de 10 puissance -p.Donnez p. p=5

x vaut 5. On a calculé s(41).

 1.2533137864E+00 est une valeur approchée de Φ(0) à  1.0000000000E-05 près
```

```
Donnez a. a=0
Précision de 10 puissance -p.Donnez p. p=6

x vaut 5. On a calculé s(42).

 1.2533142785E+00 est une valeur approchée de Φ(0) à  1.0000000000E-06 près
```

LES résultats en TP4

Présentation différente mais même algorithme.

Donnez la valeur de a. a=1

p	x	n	Valeur approchée
3	4	26	1.00004964600
4	4	28	1.00000370510
5	5	42	1.00000060750
6	5	44	1.00000010850
7	6	61	1.00001195060
8	6	63	1.00001195500
9	7	83	1.00729270430
10	7	84	1.00729270430
11	7	86	1.00729270430
12	8	109	1.36903066960

Donnez la valeur de a. a=0

p	x	n	Valeur approchée
3	4	25	1.25327469450
4	4	27	1.25331510500
5	5	41	1.25331378640
6	5	42	1.25331427850
7	6	59	1.25331406840
8	6	61	1.25331407720
9	6	63	1.25331407790
10	7	83	1.25399923320
11	7	85	1.25399923320
12	7	86	1.25399923320

Ici je transforme : $1 - \frac{2}{2k+1+a}$ en $\frac{2k-1+a}{2k+1+a}$!

Donnez la valeur de a. a=1

p	x	n	Valeur approchée
3	4	26	1.00004964580
4	4	28	1.00000370490
5	5	42	1.00000056060
6	5	44	1.00000006160
7	6	61	1.00000942800
8	6	63	1.00000943240
9	7	83	1.00594676300
10	7	84	1.00594676300
11	7	86	1.00594676300
12	8	109	-0.51829182041

Donnez la valeur de a. a=0

p	x	n	Valeur approchée
3	4	25	1.25327469440
4	4	27	1.25331510490
5	5	41	1.25331377730
6	5	42	1.25331426950
7	6	59	1.25331726370
8	6	61	1.25331727250
9	6	63	1.25331727320
10	7	83	1.25305127980
11	7	85	1.25305127980
12	7	86	1.25305127980

Avec une TI 82 en calculant directement $(-1)^k \frac{x^{2k+a+1}}{2^k k! (2k+a+1)}$ on obtient la même chose pour x et n et :

	a = 1	a = 0
p=3	1,000 049 646	1,253 274 694
p=4	1,000 003 705	1,253 315 105
p=5	1,000 000 539	1,253 313 782
p=6	1,000 000 04	1,253 314 274
p=7	1,000 000 103	1,253 314 15
p=8	1,000 000 108	1,253 314 159
p=9	OVER FLOW	OVER FLOW
p=10	" "	"

MORALE :

VIVE L'ALGOGORITHMIQUE

RETOUR SUR LA CONVERGENCE DE $\int_0^x t^a e^{-t^2/2}\,dt$ ($x\in\mathbb{R}_+^*$ et $a\in\mathbb{R}$)

$\varphi_a : t\mapsto t^a e^{-t^2/2}$ est continue sur $]0,x]$ donc localement intégrable.

$$\forall \varepsilon\in]0,x],\ \int_\varepsilon^x t^a e^{-t^2/2}\,dt \underset{u=1/t}{=} \int_{1/\varepsilon}^{1/x} (1/u)^a e^{-\frac{1}{2u^2}}\left(-\frac{1}{u^2}\right)du = \int_{1/x}^{1/\varepsilon}\frac{1}{u^{a+2}}\,e^{-\frac{1}{2u^2}}\,du$$

$\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+}\varepsilon = +\infty$ donc $\int_0^x t^a e^{-t^2/2}$ est de même nature que : $\int_{1/x}^{+\infty}\frac{1}{u^{a+2}}\,e^{-\frac{1}{2u^2}}\,du$.

$\hat{\varphi}_a : u\mapsto \frac{1}{u^{a+2}}\,e^{-\frac{1}{2u^2}}$ est positive et continue sur $]\frac{1}{x},+\infty[$ et $\hat{\varphi}_a(u)\underset{+\infty}{\sim}\frac{1}{u^{a+2}}$

Par conséquent $\int_{1/x}^{+\infty}\hat{\varphi}_a(u)\,du$ est de même nature que $\int_{1/x}^{+\infty}\frac{du}{u^{a+2}}$. Cette dernière intégrale converge si et seulement si $a+2>1$ (Riemann).

Finalement : $\int_0^x t^a e^{-t^2/2}\,dt$ converge si et seulement si $a>-1$.

LE PROGRAMME DE II Q3 c)

```
program hec91a;

uses crt;
var n,k:integer;a,u:real;

begin
clrscr;

write('Donnez a. a=');readln(a);
write('Donnez n. n=');readln(n);

u:=1/(a+1);
for k:=0 to n-1 do
     begin
     u:=u*12.5/(k+1)*(1-2/(k+k+3+a));
     end;

writeln;
writeln('u(',n,')=',u);
end.
```