

École des Hautes Études Commerciales

CONCOURS D'ADMISSION DE 1990

Mathématiques I

OPTION GÉNÉRALE

Mercredi 9 mai 1990, de 8 h. à 12 h.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

sont autorisées : règles graduées, tables de valeurs numériques **sans formulaire**, calculatrices de poche, y compris les calculatrices programmables et alphanumériques, à fonctionnement autonome, sans imprimante, sans document d'accompagnement et de format maximum 21 cm de long x 15 cm de large, à raison d'une seule calculatrice par candidat.

L'objet du problème est l'étude de l'interpolation d'une fonction par des fonctions trigonométriques.

Dans la première partie, on étudie une fonction numérique utilisée par la suite.

La deuxième partie (indépendante de la précédente) est destinée à établir des propriétés d'une matrice qui permet d'obtenir les fonctions d'interpolation.

Enfin, dans la troisième partie, on teste la convergence du procédé d'interpolation dans le cas particulier de la fonction constante et égale 1.

PARTIE I

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ par les relations :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{1}{x} - \frac{\cos x}{\sin x} & \text{si } x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\\ f(0) = 0 \end{cases}$$

1. Montrer que la fonction f est continue sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.
2. Calculer $f'(x)$ pour $x > 0$.
3. Montrer que la fonction f est de classe C^1 sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.
4. Étudier la variation de f et construire la courbe représentative de cette fonction.

PARTIE II

Soit $A_n = (a_{ij})$ la matrice carrée d'ordre n , où $n \geq 2$, dont l'élément à l'intersection de la $i^{\text{ème}}$ ligne et de la $j^{\text{ème}}$ colonne est défini par :

$$\begin{cases} a_{ij} = 1 & \text{si } |i-j| = 1 \\ a_{ij} = 0 & \text{si } |i-j| \neq 1 \end{cases}$$

Ainsi :

$$A_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Dans cette partie, on se propose d'abord de diagonaliser la matrice A_n , puis d'étudier une matrice dont les colonnes sont des vecteurs propres de A_n .

On identifie les matrices colonnes :

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

avec les vecteurs de $\mathbb{R}^n$ muni de sa base canonique.

En particulier, on identifie les matrices à une ligne et une colonne aux nombres réels.

Par exemple, on écrira :

$${}^tXY = {}^tYX = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

$$\text{pour } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

où tX et tY désignent les matrices transposées de X et de Y .

1. Pour tout élément X de $\mathbb{R}^n$, on pose :

$$q_n(X) = {}^tX A_n X.$$

Calculer $A_n X$ et vérifier que :

$$q_n(X) = 2 \sum_{i=1}^{n-1} x_i x_{i+1}.$$

2. Étude du cas particulier $n = 2$

a) Montrer que, pour tout élément X de $\mathbb{R}^2$:

$$-{}^tX X \leq q_2(X) \leq {}^tX X.$$

b) Déterminer les valeurs propres et une base de vecteurs propres de A_2 .

c) Trouver les éléments X de $\mathbb{R}^2$ tels que $|q_2(X)| = {}^tX X$.

3. Encadrement des valeurs propres de A_n

a) Montrer que, pour tout élément X de $\mathbb{R}^n$:

$$-\sum_{i=1}^{n-1} (x_i^2 + x_{i+1}^2) \leq q_n(X) \leq \sum_{i=1}^{n-1} (x_i^2 + x_{i+1}^2)$$

b) En déduire que, pour tout élément X de $\mathbb{R}^n$:

$$-2^t X^t X \leq q_n(X) \leq 2^t X^t X$$

et que l'égalité $q_n(X) = 2^t X^t X$ équivaut à $X = 0$.

c) Soient λ une valeur propre de A_n et X un vecteur propre associé à λ . Montrer que :

$$q_n(X) = \lambda^t X^t X.$$

En conclure que :

$$-2 < \lambda < 2.$$

4. Diagonalisation de la matrice A_n

Pour tout élément λ de l'intervalle $] -2, 2[$, on note E_λ l'ensemble des suites réelles $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ telles que, pour tout nombre entier naturel k :

$$u_{k+2} = \lambda u_{k+1} - u_k.$$

On pose $\lambda = 2 \cos t$, où $t \in]0, \pi[$.

a) Soit $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ un élément de E_λ . Exprimer u_k en fonction de u_0, u_1, k et t .

b) Soit $F_\lambda(n)$ le sous-espace vectoriel de E_λ constitué des éléments $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de E_λ vérifiant la condition supplémentaire :

$$u_0 = u_{n+1} = 0.$$

Montrer que $F_\lambda(n)$ est un sous-espace de E_λ de dimension au plus 1. Déterminer, en discutant selon les valeurs de t , les éléments de $F_\lambda(n)$.

Plus précisément, montrer que :

$$\text{Si } (n+1)t \equiv 0 [n] : F_\lambda(n) = \text{Vect}((u_k)_{k \geq 0})$$

$$\text{Si } (n+1)t \not\equiv 0 [n] : F_\lambda(n) = \{0_{E_\lambda}\}.$$

c) Soit λ un nombre réel. Montrer que λ est une valeur propre de A_n et que le vecteur non nul $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ est un vecteur propre associé à λ si et seulement si la

suite $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ définie par les conditions $u_0 = 0, u_k = x_k$ pour $1 \leq k \leq n, u_{n+1} = 0$ et $u_{n+k+2} = \lambda u_{n+k+1} - u_{n+k}$ pour tout entier k , appartient à $F_\lambda(n)$.

d) En conclure que les valeurs propres de A_n sont les nombres réels $\lambda_p = 2 \cos \theta_p$, où $\theta_p = \frac{p\pi}{n+1}$ et p entier tel que $1 \leq p \leq n$. Montrer que les vecteurs :

$$X_p = \begin{pmatrix} \sin \theta_p \\ \sin 2\theta_p \\ \vdots \\ \sin n\theta_p \end{pmatrix}$$

sont des vecteurs propres associés à ces valeurs propres.

On est prêt de faire
un peu plus propre
que l'énoncé.

5. Application

On applique les résultats précédents à l'étude de la matrice M_n dont les colonnes sont les vecteurs X_p .

a) Soient λ et μ des valeurs propres distinctes de A_n , X et Y des vecteurs propres associés respectivement à λ et à μ . Vérifier que :

$$\lambda {}^t X Y = \mu {}^t X Y.$$

En déduire que, pour tout couple (p, q) de nombres entiers naturels distincts compris entre 1 et n :

$$\sum_{k=1}^n (\sin k \theta_p) (\sin k \theta_q) = 0.$$

b) On considère le nombre complexe $z = e^{2i\theta_p}$. Vérifier que :

$$\sum_{k=0}^n z^k = 0.$$

En déduire que :

$$\sum_{k=1}^n \cos 2k \theta_p = -1.$$

Montrer enfin que :

$${}^t X_p X_p = \frac{n+1}{2}.$$

c) Soit $M_n = (b_{kl})$ la matrice carrée d'ordre n telle que :

$$b_{kl} = \sin \frac{kl\pi}{n+1} = \sin k \theta_l = \sin l \theta_k.$$

En utilisant les résultats précédents, montrer que $M_n^2 = \alpha_n I_n$, où I_n est la matrice unité d'ordre n et α_n un nombre réel que l'on précisera. En déduire que la matrice M_n est inversible et déterminer son inverse.

PARTIE III

1. À tout élément $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^n$ on associe la fonction numérique g définie

sur $\mathbb{R}$ par la relation :

$$g(t) = \sum_{k=1}^n a_k \sin kt.$$

a) On rappelle que, pour tout couple (a, b) de nombres réels :

$$2 \sin a \sin b = \cos(a-b) - \cos(a+b).$$

Pour tout couple (k, l) de nombres entiers naturels, calculer l'intégrale :

$$\int_0^\pi \sin kt \sin lt \, dt.$$

b) En déduire que :

$$\int_0^\pi g^2(t) \, dt = \frac{\pi}{2} \sum_{k=1}^n a_k^2.$$

c) Calculer $M_n A$. Montrer que, pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq n$:

$$a_k = \frac{2}{n+1} \sum_{p=1}^n g(\theta_p) \sin k \theta_p.$$

d) Soit $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ un élément de $\mathbb{R}^n$. Montrer qu'il existe un élément $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^n$ et un seul tel que, pour tout entier p avec $1 \leq p \leq n$:

$$g(\theta_p) = b_p.$$

L'objet des questions suivantes est d'étudier l'unique fonction g_n telle que, pour tout entier p compris entre 1 et n :

$$g_n(\theta_p) = 1.$$

On écrira :

$$g_n(t) = \sum_{k=1}^n a_k(n) \sin kt.$$

2. Étude des coefficients $a_k(n)$

a) Montrer $a_k(n) = 0$ si l'entier k est pair, et que :

$$a_k(n) = \frac{2}{n+1} \frac{\cos \frac{k\pi}{2(n+1)}}{\sin \frac{k\pi}{2(n+1)}}$$

si k est impair. (On pourra s'inspirer de la méthode employée dans la question II 5 b).)

b) Grâce aux résultats de la première partie, en déduire que, pour tout entier impair k tel que $0 \leq k \leq n$:

$$0 \leq \frac{4}{k\pi} - a_k(n) \leq \frac{4}{(n+1)\pi}.$$

c) Soit k un nombre entier naturel (pair ou impair). Déterminer :

$$\beta_k = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_k(n).$$

3. Pour tout nombre réel t , on pose :

$$h_n(t) = \sum_{k=1}^n \beta_k \sin kt.$$

a) En utilisant les résultats des questions 1 b) et 2 b), montrer que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^\pi [g_n(t) - h_n(t)]^2 dt = 0.$$

b) On admet que :

$$\frac{\pi^2}{8} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}.$$

Prouver que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^\pi [1 - h_n(t)]^2 dt = 0.$$

c) En déduire la limite lorsque n tend vers $+\infty$ de l'intégrale :

$$J_n = \int_0^\pi [1 - g_n(t)]^2 dt.$$

PARTIE I

Q1, Q2 et Q3! $x \mapsto \frac{1}{x}$ est continue et dérivable sur $]0, \frac{\pi}{2}]$ donc f est continue et dérivable sur $]0, \frac{\pi}{2}]$.

$$\forall x \in]0, \frac{\pi}{2}], f(x) = \frac{\sin x - x \cos x}{x^2 \sin x}.$$

$$\sin x - x \cos x = x - \frac{x^3}{6} - x(1 - \frac{x^2}{2}) + o(x^3) = \frac{x^3}{2} - \frac{x^3}{6} + o(x^3); \sin x - x \cos x = \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

$$\text{donc } f(x) \sim_0 \frac{(x^3) \frac{x^3}{3}}{x^2 \times \sin x} = \frac{1}{3} x; \text{ par conséquent: } \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} - \frac{\cos x}{\sin x} \right) = 0 = f(0).$$

$$\text{rien qu': } \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{f(x)}{x} \sim_0 \frac{1}{3} \frac{x}{x} = \frac{1}{3}; \text{ par conséquent: } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{1}{3}$$

Finalement: f est continue et dérivable en 0. $f'(0) = \frac{1}{3}$.

Pour $f''(x)$: f est continue et dérivable sur $]0, \frac{\pi}{2}]$.

$$f'(x) = \frac{1}{3} \text{ et } \forall x \in]0, \frac{\pi}{2}], f'(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{\sin^2 x} = \frac{x^2 - \sin^2 x}{x^2 \sin^2 x}.$$

↑
dérivé de la tangente!

f' est donc dérivable sur $]0, \frac{\pi}{2}]$.

$$\frac{x^2 - \sin^2 x}{x^2 \sin^2 x} \sim_0 \frac{(x - \sin x)(x + \sin x)}{x^4} \sim_0 \frac{x^3/6}{x^4} (x + \sin x) = \frac{1}{6} \left(1 + \frac{\sin x}{x} \right) \text{ donc } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - \sin^2 x}{x^2 \sin^2 x} = \frac{1}{3} = f''(0)$$

$$x - \sin x \sim x^3/6$$

Finalement $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = f'(0)$; f' est continue en 0.

Conclusion... f est dérivable sur $[0, \frac{\pi}{2}]$. $f'(0) = \frac{1}{3}$ et $\forall x \in]0, \frac{\pi}{2}], f'(x) = \frac{x^2 - \sin^2 x}{x^2 \sin^2 x}$.

Q4) $\forall x \in]0, \frac{\pi}{2}], f'(x) = \frac{1}{x^2 \sin^2 x} (x - \sin x)(x + \sin x) > 0$ ($\forall x \in \mathbb{R}^{\frac{\pi}{2}}, x > \sin x$!) et $f'(0) = \frac{1}{3}$

f est donc strictement croissante sur $]0, \frac{\pi}{2}]$.

Remarque... $\forall x \in]0, \frac{\pi}{2}], 0 < f(x) < \frac{1}{3}$;
donc $\forall x \in]0, \frac{\pi}{2}], 0 < \frac{1}{x} - \frac{\cos x}{\sin x} < \frac{1}{3}$.

PARTIE II

Q1) $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$. $A_n X = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \\ 0 \end{bmatrix}$

de même par récurrence! Noter y_k la $k^{\text{ème}}$ coordonnée de $A_n X$.

$$y_k = \sum_{j=1}^n a_{kj} x_j. \quad a_{kj} = 1 \text{ si } k-j=1 \text{ et } a_{kj} = 0 \text{ si } k-j \neq 1.$$

$$\text{donc } y_3 = x_2 \quad (1+1=2 \Leftrightarrow j=2)$$

$$y_k = x_{k-1} + x_{k+1} \quad \text{pour } k \in \llbracket 2, n-1 \rrbracket \quad (k-j=1 \Leftrightarrow j=k-1 \text{ ou } j=k+1)$$

$$y_n = x_{n-1} \quad (n-j=1 \Leftrightarrow j=n-1)$$

$$q_n(x) = {}^t x A_n x = {}^t x y;$$

$$q_n(x) = {}^t x y = \sum_{k=1}^n x_k y_k = x_3 x_1 + \sum_{k=2}^{n-1} x_k (x_{k+1} + x_{k-1}) + x_n x_{n-1};$$

$$q_n(x) = x_3 x_1 + \sum_{k=2}^{n-1} x_k x_{k-1} + \sum_{k=2}^{n-1} x_k x_{k+1} + x_n x_{n-1};$$

$$q_n(x) = x_3 x_1 + \sum_{k=1}^{n-2} x_{k+1} x_k + \sum_{k=2}^{n-1} x_k x_{k+1} + x_n x_{n-1} = \sum_{k=1}^{n-1} x_{k+1} x_k + \sum_{k=1}^{n-1} x_k x_{k+1} = 2 \sum_{k=1}^{n-1} x_k x_{k+1}.$$

Q2 a) $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$, $q_2(x) = 2x_3 x_2$ et ${}^t x x = x_1^2 + x_2^2$.

$n=2$ $(x_1, x_2)^t \geq 0$ donc $x_1^2 + x_2^2 \geq 2x_3 x_2$ et $(x_1, x_2)^t \geq 0$ donc : $2x_1 x_2 \geq -x_1^2 - x_2^2$

donc : $-(x_1^2 + x_2^2) \leq 2x_3 x_2 \leq x_1^2 + x_2^2$.

Pour conclure : $-{}^t x x \leq q_2(x) \leq {}^t x x$

b) $A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$; $A_2^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$! $A_1^2 = I$, $\text{Spec}(A_2) \subset \{ \pm 1 \}$!

donc : $A_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$; $\lambda \in \text{Spec}(A_2)$; $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \in F_\lambda$

$A_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$; $-\lambda \in \text{Spec}(A_2)$; $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \in F_{-\lambda}$

Donc $\text{Spec}(A) = \{ -1, 1 \}$. Nous sommes en dimension 2 donc A_1 et diagonalisable et $\pi_{1,2}(M) = F_1 \oplus F_{-1}$. On a alors que $F_1 = \ker F_1 = \ker F_2 = 1$. $F_3 = \ker F_1 \cap F_2 = \ker \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

$\Leftrightarrow$ Soit $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ avec $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$.

$|q_2(x)| = {}^t x x \Leftrightarrow |2x_1 x_2| = x_1^2 + x_2^2 \Leftrightarrow 0 = |x_1|^2 + |x_2|^2 - 2|x_1||x_2| \Leftrightarrow (|x_1| - |x_2|)^2 = 0$

$|q_2(x)| = {}^t x x \Leftrightarrow |x_1| = |x_2| \Leftrightarrow x_1 = x_2$ ou $x_1 = -x_2 \Leftrightarrow x \in F_3$ ou $x \in F_{-1}$

d'où $x \in \pi_{1,2}(M) \cap \{ q_2(x) = {}^t x x \} = F_3 \cup F_{-1}$

On a donc : si $x \in \pi_{1,2}(M)$, $|q_2(x)| = {}^t x x$ si x est auto propre de A_2

Q3 Soit $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \in \pi_{1,2}(M)$!

a) d'après ce qui précède : $\forall i \in \{1, 2, 3\}$, $-(x_i^2 + x_{i+1}^2) \leq 2x_i x_{i+1} \leq x_i^2 + x_{i+1}^2$

Pour l'annulation : $-\sum_{i=1}^n (x_i^2 + x_{i+1}^2) \leq q_n(x) \leq \sum_{i=1}^n (x_i^2 + x_{i+1}^2)$

b) $\sum_{i=1}^n (x_i^2 + x_{i+1}^2) = \sum_{i=1}^n x_i^2 + \sum_{i=1}^n x_{i+1}^2 = {}^t x x - x_n^2 + ({}^t x x - x_1^2) = 2{}^t x x - (x_n^2 + x_1^2) \leq {}^t x x$

$-\sum_{i=1}^n (x_i^2 + x_{i+1}^2) = -2{}^t x x + (x_n^2 + x_1^2) \geq -2{}^t x x$

Finalement : $-2{}^t x x \leq q_n(x) \leq 2{}^t x x$

D) suite. Si $x=0$: ${}^t x x = 0 = q_n(x)$ donc $|q_n(x)| = {}^t x x$

évidemment, supposons $|q_n(x)| = {}^t x x$.

pour fixer les idées, supposons $q_n(x) = {}^t x x$ (même démonstration pour $q_n(x) = -{}^t x x$) ou presque!

$$q_n(x) \leq \sum_{i=1}^{n-1} (x_i^2 + x_{i+1}^2) = {}^t x x - (x_n^2 + x_1^2) \leq {}^t x x = q_n(x) !$$

↑
vanishing

Donc $q_n(x) = {}^t x x - (x_n^2 + x_1^2) = {}^t x x$; on a donc $x_1^2 + x_n^2 = 0$; c'est à dire : $x_1 = x_n = 0$

on a aussi : ${}^t x x = q_n(x) = \sum_{i=1}^{n-1} (x_i^2 + x_{i+1}^2)$; $2 \sum_{i=1}^{n-1} x_i x_{i+1} = \sum_{i=1}^{n-1} (x_i^2 + x_{i+1}^2)$;

$0 = \sum_{i=1}^{n-1} (x_i - x_{i+1})^2$; $\forall i \in \{1, n-1\}$, $x_i = x_{i+1}$. Par conséquent : $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$! $x=0$

Finalement : $|q_n(x)| = {}^t x x \iff x=0$

c) $x \neq 0$ et $A_n x = \lambda x$. Par conséquent : $-{}^t x x < q_n(x) < {}^t x x$

$q_n(x) = {}^t x A_n x = {}^t x \lambda x = \lambda {}^t x x$; donc $-{}^t x x < \lambda {}^t x x < {}^t x x$ (1)

x n'étant pas nul : ${}^t x x$ n'est pas nul (${}^t x x = \sum_{i=1}^n x_i^2$) ; on a ${}^t x x > 0$

Finalement en divisant par ${}^t x x$ (1) on obtient : $-1 < \lambda < 1$

ce qui signifie : $\text{Spec}(A_n) \subset]-1, 1[$.

Q4) Diagonalisation de la matrice A_n .

a) l'équation $\lambda \in \mathbb{C}$ et $\lambda^2 = \lambda - 1$ a même ensemble de solutions que

l'équation $\lambda \in \mathbb{C}$ et $\lambda^2 - 2\cos t \lambda + 1 = 0$. Les solutions de cette équation sont e^{it} et e^{-it}

Par conséquent : E_λ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension 2 qui admet

$(\cos kt)_{k \geq 0}$, $(\sin kt)_{k \geq 0}$ pour base.

Soit $(u_k)_{k \geq 0}$ un élément de E_λ . $\exists (a, b) \in \mathbb{R}^2$, $\forall k \in \mathbb{N}$, $u_k = a \cos kt + b \sin kt$.

$u_0 = 0 + b \times 0 = 0$ et $u_1 = a \cos t + b \sin t$; $b = \frac{u_1 - a \cos t}{\sin t} = \frac{u_1 - u_0 \cos t}{\sin t}$ ($t \in]0, \pi[$)

Donc $\forall k \in \mathbb{N}$, $u_k = u_0 \cos kt + \frac{u_1 - u_0 \cos t}{\sin t} \times \sin kt$.

b) Soit $(u_k)_{k \geq 0}$ un élément de E_λ . $\forall k \in \mathbb{N}$, $u_k = u_0 \cos kt + \frac{u_1 - u_0 \cos t}{\sin t} \sin kt$.

$(u_k)_{k \geq 0} \in F_\lambda(n) \iff \begin{cases} u_0 = 0 \\ \text{et} \\ 0 = u_{n+1} = u_0 \cos((n+1)t) + \frac{u_1 - u_0 \cos t}{\sin t} \sin((n+1)t) = u_1 \frac{\sin((n+1)t)}{\sin t} \end{cases}$

$$(u_k/k_{20} \in F_\lambda(u) \Leftrightarrow u_0 = 0 \text{ et } u_1 \times \frac{\partial(u_1 + u_2)}{\partial u_1} = 0 \Leftrightarrow u_0 = 0 \text{ et } u_1 \times \partial(u_1 + u_2)/\partial u_1 = 0$$

$$\text{soit } (u_1 - u_2)(u_1 + u_2) \neq 0. (u_k/k_{20} \in F_\lambda(u) \Leftrightarrow u_0 = u_1 = 0 \Leftrightarrow (u_k/k_{20} = 0 \in \lambda) \uparrow$$

$$\text{puisque } F_\lambda(u) = \{0 \in \lambda\} \quad (u_k/k_{20} \in E_\lambda).$$

$$\text{soit } (u_1 - u_2)(u_1 + u_2) = 0. (u_k/k_{20} \in F_\lambda(u) \Leftrightarrow u_0 = 0$$

$$\text{puisque nous avons que } (u_k) \in \text{Vect}((u_k/k_{20})).$$

$$\text{soit } (u_k/k_{20} \in F_\lambda(u); \forall k \in \mathbb{N}, u_k = \frac{u_1}{1} \times \partial(u_1 + u_2)/\partial u_1 \text{ et } (u_k/k_{20} \in \text{Vect}((u_k/k_{20})).$$

$$\text{soit } (u_k/k_{20} \in \text{Vect}((u_k/k_{20})). \exists a \in \mathbb{R}, \forall k \in \mathbb{N}, u_k = 0 \text{ et } u_0 = 0, \text{ donc } u_0 = 0, (u_k/k_{20} \in F_\lambda(u).$$

$$\text{Conclusion... Si } (u_{n+1}) \in 0(\pi) : F_\lambda(u) = \text{Vect}((u_k/k_{20}))$$

$$\text{Si } (u_{n+1}) \neq 0(\pi) : F_\lambda(u) = \{0 \in \lambda\}$$

2) "Classifions" cette question cas par cas. Considérons $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \pi_{n,2}(\mathbb{R})$. A nous

à X la suite (u_k/k_{20}) définie par :

$$u_0 = 0, \forall k \in \mathbb{N}, u_k = x_k, u_{k+1} = 0 \text{ et } \forall k \in \mathbb{N}, u_{k+2} = \lambda u_{k+1} - u_{k+2}.$$

$$\text{Montrons, maintenant, que : } A_n X = \lambda X \Leftrightarrow (u_k/k_{20} \in F_\lambda(u).$$

$$A_n X = \lambda X \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = \lambda x_1 \\ x_{k+1} + x_{k+2} = \lambda x_k \text{ pour } k \in \mathbb{N}, n-1 \leq k \\ x_{n-1} = \lambda x_n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{k+1} = \lambda x_k - x_{k-1} \text{ pour } k \in \mathbb{N}, 1 \leq k \\ x_{n-1} = \lambda x_n \end{cases}$$

→ Supposons $A_n X = \lambda X$. Montrons que $(u_k/k_{20} \in F_\lambda(u)$. Il suffit de montrer que :

$$(u_k/k_{20} \in E_\lambda \text{ car } u_0 = u_{n+1} = 0 !$$

Montrons donc que : $\forall k \in \mathbb{N}, u_{k+2} = \lambda u_{k+1} - u_k$; c'est déjà vrai si $k \geq n$. (voir

définition de (u_k/k_{20})). Reste à vérifier que : $\forall k \in \mathbb{N}, n-1 \leq k, u_{k+2} = \lambda u_{k+1} - u_k$

$$\forall k \in \mathbb{N}, n-1 \leq k, x_{k+1} = \lambda x_k - x_{k-1} \text{ donc,}$$

$$\forall k \in \mathbb{N}, n-1 \leq k, x_{k+2} = \lambda x_{k+1} - x_k ; \text{ par conséquent } \forall k \in \mathbb{N}, n-1 \leq k, u_{k+2} = \lambda u_{k+1} - u_k.$$

Reste à voir $k=0$ et $n-1$

$$u_2 = x_2 = \lambda x_1 = \lambda u_1 - u_0 \text{ (car } u_0 = 0) ; u_{n+1} = 0 = \lambda u_n - u_{n-1}$$

ceci a été vu précédemment que $(u_k/k_{20} \in E_\lambda$ et donc que $(u_k/k_{20} \in F_\lambda(u)$ car $u_0 = u_{n+1} = 0$

→ Adjonçons maintenant supposons que $(u_k/k_{20} \in F_\lambda(u)$ et vérifions que $A_n X = \lambda X$.

$$\forall k \in \mathbb{N}, u_{k+2} = \lambda u_{k+1} - u_k$$

$$\text{Donc } x_2 = u_2 = \lambda u_1 - u_0 = \lambda u_1 - 0 = \lambda x_1$$

$$\text{Si } k \in \mathbb{I} \text{ (n-1)}, x_{k+1} = u_{k+1} = \lambda u_k - u_{k-1} \stackrel{\substack{\text{d'après} \\ \text{l'hypothèse}}}{=} \lambda x_k - x_{k-1}$$

$$\text{Enfin: } x_{n-1} = u_{n-1} = \lambda u_n - u_{n+1} = \lambda x_n - 0 = \lambda x_{n-1}$$

$$u_{n+1} = \lambda u_n - u_{n-1}$$

$$\text{Finalement } x_k = \lambda x_{k-1}, \forall k \in \mathbb{I}, n-1, x_{k+1} = \lambda x_k - x_{k-1} \Rightarrow x_{k+1} = \lambda x_k; \text{ donc } Ax = \lambda x$$

d) Analyse - Soit $\lambda \in \text{Spec}(A_n)$. $\exists \lambda \in \Pi_{n-1}(\mathbb{R})$, $\lambda \neq 0$ et $Ax = \lambda x$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \text{ et } (u_k)_{k \geq 0} \text{ la suite associée à } x. \quad (u_k)_{k \geq 0} \in F_\lambda(u) \text{ et } (u_k)_{k \geq 0} \text{ unitaire}$$

$$\text{par la suite nulle des } F_\lambda(u) \neq \{0_{E_\lambda}\} \text{ donc } (u_{n+1})_t \equiv 0 \text{ (n)}.$$

Synthèse - Supposons $(u_{n+1})_t \neq 0$. $F_\lambda(u) \neq \{0_{E_\lambda}\}$. Soit $(u_k)_{k \geq 0}$ un élément

$$u_n \text{ unitaire } F_\lambda(u). \text{ Posons } x_i = u_i \text{ pour } i \in \mathbb{I}, n-1.$$

$$(u_k)_{k \geq 0} \text{ est la suite associée à } x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \text{ et } (u_k)_{k \geq 0} \in F_\lambda(u); \text{ par conséquent } Ax = \lambda x.$$

$$x_1 \text{ unitaire unitaire } (u_1 = 0 \Rightarrow u_2 = 0 \Rightarrow \forall k \in \mathbb{N}, u_k = 0) \text{ donc } \lambda \neq 0.$$

Par conséquent $\lambda \in \text{Spec}(A_n)$.

$$\text{Conclusion. } \text{Spec}(A_n) \subset \mathbb{I} \cup \mathbb{Z}. \text{ Soit } \lambda \in \mathbb{I} \cup \mathbb{Z}. \exists t \in \mathbb{I}, n-1, \lambda = 2 \cos t.$$

$$\lambda \in \text{Spec}(A_n) \Leftrightarrow (u_{n+1})_t \neq 0 \text{ (n)} \Leftrightarrow \exists p \in \mathbb{Z}, t = \frac{p\pi}{n+1} \Leftrightarrow \exists p \in \mathbb{I}, n-1, t = \frac{p\pi}{n+1}.$$

$$t \in \mathbb{I}, n-1$$

$$\text{Finalement: } \text{Spec}(A_n) = \left\{ 2 \cos \frac{p\pi}{n+1}; p \in \mathbb{I}, n-1 \right\}.$$

$$\text{Soit } \lambda = 2 \cos \theta_p \text{ avec } \theta_p = \frac{p\pi}{n+1} \text{ et } p \in \mathbb{I}, n-1. \lambda \in \text{Spec}(A_n).$$

$$\text{Soit } x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \Pi_{n-1}(\mathbb{R}) \text{ et } (u_k)_{k \geq 0} \text{ la suite associée.}$$

$$Ax = \lambda x \Leftrightarrow (u_k)_{k \geq 0} \in F_\lambda(u) \Leftrightarrow \exists u \in \mathbb{R}, \forall k \in \mathbb{N}, u_k = u \sin k \theta_p \Rightarrow x \in \text{Vect} \left(\begin{bmatrix} \sin \theta_p \\ \sin 2\theta_p \\ \vdots \\ \sin n \theta_p \end{bmatrix} \right).$$

$$F_\lambda \subset \text{Vect} \left(\begin{bmatrix} \sin \theta_p \\ \sin 2\theta_p \\ \vdots \\ \sin n \theta_p \end{bmatrix} \right). \text{ Comme } \dim F_\lambda \geq 1: F_\lambda = \text{Vect} \left(\begin{bmatrix} \sin \theta_p \\ \sin 2\theta_p \\ \vdots \\ \sin n \theta_p \end{bmatrix} \right).$$

Ceci répond à la question !!

$$\text{c) } \forall p \in \mathbb{I}, n-1, F_{2 \cos \theta_p} = \text{Vect} \left(\begin{bmatrix} \sin \theta_p \\ \sin 2\theta_p \\ \vdots \\ \sin n \theta_p \end{bmatrix} \right) = \text{Vect}(x_p).$$

(95) a) $A_n X = \lambda X$ et $A_n Y = \mu Y$. Multiplions la 1^{re} par t_Y et la 2^{de} par t_X .

$$t_Y A_n X = \lambda t_Y X \text{ et } t_X A_n Y = \mu t_X Y$$

$$\text{Transposons } t_Y A_n X = \lambda t_Y X; \text{ on obtient: } t_X t A_n Y = \lambda t_X Y \quad (t_Y X = Y) \quad (t_X Y = X).$$

On a la symétrique donc $t A_n = A_n$.

$$\text{Finalement } t_X A_n Y = \lambda t_X Y \text{ et } t_X A_n Y = \mu t_X Y. \quad \lambda t_X Y = \mu t_X Y; \quad t_X Y = 0 \text{ car } \lambda \neq \mu.$$

Remarque... 2 valeurs propres associées à 2 vecteurs propres distincts sont orthogonales.

Soit $(p, q) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ tel que $p \neq q$.

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \theta_p \\ \vdots \\ x_p \theta_p \\ \vdots \\ x_n \theta_p \end{bmatrix} \text{ et un vecteur propre associé à } \lambda = \lambda(p, p) \text{ et } Y = \begin{bmatrix} y_1 \theta_q \\ \vdots \\ y_p \theta_q \\ \vdots \\ y_n \theta_q \end{bmatrix} \text{ est associé à la valeur propre } \mu = \lambda(p, q).$$

$$\text{Donc } t_X Y = 0 \text{ car } \lambda \neq \mu. \text{ Finalement } \sum_{k=1}^n x_k \theta_p y_k \theta_q = 0.$$

b) Soit $p \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $t_Y e^{i 2 \pi p} = e^{i 2 \pi p} + 1$.

$$\sum_{k=0}^{n-1} \delta^k = \frac{1 - \delta^{n+1}}{1 - \delta} = \frac{1 - e^{i 2 \pi n}}{1 - \delta} = \frac{1 - 1}{1 - \delta} = 0; \quad \sum_{k=0}^{n-1} \delta^k = 0.$$

$$\text{En particulier: } 0 = \lambda e \left(\sum_{k=0}^{n-1} \delta^k \right) = \lambda e \left(\sum_{k=0}^{n-1} e^{i \frac{2 \pi k p}{n}} \right) = \sum_{k=0}^{n-1} \omega \left(e^{i \frac{2 \pi k p}{n}} \right)$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} \omega \left(e^{i \frac{2 \pi k p}{n}} \right) = 0. \text{ Soit encore } 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \omega \left(e^{i \frac{2 \pi k p}{n}} \right) = 0$$

$$\text{Finalement: } \sum_{k=1}^{n-1} \omega \left(e^{i \frac{2 \pi k p}{n}} \right) = -1.$$

$$t_X p X_p = \sum_{k=1}^n x_k^2 \theta_p = \sum_{k=1}^n \frac{1 - \omega \left(e^{i \frac{2 \pi k p}{n}} \right)}{2} = \frac{n}{2} - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n-1} \omega \left(e^{i \frac{2 \pi k p}{n}} \right) = \frac{n}{2} - \frac{1}{2} (-1) = \frac{n+1}{2}.$$

$$t_X p X_p = \frac{n+1}{2}.$$

c) $\pi = (b, e)$ avec $\theta_{b,e} = \sin \left(e^{i \frac{2 \pi p}{n}} \right) = \sin \left(e^{i \frac{2 \pi p}{n}} \right) = b, e$; on a

puisque que π est symétrique. Considérons $\pi^2 = (c, q)$. Soit $(p, q) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$.

$$c_p, q = \sum_{k=1}^n b_{p,k} b_{k,q} = \sum_{k=1}^n \sin \left(e^{i \frac{2 \pi p k}{n}} \right) \sin \left(e^{i \frac{2 \pi k q}{n}} \right) = \begin{cases} 0 & \text{si } p \neq q \\ t_X p X_p = \frac{n+1}{2} & \text{si } p = q. \end{cases}$$

$$\text{Finalement } \pi^2 = \frac{n+1}{2} I_n$$

$$\text{Donc } \pi \left(\frac{2}{n+1} \pi \right) = I_n.$$

$$\pi \text{ est inversible et } \pi^{-1} = \frac{2}{n+1} \pi.$$

↑
Nous pouvons une méthode de passage!

Q1 a) $(k, \ell) \in \mathbb{N}^2$. $\int_0^\pi \sin k t \sin \ell t dt = \frac{1}{2} \int_0^\pi (\cos((k-\ell)t) - \cos((k+\ell)t)) dt$

$$\int_0^\pi \cos(k-\ell)t dt = \begin{cases} \pi & k=\ell=0 \\ \left[\frac{\sin((k-\ell)t)}{k-\ell} \right]_0^\pi = 0 & k \neq \ell \end{cases}$$

$$\int_0^\pi \cos(k+\ell)t dt = \begin{cases} \pi & k=\ell=0 \\ \left[\frac{\sin((k+\ell)t)}{k+\ell} \right]_0^\pi = 0 & k \neq -\ell \end{cases}$$

Faut donc : Si $k \neq \ell$: $\int_0^\pi \sin k t \sin \ell t dt = 0$

Si $k=\ell \neq 0$: $\int_0^\pi \sin^2(k t) dt = \pi/2$

Si $k=\ell=0$: $\int_0^\pi \sin^2(0) dt = 0$

b) $\int_0^\pi g^1(t) dt = \int_0^\pi \left(\sum_{k=1}^n a_k \sin k t \right) \left(\sum_{\ell=1}^n a_\ell \sin \ell t \right) dt = \sum_{k=1}^n \sum_{\ell=1}^n a_k a_\ell \int_0^\pi \sin k t \sin \ell t dt$

$$\int_0^\pi g^2(t) dt = \sum_{k=1}^n a_k^2 \times \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} \sum_{k=1}^n a_k^2 \quad \int_0^\pi g^1(t) dt = \frac{\pi}{2} \sum_{k=1}^n a_k^2$$

c) Posons $\Pi_n A = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \quad \forall p \in \mathbb{N}, n \geq p, \quad \kappa_p = \sum_{k=1}^p b_{kp} \quad a_2 = \sum_{k=1}^n a_k \sin(k \varphi_p) = g(\varphi_p)$

$$A = \Pi_n^{-1} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \frac{2}{n+1} \Pi_n \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \quad \text{d'où } \forall k \in \mathbb{N}, n \geq k, \quad a_k = \frac{2}{n+1} \sum_{p=1}^n b_{kp} \times p$$

$\forall k \in \mathbb{N}, n \geq k, \quad a_k = \frac{1}{n+1} \sum_{p=1}^n g(\varphi_p) \sin(k \varphi_p)$

d) $\forall p \in \mathbb{N}, n \geq p, \quad g(\varphi_p) = b_p \Leftrightarrow \begin{bmatrix} g(\varphi_1) \\ g(\varphi_2) \\ \vdots \\ g(\varphi_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \Leftrightarrow \Pi_n A = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \Leftrightarrow A = \Pi_n^{-1} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$

Les p sont donc les coefficients de l'écriture de A .

En d'où : $\begin{bmatrix} a_1(n) \\ a_2(n) \\ \vdots \\ a_n(n) \end{bmatrix} = \Pi_n^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{n+1} \Pi_n \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$

; on a donc $\forall k \in \mathbb{N}, n \geq k, \quad a_k(n) = \frac{2}{n+1} \sum_{p=1}^n \sin(k \varphi_p)$

Q2) Etude des coefficients $a_k(n)$.

Soit $k \in \mathbb{N}, n \geq k, \quad a_k(n) = \frac{2}{n+1} \sum_{p=1}^n \sin(k \varphi_p) = \frac{2}{n+1} \sum_{p=1}^n \sin(p \vartheta_k)$

$$\sum_{p=1}^n \sin(p \vartheta_k) = \Im \left(\sum_{p=1}^n \cos(p \vartheta_k) + i \sin(p \vartheta_k) \right) = \Im \left(\sum_{p=1}^n (e^{i \vartheta_k})^p \right) = \Im \left(e^{i \vartheta_k} \frac{1 - (e^{i \vartheta_k})^{n+1}}{1 - e^{i \vartheta_k}} \right)$$

$\vartheta_k = \frac{2\pi}{n+1} \neq 0 \pmod{2\pi}$

$$\sum_{p=1}^n \sin(p \vartheta_k) = \Im \left(e^{i \vartheta_k/2} e^{i \vartheta_k n/2} \frac{e^{-i \vartheta_k/2} - e^{-i \vartheta_k(n+1)/2}}{e^{-i \vartheta_k/2} - e^{-i \vartheta_k/2}} \right)$$

$$\sum_{p=1}^n \sin(p \vartheta_k) = \Im \left(e^{i \vartheta_k/2} \frac{e^{-i \vartheta_k(n+1)/2} - e^{-i \vartheta_k/2}}{-i 2 \sin(\vartheta_k/2)} \right) = \sin\left(\frac{n+1}{2} \vartheta_k\right) \times \frac{\sin\left(\frac{n}{2} \vartheta_k\right)}{\sin(\vartheta_k/2)}$$

donc $a_k(u) = \frac{1}{n+1} \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sin \left[\frac{n+1}{2} \times \left(\frac{\pi}{n+1} - \frac{k\pi}{2(n+1)} \right) \right]}{\sin \left(\frac{k\pi}{2(n+1)} \right)} = \frac{\frac{1}{n+1} \lim_{u \rightarrow 0} \frac{k\pi}{2}}{\sin \left(\frac{k\pi}{2(n+1)} \right)} = \left[\lim_{u \rightarrow 0} \frac{k\pi}{2} \cos \frac{k\pi}{2(n+1)} - \cos \frac{k\pi}{2} \lim_{u \rightarrow 0} \frac{k\pi}{2(n+1)} \right]$

donc si k est pair : $\lim_{u \rightarrow 0} \frac{k\pi}{2} = 0$ et $a_k(u) = 0$.

Supposons k impair : $\sin \frac{k\pi}{2} = \pm 1$ et $\cos \frac{k\pi}{2} = 0$; donc $a_k(u) = \frac{1}{n+1}$... c'est-à-dire.

Si k est impair, $a_k(u) = \frac{1}{n+1}$ et k impair ($k \in \mathbb{N}$).

le tableau de variation de f dans $\mathbb{S}^1$ donne : $\forall u \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $0 \leq f(u) \leq \frac{1}{n+1}$

donc $\forall u \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $0 \leq \frac{1}{n+1} - \frac{\cos u}{\sin u} \leq \frac{1}{n+1}$, en particulier : $\frac{1}{n+1} - \frac{\cos \frac{k\pi}{2(n+1)}}{\sin \left(\frac{k\pi}{2(n+1)} \right)} \leq \frac{1}{n+1}$

on multiplie par $\frac{1}{n+1}$ on obtient :

$$0 \leq \frac{1}{4\pi} - a_k(u) \leq \frac{1}{(n+1)\pi}$$

2) Si k est pair : $\beta_k = 0$ (si $n \geq k$: $a_k(u) = 0$)

Si k est impair : $\forall u \in \mathbb{N}$, $n \geq k \Rightarrow 0 \leq \frac{1}{4\pi} - a_k(u) \leq \frac{1}{(n+1)\pi}$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{(n+1)\pi} = 0 \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} a_k(u) = \frac{1}{4\pi} ; \quad \beta_k = \frac{1}{4\pi}$$

soit $u \in \mathbb{N}^*$

(93) a) $\forall t \in [0, \pi]$, $q_n(t) - t_n(t) = \sum_{k=1}^n (a_k(k) - \beta_k) \sin kt$

donc $\int_0^\pi (q_n(t) - t_n(t))^2 dt = \frac{\pi}{2} \sum_{k=1}^n (a_k(k) - \beta_k)^2$ (voir Q 1 b) ... avec " $a_k = a_n(k) - \beta_k$ " !)

si $k \in \mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ et k est pair : $[a_k(k) - \beta_k]^2 = 0$

si $k \in \mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ et k est impair : $[a_k(k) - \beta_k]^2 \leq \left[\frac{1}{4} \right]^2 = \frac{1}{16(n+1)^2}$ (Q 2 b et c)

dans les deux cas : $[a_k(k) - \beta_k]^2 \leq \frac{1}{16(n+1)^2}$

donc $0 \leq \int_0^\pi (q_n(t) - t_n(t))^2 dt \leq \frac{\pi}{2} \sum_{k=1}^n [a_k(k) - \beta_k]^2 \leq \frac{\pi}{2} \times n \times \frac{1}{16(n+1)^2} = \frac{\pi}{16(n+1)} \leq \frac{\pi}{n(n+1)}$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{n(n+1)} = 0$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^\pi (q_n(t) - t_n(t))^2 dt = 0$.

b) on admet donc que : $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$ soit $u \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned} \int_0^\pi (t - t_n(t))^2 dt &= \int_0^\pi t^2 dt - 2 \int_0^\pi t t_n(t) dt + \int_0^\pi t_n(t)^2 dt = \pi + \frac{\pi}{2} \sum_{k=1}^n \beta_k^2 - 2 \sum_{k=1}^n \beta_k \int_0^\pi t \sin kt dt \\ &= \pi + \frac{\pi}{2} \sum_{k=1}^n \beta_k^2 - 2 \sum_{k=1}^n \beta_k \frac{1}{k} [1 - \cos kn] \quad ; \quad 1 - \cos kn = \begin{cases} 0 & \text{si } k \text{ est pair} \\ 2 & \text{si } k \text{ est impair} \end{cases} \\ &= \pi + \frac{\pi}{2} \sum_{1 \leq k \leq n} \frac{16}{[k(n+1)]^2} - 2 \sum_{1 \leq k \leq n} \frac{1}{k(n+1)} \times \frac{1}{2k+1} \times 2 \end{aligned}$$

$$\int_0^1 (1-h_n(t))^2 dt = \pi + \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{E(\frac{n-1}{2})} \frac{1}{(2k+1)^2} - \frac{16}{\pi} \sum_{k=0}^{E(\frac{n-1}{2})} \frac{1}{(2k+1)^4}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} E(\frac{n-1}{2}) = +\infty \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{E(\frac{n-1}{2})} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

Finalement : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 (1-h_n(t))^2 dt = \pi + \frac{2}{\pi} \times \frac{\pi^2}{8} - \frac{16}{\pi} \times \frac{\pi^4}{8} = \pi + \pi - 2\pi = 0 !$

ce qui implique... $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, (a-b)^2 \leq 2a^2 + 2b^2 \quad (\text{ie } \bar{a} \cdot \bar{b} \cdot (a+b)^2 \geq 0 !)$

soit $n \in \mathbb{N}^*$

$$0 \leq J_n = \int_0^1 (1-q_n(t))^2 dt = \int_0^1 [(1-h_n(t)) - (q_n(t)-h_n(t))]^2 dt \leq \int_0^1 (1-h_n(t))^2 dt + \int_0^1 (q_n(t)-h_n(t))^2 dt$$

donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} J_n = 0$ d'après [3] ad b)

Pour les initiales (q_n) converge vers 1 "pour la norme $\| \cdot \|_2$ "