Chambre de Commerce et d'Industrie de Paris
Direction de l'Enseignement
DIRECTION DES ADMISSIONS ET CONCOURS

École des Hautes Études Commerciales

CONCOURS D'ADMISSION DE 1989

Mathématiques I

OPTION GÉNÉRALE

Mercredi 10 mai 1989, de 8 h. à 12 h.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

sont autorisées : règles graduées, tables de valeurs numériques sans formulaire, calculatrices de poche, y compris les calculatrices programmables et alphanumériques, à fonctionnement autonome, sans imprimante, sans document d'accompagnement et de format maximum 21 cm de long sur 15 cm de large.

PROBLÈME

Soit k un nombre entier naturel non nul. L'objet du problème est l'étude de la série de terme général $1/p^{2k}$, où $p \geq 1$.

LIMINAIRE

À l'aide de l'inégalité des accroissements finis, montrer que, pour tout nombre entier naturel non nul p :

(0) $$\frac{1}{(p+1)^{2k}} \leq \frac{1}{2k-1}\left(\frac{1}{p^{2k-1}} - \frac{1}{(p+1)^{2k-1}}\right) \leq \frac{1}{p^{2k}}.$$

En déduire la convergence de la série de terme général $1/p^{2k}$ et un majorant simple de sa somme.

Dans la suite, pour tout nombre entier naturel non nul n, on pose :

$$S_{2k}(n) = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p^{2k}}, \quad R_{2k}(n) = \sum_{p=n+1}^{+\infty} \frac{1}{p^{2k}} \quad \text{et} \quad S_{2k} = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^{2k}} = S_{2k}(n) + R_{2k}(n).$$

Dans la partie I, on traite le cas particulier où $k = 1$ et l'on détermine S_2.
Dans la partie II, on étudie d'abord une suite de polynômes et l'on généralise la méthode de la partie I pour déterminer S_{2k}.

PARTIE I

Dans cette partie, on désigne par n un nombre entier naturel non nul.

1. On considère la fonction numérique définie sur l'intervalle $]0,\ 1[$ par la relation :

FAUX ($x=\frac{1}{2}\dots$)

$$f_1(x) = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x}{2}\right) \cot \pi x$$

$\cot \pi x = \dfrac{\cos(\pi x)}{\sin(\pi x)}$

(où $\cot \pi x = 1/\tan \pi x$).

a) Comparer $f_1(x)$ et $f_1(1-x)$. Interpréter graphiquement le résultat.

b) Déterminer les limites de f_1 aux bornes de son ensemble de définition.

On prolonge désormais f_1 par continuité en 0 et en 1.

c) Pour tout élément x de $]0,\ 1[$, calculer $f_1'(x)$. Montrer que f_1 est de classe C^1 sur l'intervalle $[0,\ 1]$.

~~*d*) Construire la courbe représentative de f_1.~~

d) Etudier les variations de f_1. Donner l'allure de la courbe représentative de f_1.

2. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que, pour toute fonction f de classe C^1 sur $[0,\ 1]$, il existe un nombre réel strictement positif a tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \left| \int_0^1 f(x) \sin 2\pi n x \, \mathrm{d}x \right| \leq \frac{a}{n}.$$

En déduire la limite de $\int_0^1 f(x) \sin 2\pi n x \, \mathrm{d}x$ lorsque n tend vers $+\infty$.

3. Pour tout nombre entier naturel non nul p, calculer l'intégrale :

$$I_p = \int_0^1 \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x}{2}\right) \cos 2\pi p x \, \mathrm{d}x.$$

4. *a*) Vérifier que, pour tout élément x de l'intervalle $]0,\ 1[$:

$$2\sum_{p=1}^{n} \cos 2\pi p x = \cot \pi x \sin 2\pi n x + \cos 2\pi n x - 1.$$

(On pourra multiplier chacun des deux membres par $\sin \pi x$.)

b) À l'aide des résultats précédents, établir que :

$$\sum_{p=1}^{n} I_p = \frac{1}{2}\int_0^1 f_1(x) \sin 2\pi n x \, \mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_0^1 \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x}{2}\right) \cos 2\pi n x \, \mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int_0^1 \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x}{2}\right) \mathrm{d}x.$$

c) En faisant tendre n vers $+\infty$, déduire de l'égalité précédente que :

$$S_2 = \frac{\pi^2}{6}.$$

5. On se propose dans cette question de comparer $S_2(n)$, $S_2(n) + 1/n$ et $\pi^2/6$.

a) Écrire un algorithme de calcul de $S_2(n)$ lorsque l'entier n est donné. Comparer les valeurs décimales approchées à 10^{-6} près de $S_2(n)$, $S_2(n) + 1/n$ et $\pi^2/6$ pour $n = 10$, $n = 100$ et $n = 1\,000$.

b) À l'aide de l'inégalité (0), prouver que :

$$0 \leq \frac{\pi^2}{6} - S_2(n) \leq \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad 0 \leq S_2(n) + \frac{1}{n} - \frac{\pi^2}{6} \leq \frac{1}{n^2}.$$

Expliquer alors les résultats numériques précédents.

PARTIE II

A) Étude d'une suite de polynômes

On se propose d'étudier les suites (Q_n) de polynômes à coefficients réels satisfaisant aux trois propriétés suivantes :

$$\begin{array}{lrl} (1) & & Q_0 = 1 \\ (2) & \forall n \geq 1, & Q_n' = Q_{n-1} \\ (3) & \forall n \geq 2, & Q_n(1) = Q_n(0). \end{array}$$

1. *a*) Établir qu'il existe une suite (r_n) de nombres rationnels et une seule telle que :

$$r_0 = 1 \quad \text{et pour } n \geq 2 : \quad \sum_{j=0}^{n-1} \frac{r_j}{(n-j)!} = 0.$$

Expliciter r_1, r_2, r_3 et r_4 sous forme de fractions irréductibles.

On considère désormais la suite (P_n) de polynômes définie par :

$$P_n(X) = \sum_{j=0}^{n} \frac{r_j}{(n-j)!} X^{n-j}.$$

b) Montrer que la suite (P_n) vérifie les propriétés (1), (2) et (3). Expliciter P_1, P_2, P_3 et P_4.

2. On considère une suite (Q_n) de polynômes vérifiant les propriétés (1), (2) et (3).

a) Prouver que, pour tout nombre entier naturel n :

$$Q_n(X) = \sum_{j=0}^{n} \frac{Q_j(0)}{(n-j)!} X^{n-j}.$$

b) Montrer que la suite $(Q_n(0))$ vérifie :

$$Q_0(0) = 1 \quad \text{et pour } n \geq 2 : \quad \sum_{j=0}^{n-1} \frac{Q_j(0)}{(n-j)!} = 0.$$

c) En déduire que, pour tout nombre entier naturel n, $Q_n = P_n$.

3. *a*) En considérant la suite de polynômes $((-1)^n P_n(1-X))$, établir que, pour tout nombre entier naturel n :

$$P_n(X) = (-1)^n P_n(1-X).$$

b) En déduire que, pour tout nombre entier naturel non nul k, $r_{2k+1} = 0$. Calculer r_6 et r_8. On pourra vérifier que :

$$r_8 = -\frac{1}{1\,209\,600}.$$

B) Expression de S_{2k}

1. Pour tout nombre entier naturel $k \geq 2$, on considère la fonction f_k définie sur l'intervalle $]0,\ 1[$ par la relation :

$$f_k(x) = (P_{2k}(x) - r_{2k}) \cot \pi x.$$

a) Comparer $f_k(x)$ et $f_k(1-x)$.

b) Déterminer les limites de f_k aux bornes de son ensemble de définition.

On prolonge désormais f_k par continuité en 0 et en 1.

c) Prouver que f_k est de classe C^1 sur l'intervalle $[0,\ 1]$.

2. Pour tout nombre entier naturel non nul p, on considère les intégrales :

$$J_p(k) = \int_0^1 P_{2k}(x) \cos 2\pi p x \, \mathrm{d}x \quad \text{et} \quad I_p(k) = \int_0^1 (P_{2k}(x) - r_{2k}) \cos 2\pi p x \, \mathrm{d}x.$$

a) Calculer $J_p(1)$.
b) Exprimer $J_p(k+1)$ en fonction de $J_p(k)$. En déduire $J_p(k)$ puis $I_p(k)$.

3. *a*) En calculant de deux façons la somme :

$$I_1(k) + I_2(k) + \cdots + I_n(k),$$

puis en faisant tendre n vers $+\infty$, exprimer S_{2k} en fonction de r_{2k}.
b) Retrouver ainsi l'expression de S_2 ; calculer S_4, S_6 et S_8.

4. À l'aide de l'inégalité (0), prouver que :

$$0 \leq S_{2k}(n) + \frac{1}{(2k-1)\, n^{2k-1}} - S_{2k} \leq \frac{1}{n^{2k}}.$$

En déduire des valeurs approchées à 10^{-6} près de S_4, S_6 et S_8 ; les comparer aux valeurs exactes obtenues précédemment.

LIMINAIRE

Fixons p dans $\mathbb{N}^*$. Posons $\forall x\in[p,p+1]$, $f(x)=\frac{1}{x^{2k-1}}$ · f est continue et dérivable sur $[p,p+1]$.

$\forall x\in[p,p+1]$, $f'(x)=-\frac{2k-1}{x^{2k}}$ · f' est clairement croissante sur $[p,p+1]$ (... $x\mapsto -\frac{1}{x^{2k}}$ l'est !)

Donc $\forall x\in[p,p+1]$, $-\frac{(2k-1)}{p^{2k}}\leq f'(x)\leq -\frac{(2k-1)}{(p+1)^{2k}}$

Les inégalités des A.F. donnent : $-\frac{(2k-1)}{p^{2k}}((p+1)-1)\leq f(p+1)-f(p)\leq -\frac{(2k-1)}{(p+1)^{2k}}((p+1)-1)$.

Donc $-\frac{(2k-1)}{p^{2k}}\leq \frac{1}{(p+1)^{2k-1}}-\frac{1}{p^{2k-1}}\leq -\frac{(2k-1)}{(p+1)^{2k}}$. En multipliant par $-\frac{1}{2k-1}$ on obtient :

$$\frac{1}{p^{2k}}\geq \frac{-1}{2k-1}\left[\frac{1}{(p+1)^{2k-1}}-\frac{1}{p^{2k-1}}\right]\geq \frac{1}{(p+1)^{2k}}$$; soit encore :

(0) $\underline{\underline{\frac{1}{(p+1)^{2k}}\leq \frac{1}{2k-1}\left(\frac{1}{p^{2k-1}}-\frac{1}{(p+1)^{2k-1}}\right)\leq\frac{1}{p^{2k}}}}$ et ceci pour tout $p\in\mathbb{N}^*$.

Soit $n\in\mathbb{N}$ et $n\geq 2$. (0) donne : $\sum_{p=1}^{n-1}\frac{1}{(p+1)^{2k}}\leq\frac{1}{2k-1}\left(\sum_{p=1}^{n-1}\left(\frac{1}{p^{2k-1}}-\frac{1}{(p+1)^{2k-1}}\right)\right)=\frac{1}{2k-1}\left[1-\frac{1}{n^{2k-1}}\right]$

Donc $\sum_{p=2}^{n}\frac{1}{p^{2k}}\leq\frac{1}{2k-1}\left[1-\frac{1}{n^{2k-1}}\right]\leq\frac{1}{2k-1}$; $\sum_{\underline{p=1}}^{n}\frac{1}{p^{2k}}\leq\frac{1}{2k-1}+1=\frac{2k}{2k-1}$

Donc $\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{p^{2k}}\leq\frac{2k}{2k-1}$. Notons que ceci vaut encore pour $n=1$.

La suite $\left(\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{p^{2k}}\right)_{n\geq 1}$ est croissante et majorée par $\frac{2k}{2k-1}$; elle converge. Soit S_{2k} sa limite :
$S_{2k}\leq\frac{2k}{2k-1}$

Par conséquent la série de terme général $\frac{1}{p^{2k}}$ converge et $\underline{\underline{\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{p^{2k}}=S_{2k}\leq\frac{2k}{2k-1}}}$

<u>Remarques</u>.. 1.. Il n'est pas nécessaire d'utiliser (0) pour avoir la convergence de la série de terme général $\frac{1}{p^{2k}}$ (... Riemann)

2.. (0) donne encore $S_{2k}=\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{p^{2k}}\geq\frac{1}{2k-1}\sum_{p=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{p^{2k-1}}-\frac{1}{(p+1)^{2k-1}}\right)=\frac{1}{2k-1}$ (... à détailler)

Donc $\frac{1}{2k-1}\leq S_{2k}\leq\frac{2k}{2k-1}$ ... mais cette minoration est d'une rare médiocrité car à fait $S_{2k}\geq 1$!

PARTIE I (Q1) a) Soit $x\in]0,1[$, $1-x\in]0,1[$ et $f_1(1-x)=\left[\frac{(1-x)^2}{2}-\frac{1-x}{2}\right]\text{cotan}(\pi(1-x))$.

$f_1(1-x)=\frac{1}{2}[1+x^2-2x-1+x]\text{cotan}(\pi-\pi x)=-\frac{1}{2}[x^2-x]\text{cotan}\,\pi x=-f_1(x)$

$\forall x\in]0,1[$, $1-x\in]0,1[$ et $\underline{\underline{f_1(1-x)=-f_1(x)}}$. le point de coordonnées $(\frac{1}{2},0)$ est centre de symétrie de la courbe représentative de f_1 ($1-x=2\times\frac{1}{2}-x$)

b.. $f_1(x)=\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x}{2}\right)\frac{\cos\pi x}{\sin\pi x}=\frac{x}{2}(x-1)\frac{\cos\pi x}{\sin\pi x}\underset{0}{\sim}\frac{x}{2}(-1)\times\frac{1}{\pi x}=-\frac{1}{2\pi}$.

Donc $\lim\limits_{x\to 0} f_1(x)=-\frac{1}{2\pi}$.

$\lim\limits_{x\to 1} f_1(x)=\lim\limits_{X\to 1} f_1(1-X)=\lim\limits_{X\to 0}\left(-f_1(X)\right)=\frac{1}{2\pi}$.

$\underline{\lim\limits_{x\to 0} f_1(x)=-\frac{1}{2\pi} \text{ et } \lim\limits_{x\to 1} f_1(x)=\frac{1}{2\pi}}$

Remarque.. D'où si $f_1(0)=-\frac{1}{2\pi}$, $f_1(1)=\frac{1}{2\pi}$. f_1 est continue sur $[0,1]$.

c.. f_1 est dérivable sur $]0,1[$ et $\forall x\in]0,1[$, $f_1'(x)=\left(x-\frac{1}{2}\right)\frac{\cos\pi x}{\sin\pi x}+\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x}{2}\right)\times\frac{\overbrace{-\pi\sin\pi x\sin\pi x-\cos\pi x(\pi\cos\pi x)}^{-\pi}}{\sin^2\pi x}$

$\forall x\in]0,1[$, $f_1'(x)=\frac{1}{\sin^2\pi x}\left[\left(x-\frac{1}{2}\right)\cos\pi x\sin\pi x-\pi\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x}{2}\right)\right]$

$\forall x\in]0,1[$, $f_1'(x)=\frac{1}{\sin^2\pi x}\left[\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{2}\right)\sin 2\pi x-\pi\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x}{2}\right)\right]$

$\underline{\forall x\in]0,1[,\ f_1'(x)=\frac{1}{4\sin^2\pi x}\left[(2x-1)\sin 2\pi x-2\pi(x^2-x)\right]}$. $\underline{f_1' \text{ est évidemment continue sur }]0,1[}$.

$f_1'(x)\underset{0}{\sim}\frac{1}{4(\pi x)^2}\left[(2x-1)\sin 2\pi x-2\pi(x^2-x)\right]$

$\left.\begin{array}{l}\sin 2\pi x=2\pi x+o(x^2)\\ 2x-1=2x-1+o(x^2)\end{array}\right\}$ $(2x-1)\sin 2\pi x-2\pi(x^2-x)=(2x-1)(2\pi x)-2\pi(x^2-x)+o(x^2)$.
$=2\pi x^2+o(x^2)$

Finalement $f_1'(x)\underset{0}{\sim}\frac{1}{4(\pi x)^2}\times 2\pi x^2=\frac{1}{2\pi}$

$\lim\limits_{x\to 0} f_1'(x)=\frac{1}{2\pi}$. Donc f_1 est dérivable en 0, $f_1'(0)=\frac{1}{2\pi}$ et f_1' est continue en 0.

Reste à montrer que f_1 est dérivable en 1 de dérivée continue en 1. Il suffit comme dans ce qui précède de montrer que f_1' admet une limite finie en 1.
1° possibilité.. Même chose qu'en 0 ! (Il est utile de poser $X=1-x$)... je vous le laisse.
2° possibilité .. $\forall x\in]0,1[$, $f_1(x)=-f_1(1-x)$ et f_1 est dérivable sur $]0,1[$.

Donc $\forall x\in]0,1[$, $f_1'(x)=f_1'(1-x)$

$\lim\limits_{x\to 1} f_1'(x)=\lim\limits_{x\to 1}\left(f_1'(1-x)\right)=\frac{1}{2\pi}$ $\left(\lim\limits_{x\to 0} f_1'(x)=\frac{1}{2\pi}\right)$

Donc f_1 est dérivable en 1, $f_1'(1)=1/2\pi$ et f_1' est continue en 1.

Finalement f est de classe C^1 sur $[0,1]$.

d] Cours !

Q2 Pas de souci.. Posons $M_1 = \max_{t\in[0,1]} |f'(t)|$ (f est de classe C^1 sur $[0,1]$).

Soit $n \in \mathbb{N}^*$

$$\int_0^1 f(x)\sin(2\pi n x)\,dx = \left[f(x)\frac{-\cos(2\pi n x)}{2\pi n}\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{1}{2\pi n} f'(x)\cos(2\pi n x)\,dx$$

$$\int_0^1 f(x)\sin(2\pi n x)\,dx = \frac{1}{2\pi n}\left([-f(1)+f(0)] + \int_0^1 f'(x)\cos(2\pi n x)\,dx\right)$$

$$\left|\int_0^1 f(x)\sin(2\pi n x)\,dx\right| = \frac{1}{2\pi n}\left|f(0)-f(1)+\int_0^1 f'(x)\cos(2\pi n x)\,dx\right| \leq \frac{1}{2\pi n}\left[|f(0)|+|f(1)|+\int_0^1 |f'(x)||\cos(2\pi n x)|\,dx\right]$$

$$\left|\int_0^1 f(x)\sin(2\pi n x)\,dx\right| \leq \frac{1}{2\pi n}\left[|f(0)|+|f(1)| + \int_0^1 M_1\times 1\,dx\right] = \frac{1}{2\pi n}\left[|f(0)|+|f(1)|+M_1\right]$$

Posons $a = \frac{1}{2\pi}\left[|f(0)|+|f(1)|+M_1\right] + 1$!! $\longrightarrow$ pour avoir $a>0$! } Voici à ce sujet une 1ère erreur dans L.G

$\left|\int_0^1 f(x)\sin(2\pi n x)\,dx\right| \leq \frac{a}{n}$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.

Le passage à la limite : $\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 f(x)\sin(2\pi n x)\,dx = 0$

Q3 Soit $p\in\mathbb{N}^*$. $I_p = \int_0^1 \underbrace{\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x}{2}\right)}_{u}\underbrace{\cos(2\pi p x)}_{v'}\,dx = \overbrace{\left[\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x}{2}\right)\frac{\sin(2\pi p x)}{2\pi p}\right]_0^1}^{0} - \int_0^1\left(x-\frac{1}{2}\right)\frac{\sin(2\pi p x)}{2\pi p}\,dx$

$$2\pi p I_p = \int_0^1 \underbrace{\left(\frac{1}{2}-x\right)}_{u}\underbrace{\sin(2\pi p x)}_{v'}\,dx = \left[\left(\frac{1}{2}-x\right)\frac{-\cos 2\pi p x}{2\pi p}\right]_0^1 - \int_0^1(-1)\left(-\frac{\cos(2\pi p x)}{2\pi p}\right)dx$$

$$2\pi p I_p = \frac{1}{4\pi p} + \frac{1}{4\pi p} - \frac{1}{2\pi p}\underbrace{\left[\frac{\sin(2\pi p x)}{2\pi p}\right]_0^1}_{0} = \frac{1}{2\pi p}\ ; \text{ donc } I_p = \frac{1}{(2\pi p)^2}$$

$\forall p\in\mathbb{N}^*,\ I_p = \frac{1}{4\pi^2 p^2}$.

Q4 a) Voici 1.. calcul classique ... à savoir faire

$x\in]0,1[$ et $n\in\mathbb{N}^*$ $\qquad 2\pi p x \not\equiv 0\ (2\pi)$ car $x\in]0,1[$ et $p\in[\![1,n]\!]$

$$2\sum_{p=1}^n \cos(2\pi p x) = 2\operatorname{Re}\left(\sum_{p=1}^n e^{i2\pi p x}\right) \underset{\substack{\uparrow \\ e^{i2\pi p x} = (e^{i2\pi x})^p}}{=} 2\operatorname{Re}\left(e^{i2\pi x}\frac{1-(e^{i2\pi x})^n}{1-e^{i2\pi x}}\right)$$

$$2\sum_{p=1}^n \cos(2\pi p x) = 2\operatorname{Re}\left[\frac{e^{i2\pi x}e^{i\pi n x}}{e^{i\pi x}}\ \frac{e^{-i\pi n x}-e^{i\pi n x}}{e^{-i\pi x}-e^{i\pi x}}\right] = 2\operatorname{Re}\left[e^{i\pi(n+1)x}\frac{-2i\sin \pi n x}{-2i\sin\pi x}\right] = 2\cos[\pi(n+1)x]\frac{\sin \pi n x}{\sin \pi x}$$

$$2\sum_{p=1}^n \cos(2\pi p x) = \frac{1}{\sin(\pi x)}\left[\sin[\pi(n+1)x+\pi n x] - \sin[\pi(n+1)x - \pi n x]\right]$$

$$2\sum_{p=1}^n \cos(2\pi p x) = \frac{1}{\sin(\pi x)}\left[\sin((2n+1)\pi x) - \sin(\pi x)\right] = \frac{1}{\sin \pi x}\left[\sin(2n\pi x)\cos(\pi x) + \cos(2n\pi x)\sin\pi x - \sin\pi x\right]$$

$$2\sum_{p=1}^n \cos(2\pi p x) = \sin(2\pi n x)\cot \pi x + \cos(2\pi n x) - 1$$

Voici 2.. $\left(2\sum_{p=1}^n \cos(2\pi p x)\right)\times\sin\pi x = \sum_{p=1}^n \sin(2\pi p x+\pi x) - \sum_{p=1}^n \sin(2\pi p x - \pi x) = \sum_{p=1}^n \sin((2p+1)\pi x) - \sum_{p=1}^n \sin((2p-1)\pi x)$

Donc $\left(2\sum_{p=1}^{n}\cos(2\pi p x)\right)\sin\pi x = \sin((2n+1)\pi x) - \sin(\pi x)$ (p → p+1 dans le second Σ)

$= \sin(2\pi n x)\cos\pi x + \cos(2\pi n x)\sin\pi x - \sin\pi x$

On retrouve le résultat en divisant par $\sin\pi x$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$

b) V. $\forall x \in]0,1[$, $2\sum_{p=1}^{n}\cos(2\pi p x) = \cot\pi x \sin(2\pi n x) + \cos(2\pi n x) - 1$

Donc $\forall x \in]0,1[$, $2\sum_{p=1}^{n}\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x}{2}\right)\cos(2\pi p x) = f_1(x)\sin(2\pi n x) + \left(\frac{x^2}{2}-\frac{x}{2}\right)\cos(2\pi n x) - \left(\frac{x^2}{2}-\frac{x}{2}\right)$.

Remarquons que ce résultat vaut encore pour $x=0$ et $x=1$.

Donc $\forall x \in [0,1]$, $2\sum_{p=1}^{n}\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x}{2}\right)\cos(2\pi p x) = f_1(x)\sin(2\pi n x) + \left(\frac{x^2}{2}-\frac{x}{2}\right)\cos(2\pi n x) - \left(\frac{x^2}{2}-\frac{x}{2}\right)$.

En divisant par 2 et en intégrant entre 0 et 1 on obtient :

$$\sum_{p=1}^{n} I_p = \frac{1}{2}\int_0^1 f_1(x)\sin(2\pi n x)\,dx + \frac{1}{2}\int_0^1\left(\frac{x^2}{2}-x\right)\cos(2\pi n x)\,dx - \frac{1}{2}\int_0^1\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x}{2}\right)dx.$$

c) Ceci donne encore, pour $n \in \mathbb{N}^*$: Voir 2ième erreur dans L + G.

$$\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{4\pi^2p^2} = \frac{1}{2}\int_0^1 f_1(x)\sin(2\pi n x)\,dx + \frac{1}{8\pi^2n^2} - \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{12}\right) \quad \left(\cdots\int_0^1\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x}{2}\right)dx = -\frac{1}{12}\right)$$

$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\int_0^1 f_1(x)\sin(2\pi n x)\,dx\right) = 0$ (f_1 de classe C^1 + Q2) et $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{8\pi^2n^2} = 0$.

Donc $\lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{4\pi^2p^2}\right) = \frac{1}{24}$; $\lim_{n\to+\infty}\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{p^2} = \frac{4\pi^2}{24} = \frac{\pi^2}{6}$

Finalement : $\boxed{S_2 = \sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{p^2} = \frac{\pi^2}{6}}$ (ce qui ne surprend personne)

Q5 **a)**

$\frac{\pi^2}{6} \simeq 1,644\,934$

$S_2(10) \simeq 1,549\,768$ $(1,549\,767\,731)$; $S_2(10) + 1/10 \simeq 1,649\,768$

$S_2(100) \simeq 1,634\,984$ $(1,634\,983\,900)$; $S_2(10) + 1/100 \simeq 1,644\,984$

$S_2(1000) \simeq 1,643\,935$ $(1,643\,934\,567)$; $S_2(10) + 1/1000 \simeq 1,644\,935$

Remarquer 1.. $\frac{\pi^2}{6} \simeq 1,644\,934\,067$ 2.. FX 1000 C

```
? → N : 1 → P : 0 → X
Lbl 0
X + 1 ÷ P² → X
P+1 → P
P ≤ N ⇒ Goto 0
X ◢
```

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Notons que : $\frac{\pi^2}{6} - S_2(n) = R_2(n) = \sum_{p=n+1}^{+\infty}\frac{1}{p^2}$

(0) donne ici $\forall p \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{(p+1)^2} \leq \frac{1}{p} - \frac{1}{p+1} \leq \frac{1}{p^2}$.

Soit $q \in \mathbb{N}$ et $q \geqslant n+1$. $\displaystyle\sum_{p=n}^{q} \frac{1}{(p+1)^2} \leqslant \sum_{p=n}^{q}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{p+1}\right) = \frac{1}{n}-\frac{1}{q+1} \leqslant \frac{1}{n}$ et (5)

$$\sum_{p=n+1}^{q} \frac{1}{p^2} \geqslant \sum_{p=n+1}^{q}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{p+1}\right) = \frac{1}{n+1}-\frac{1}{q+1}$$

donc $\displaystyle \frac{1}{n+1}-\frac{1}{q+1} \leqslant \sum_{p=n+1}^{q}\frac{1}{p^2}$ et $\displaystyle\sum_{p=n+1}^{q+1}\frac{1}{p^2} = \sum_{p=n}^{q}\frac{1}{(p+1)^2} \leqslant \frac{1}{n}$.

En faisant tendre q vers $+\infty$ on obtient : $\dfrac{1}{n+1} \leqslant R_2(n) \leqslant \dfrac{1}{n}$.

Soit : $\dfrac{1}{n+1} \leqslant \dfrac{\pi^2}{6} - S_2(n) \leqslant \dfrac{1}{n}$

donc : $0 \leqslant \dfrac{\pi^2}{6} - S_2(n) \leqslant \dfrac{1}{n}$; et : $\dfrac{1}{n+1}-\dfrac{1}{n} \leqslant \dfrac{\pi^2}{6} - S_2(n) - \dfrac{1}{n} \leqslant 0$ ou encore :

$0 \leqslant S_2(n) + \dfrac{1}{n} - \dfrac{\pi^2}{6} \leqslant \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1} = \dfrac{1}{n(n+1)} \leqslant \dfrac{1}{n^2}$.

Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\underline{\underline{0 \leqslant \dfrac{\pi^2}{6} - S_2(n) \leqslant \dfrac{1}{n}}}$ et $\underline{\underline{0 \leqslant S_2(n) + \dfrac{1}{n} - \dfrac{\pi^2}{6} \leqslant \dfrac{1}{n^2}}}$.

c)

	$\frac{\pi^2}{6} - S_2(n)$ *	$1/n$	$S_2(n) + \frac{1}{n} - \frac{\pi^2}{6}$ *	$1/n^2$
$n=10$	0,095166067	0,1	0,004 533 933	0,01
$n=100$	0,009 950 067	0,01	0,000 049 933	0,0001
$n=1000$	0,000 999 067	0,001	0,000 000 933	0,000001

Tout est clair ! Vu ?!

* Avec les valeurs approchées trouvées dans $\underline{a)}$ + la valeur approchée de $\frac{\pi^2}{6}$ donnée par la machine

---

PARTIE II | Et voilà les polynômes de Bernoulli ... ou presque !

A) $\underline{\text{Etude d'une suite de polynômes}}$

1) $\underline{a)}$ Notons que : $r_0 = 1$ et $\forall n \in [\![1,+\infty[\![$, $\displaystyle\sum_{j=0}^{n-1}\frac{r_j}{(n-j)!} = 0$

$\Updownarrow$

$r_0 = 1$ et $\forall n \in [\![0,+\infty[\![$ $\displaystyle\sum_{j=0}^{n+1}\frac{r_j}{(n+2-j)!} = 0$.

$\Updownarrow$

$r_0 = 1$ et $\forall n \in [\![0,+\infty[\![$, $\displaystyle 0 = \sum_{j=0}^{n}\frac{r_j}{(n+2-j)!} + \frac{r_{n+1}}{1!}$

$\Updownarrow$

$r_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle r_{n+1} = -\sum_{j=0}^{n}\frac{r_j}{(n+2-j)!}$

→ Montrons $\underline{\text{l'unicité}}$. Supposons que $(r_n)_{n\geqslant 0}$ et $(r'_n)_{n\geqslant 0}$ soient deux solutions.

Montrons en utilisant une récurrence faible que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ r_n = r'_n$.

→ C'est clair pour $n=0$

→ Supposons l'égalité vraie jusqu'à $n \in \mathbb{N}$. Montrons l'égalité pour $n+1$

$$r_{n+1} = -\sum_{j=0}^{n} \frac{r_j}{(n+1-j)!} \underset{HR}{\uparrow}{=} -\sum_{j=0}^{n} \frac{r'_j}{(n+1-j)!} = r'_{n+1}.$$ Ceci achève la récurrence.

Existence.. Considérons la suite de réels $(r_n)_{n\geq 0}$ définie par la récurrence faible suivante

$$r_0 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ r_{n+1} = -\sum_{j=0}^{n} \frac{r_j}{(n+1-j)!}$$

$(r_n)_{n\geq 0}$ est solution du problème dès que l'on montre que : $\forall n \in \mathbb{N},\ r_n \in \mathbb{Q}$.

→ C'est clair pour $n=0$.

→ Supposons la propriété vraie jusqu'à $n \in \mathbb{N}$ et montrons la pour $n+1$.

$\forall j \in [\![0,n]\!],\ r_j \in \mathbb{Q}$ et $\frac{1}{(n+1-j)!} \in \mathbb{Q}$ donc $r_{n+1} = -\sum_{j=0}^{n} \frac{r_j}{(n+1-j)!} \in \mathbb{Q}$!

$n=1$ donne : $\frac{r_0}{2!} + \frac{r_1}{1} = 0$; $r_1 = -\frac{r_0}{2} = -\frac{1}{2}$ $\qquad 1! \times r_1 = -\frac{1}{2}$

$n=2$ donne : $\frac{r_0}{3!} + \frac{r_1}{2!} + \frac{r_2}{1!}$; $r_2 = -\frac{r_0}{6} - \frac{r_1}{2} = -\frac{1}{6} + \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$ $\qquad 2! \times r_2 = \frac{1}{6}$

$n=3$ donne : $\frac{r_0}{4!} + \frac{r_1}{3!} + \frac{r_2}{2!} + \frac{r_3}{1!}$; $r_3 = -\frac{1}{24}r_0 - \frac{1}{6}r_1 - \frac{1}{2}r_2 = -\frac{1}{24} + \frac{1}{12} - \frac{1}{24} = 0$ $\qquad 3!\, r_3 = 0$

$r_0 = 1$; $r_1 = -\frac{1}{2}$; $r_2 = \frac{1}{12}$; $r_3 = 0$. De même $r_4 = -\frac{1}{720}$ $\qquad 4!\, r_4 = -\frac{1}{30}$

oubli !!

Nombres de Bernoulli

b) Clairement $P_0 = \sum_{j=0}^{0} \frac{r_j}{(0-j)!} X^{0-j} = r_0 = 1$. $\qquad \underline{P_0 = 1}$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $P'_n(X) = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{r_j}{(n-j)!}(n-j) X^{n-1-j} = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{r_j}{(n-1-j)!} X^{n-1-j} = P_{n-1}(X)$. $\qquad \underline{P'_n(X) = P_{n-1}(X)}$

($\frac{r_n}{(n-n)!} X^{n-n}$ est une constante)

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $n \geq 2$. $P_n(1) = \sum_{j=0}^{n} \frac{r_j}{(n-j)!} = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{r_j}{(n-j)!} + \frac{r_n}{0!} \overset{\text{par définition des } r_j}{=} r_n$

$$P_n(0) = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{r_j}{(n-j)!} 0^{n-j} + \frac{r_n}{(n-n)!} = r_n = P_n(1).$$ $\qquad \underline{P_n(0) = P_n(1)}$

La suite (P_n) vérifie donc (1), (2), (3).

$P_1 = \frac{r_0}{1!} X^1 + \frac{r_1}{0!} X^0 = X - \frac{1}{2}$ $\qquad P_1 = X - \frac{1}{2}$

$P_2 = \frac{r_0}{2!} X^2 + \frac{r_1}{1!} X^1 + \frac{r_2}{0!} X^0 = \frac{1}{2}X^2 - \frac{1}{2}X + \frac{1}{12}$ $\qquad P_2 = \frac{1}{2}(X^2 - X + \frac{1}{6})$

$P_3 = \frac{r_0}{3!} X^3 + \frac{r_1}{2!} X^2 + \frac{r_2}{1!} X + \frac{r_3}{0!} X^0 = \frac{1}{6}X^3 - \frac{1}{4}X^2 + \frac{1}{12}X$ $\qquad P_3 = \frac{1}{6}(X^3 - \frac{3}{2}X^2 + \frac{1}{2}X)$

__Remarque__.. Les $n!\, P_n$ sont les polynômes de Bernoulli.

De même $P_4 = \frac{r_0}{4!} X^4 + \frac{r_1}{3!} X^3 + \frac{r_2}{2!} X^2 + \frac{r_3}{1!} X + \frac{r_4}{0!}$ $\qquad P_4 = \frac{1}{24}X^4 - \frac{1}{12}X^3 + \frac{1}{24}X^2 - \frac{1}{720}$

Q2 Q1 vient de nous montrer l'existence d'une suite de polynômes vérifiant (1), (2), (3), Q2 va nous en montrer l'unicité. Patience !

a) Prouvons par récurrence que : $\forall n\in\mathbb{N},\ Q_n(X)=\sum_{j=0}^{n}\frac{Q_j(0)}{(n-j)!}X^{n-j}$

- $\sum_{j=0}^{0}\frac{Q_j(0)}{(0-j)!}X^{0-j}=Q_0(0)=1=Q_0$!

- Supposons la propriété vraie pour $n\in\mathbb{N}$ et montrons la pour $n+1$.

$Q'_{n+1}=Q_n$ et $Q_n(X)=\sum_{j=0}^{n}\frac{Q_j(0)}{(n-j)!}X^{n-j}$ (← Hypothèse de récurrence). Par conséquent :

$\exists\lambda\in\mathbb{R},\ Q_{n+1}(X)=\sum_{j=0}^{n}\frac{Q_j(0)}{(n-j)!}\frac{1}{n-j+1}X^{n-j+1}+\lambda=\sum_{j=0}^{n}\frac{Q_j(0)}{(n+1-j)!}X^{n-j+1}+\lambda$

Ne reste plus qu'à montrer que : $\lambda=\frac{Q_{n+1}(0)}{(n+1-(n+1))!}X^{n-(n+1)+1}$ c'est à dire que : $\lambda=Q_{n+1}(0)$.

Rien de plus clair car $Q_{n+1}(0)=\underbrace{\sum_{j=0}^{n}\frac{Q_j(0)}{(n+1-j)!}0^{n-j+1}}_{=0}+\lambda$ donc $\lambda=Q_{n+1}(0)$

Finalement : $Q_{n+1}(X)=\sum_{j=0}^{n}\frac{Q_j(0)}{(n+1-j)!}X^{n+1-j}+Q_{n+1}(0)=\sum_{j=0}^{n+1}\frac{Q_j(0)}{(n+1-j)!}X^{n+1-j}$; ceci achève la récurrence.

b) $Q_0(0)=1$ résulte de $Q_0=1$

Soit $n\in\mathbb{N}$ et $n\geqslant 2$. $Q_n(1)=Q_n(0)$ donc $\sum_{j=0}^{n}\frac{Q_j(0)}{(n-j)!}=\frac{Q_n(0)}{(n-n)!}=Q_n(0)$.

On a donc $0=\sum_{j=0}^{n}\frac{Q_j(0)}{(n-j)!}-Q_n(0)=\sum_{j=0}^{n-1}\frac{Q_j(0)}{(n-j)!}$; $\sum_{j=0}^{n-1}\frac{Q_j(0)}{(n-j)!}=0$ pour $n\geqslant 2$.

c) Nous avons $Q_0(0)=1$ et $\forall n\in[\![2,+\infty[\![$, $\sum_{j=0}^{n-1}\frac{Q_j(0)}{(n-j)!}=0$.

Si nous montrons que : $\forall n\in\mathbb{N},\ Q_n(0)\in\mathbb{Q}$, Q1 a nous donnera : $\forall n\in\mathbb{N},\ Q_n(0)=r_n$

Nous aurons alors : $\forall n\in\mathbb{N},\ Q_n(X)=\sum_{j=0}^{n}\frac{Q_j(0)}{(n-j)!}X^{n-j}=\sum_{j=0}^{n}\frac{r_j}{(n-j)!}X^{n-j}=P_n(X)$.

Montrons à l'aide d'une récurrence forte que : $\forall n\in\mathbb{N},\ Q_n(0)\in\mathbb{Q}$.

→ C'est clair pour $n=0$ car $Q_0=1$

→ Supposons la propriété vraie jusqu'à $n\in\mathbb{N}$ et montrons la pour $n+1$.

$\sum_{j=0}^{n+1}\frac{Q_j(0)}{(n+2-j)!}=Q_{n+1}(0)+\sum_{j=0}^{n}\frac{Q_j(0)}{(n+2-j)!}$; $Q_{n+1}(0)=-\sum_{j=0}^{n}\frac{Q_j(0)}{(n+2-j)!}\overset{H.R.}{\in}\mathbb{Q}$ ... cqfd.

Q3 a) Pour avoir $P_n(X)=(-1)^nP_n(1-X)$ pour tout $n\in\mathbb{N}$, il suffit de montrer que :

la suite $((-1)^nP_n(1-X))$ vérifie (1), (2) et (3).

→ $(-1)^0P_0(1-X)=P_0(X)=1$.

→ $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \left((-1)^nP_n(1-X)\right)'=(-1)^n(-1)P'_n(1-X)=(-1)^{n+1}P_{n-1}(1-X)=(-1)^2(-1)^{n-1}P_{n-1}(1-X)=(-1)^{n-1}P_{n-1}(1-X)$

facile !

→ $(-1)^nP_n(1-1)=(-1)^nP_n(0)=(-1)^nP_n(1)=(-1)^nP_n(1-0)$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

Donc $((-1)^nP_n(1-X))$ vérifie (1), (2) et (3) ; Q2 nous donne alors : $\forall n\in\mathbb{N},\ P_n(X)=(-1)^nP_n(1-X)$

b) Soit $\ell \in \mathbb{N}^*$. $P_{2\ell+1}(1) = P_{2\ell+1}(0)$ d'après (3) $(2\ell+1 \geq 2)$

$P_{2\ell+1}(1) = (-1)^{2\ell+1} P_{2\ell+1}(1-1) = -P_{2\ell+1}(0)$ d'après 9)3a

Donc $P_{2\ell+1}(1) = P_{2\ell+1}(0) = -P_{2\ell+1}(1)$; par conséquent : $P_{2\ell+1}(0) = P_{2\ell+1}(1) = 0$.

$\forall n \in \mathbb{N}$, $P_n(X) = \sum_{j=0}^{n} \frac{r_j}{(n-j)!} X^{n-j} \underset{\uparrow_{9c}}{=} \sum_{j=0}^{n} \frac{P_j(0)}{(n-j)!} X^{n-j}$; donc $\forall j \in \mathbb{N}$, $r_j = P_j(0)$.

Par conséquent si $\ell \in \mathbb{N}^*$: $r_{2\ell+1} = 0$.

$$0 = \sum_{j=0}^{7-1} \frac{r_j}{(7-j)!} = \frac{r_0}{7!} + \frac{r_1}{6!} + \frac{r_2}{5!} + \frac{r_3}{4!} + \frac{r_4}{3!} + \frac{r_5}{2!} + \frac{r_6}{1!} = \frac{1}{5040} - \frac{1}{2}\times\frac{1}{720} + \frac{1}{120}\times\frac{1}{12} + 0 + \frac{1}{6}\times\left(-\frac{1}{720}\right) + r_6$$

$r_6 = -\frac{1}{30240}[6 - 21 + 21 - 7]$; $\underline{\underline{r_6 = \frac{1}{30240}}}$. $\left(6!\, r_6 = \frac{1}{42}\right)$

↑ dénominateur commun !

$$0 = \sum_{j=0}^{9-1} \frac{r_j}{(9-j)!} = \frac{r_0}{9!} + \frac{r_1}{8!} + \frac{r_2}{7!} + \frac{r_3}{6!} + \frac{r_4}{5!} + \frac{r_5}{4!} + \frac{r_6}{3!} + \frac{r_7}{2!} + \frac{r_8}{1!} = \frac{1}{9!} - \frac{1}{2}\frac{1}{8!} + \frac{1}{12}\times\frac{1}{7!} + \frac{1}{5!}\frac{-1}{720} + \frac{1}{3!}\frac{1}{30240} + r_8$$

$$r_8 = -\frac{1}{9!}\left[1 - \frac{1}{2}\times 9 + \frac{9\times 8}{12} - \frac{9\times 8\times 7\times 6}{720} + \frac{9\times 8\times 7\times 6\times 5\times 4}{30240}\right] = -\frac{1}{9!}\left[-\frac{7}{2} + 6 - \frac{21}{5} + 2\right]$$

$r_8 = -\frac{1}{9!}\times\frac{3}{10} = -\frac{3}{3628800} = -\frac{1}{1209600}$; $\underline{\underline{r_8 = -\frac{1}{1.209.600}}}$ $\left(8!\, r_8 = -\frac{1}{30}\right)$.

B) Expression de S_{2k}.

(9)1) a) Soit $x \in]0,1[$. $f_k(1-x) = (P_{2k}(1-x) - r_{2k}) \cot(\pi(1-x))$

$f_k(1-x) \underset{\uparrow}{=} (P_{2k}(x) - r_{2k})(-\cot \pi x) = -f_k(x)$.

$P_{2k}(X) = (-1)^{2k} P_{2k}(1-X) = P_{2k}(1-X)$

Donc $\forall x \in]0,1[$, $1-x \in]0,1[$ et $\underline{\underline{f_k(1-x) = -f_k(x)}}$

Remarque.. le point de coordonnées $(\frac{1}{2}, 0)$ est centre de symétrie de la courbe représentative de f_k

b) $f_k(x) = (P_{2k}(x) - r_{2k}) \cot \pi x = (P_{2k}(x) - r_{2k}) \frac{\cos \pi x}{\sin \pi x} \underset{0}{\sim} (P_{2k}(x) - r_{2k}) \times \frac{1}{\pi x}$.

$$P_{2k}(x) - r_{2k} = \sum_{j=0}^{2k} \frac{r_j}{(2k-j)!} x^{2k-j} - r_{2k} \underset{\uparrow}{=} \sum_{j=0}^{2k-1} \frac{r_j}{(2k-j)!} x^{2k-j} = x \sum_{j=0}^{2k-1} \frac{r_j}{(2k-j)!} x^{2k-j-1}$$

$\frac{r_{2k}}{(2k-2k)!} x^{2k-2k} = r_{2k}$

Donc $f_k(x) \underset{0}{\sim} \frac{1}{\pi} \sum_{j=0}^{2k-1} \frac{r_j}{(2k-j)!} x^{2k-j-1}$, de plus $\lim_{x\to 0} \sum_{j=0}^{2k-1} \frac{r_j}{(2k-j)!} x^{2k-j-1} = r_{2k-1} \underset{\uparrow_{k\geq 2}}{=} 0$

Donc $\lim_{x\to 0} f_k(x) = 0$. $\lim_{x\to 1} f_k(x) = \lim_{x\to 1}(-f_k(1-x)) = \lim_{x\to 0}(-f_k(x)) = 0$

Donc $\lim_{x\to 1} f_k(x) = 0$

Remarque.. Dans la suite $f_k(0) = f_k(1) = 0$ et $\forall x \in]0,1[$, $f_k(x) = (P_{2k}(x) - r_{2k}) \cot \pi x$.

Donc f_k est continue sur $[0,1]$.

calcul déjà fait.

f_ℓ est continue sur $[0,1]$.

f_ℓ est dérivable sur $]0,1[$ et $\forall x\in]0,1[$, $f_\ell'(x)=P_{2\ell}'(x)\cot\pi x+(P_{2\ell}(x)-r_{2\ell})\left(-\frac{\pi}{\sin^2\pi x}\right)$

Clairement f_ℓ' est continue sur $]0,1[$

Pour montrer que f_ℓ est de classe C^1, il ne reste plus qu'à montrer que f_ℓ' admet une limite finie en 0 et en 1 (... prolongement de la dérivée).

Notons que $\forall x\in]0,1[$, $f_\ell(x)=-f_\ell(1-x)$ donc $\forall x\in]0,1[$, $f_\ell'(x)=\pm f_\ell'(1-x)$.

Par conséquent si $\lim_{x\to0}f_\ell'(x)=\ell$ avec $\ell\in\mathbb{R}$ alors $\lim_{x\to1}f_\ell'(x)=\ell$

Il reste donc qu'à étudier f_ℓ' au voisinage de 0.

$\forall x\in]0,1[$, $P_{2\ell}(x)-r_{2\ell}=\sum_{j=0}^{2\ell}\frac{r_j}{(2\ell-j)!}x^{2\ell-j}-r_{2\ell}=\sum_{j=0}^{2\ell-1}\frac{r_j}{(2\ell-j)!}x^{2\ell-j}=\frac{r_{2\ell-1}}{1!}x+\frac{r_{2\ell-2}}{2!}x^2+\sum_{j=0}^{2\ell-3}\frac{r_j}{(2\ell-j)!}x^{2\ell-j}$

Donc $\forall x\in]0,1[$, $P_{2\ell}(x)-r_{2\ell}=r_{2\ell-1}x+\frac{1}{2}r_{2\ell-2}x^2+x^2\sum_{j=0}^{2\ell-3}\frac{r_j}{(2\ell-j)!}x^{2\ell-j-2}$ ← puissance strictement positive

$\forall x\in]0,1[$, $P_{2\ell}(x)-r_{2\ell}\underset{\substack{\uparrow\\ r_{2\ell-1}=0 \text{ car } 2\ell-1\geq3}}{=}\frac{1}{2}r_{2\ell-2}x^2+x^2\varphi(x)$ avec $\lim_{x\to0}\varphi(x)=0$.

Finalement $\lim_{x\to0}\frac{P_{2\ell}(x)-r_{2\ell}}{x^2}=\frac{1}{2}r_{2\ell-2}$ or : $(P_{2\ell}(x)-r_{2\ell})\left(-\frac{\pi}{\sin^2\pi x}\right)\underset{0}{\sim}\frac{(P_{2\ell}(x)-r_{2\ell})}{x^2}\times-\frac{\pi}{\pi^2}$

$\sin^2\pi x\underset{0}{\sim}\pi^2x^2$

Donc $\lim_{x\to0}\left[(P_{2\ell}(x)-r_{2\ell})\left(-\frac{\pi}{\sin^2\pi x}\right)\right]=-\frac{r_{2\ell-2}}{2\pi}$

Il reste plus qu'à étudier $\lim_{x\to0}(P_{2\ell}'(x)\cot\pi x)$

$P_{2\ell}'(x)\cot(\pi x)=P_{2\ell-1}(x)\frac{\cos\pi x}{\sin\pi x}\underset{0}{\sim}P_{2\ell-1}(x)\frac{1}{\pi x}$

$\forall x\in]0,1[$, $P_{2\ell-1}(x)=\sum_{j=0}^{2\ell-1}\frac{r_j}{(2\ell-1-j)!}x^{2\ell-1-j}=r_{2\ell-1}+\frac{r_{2\ell-2}}{1!}x+x\sum_{j=0}^{2\ell-3}\frac{r_j}{(2\ell-1-j)}x^{2\ell-2-j}$ ← puissance >0

Donc $\forall x\in]0,1[$, $P_{2\ell-1}(x)\underset{\substack{\uparrow\\ r_{2\ell-1}=0}}{=}r_{2\ell-2}x+x\psi(x)$ avec $\lim_{x\to0}\psi(x)=0$.

Donc $\lim_{x\to0}\frac{P_{2\ell-1}(x)}{x}=r_{2\ell-2}$. Par conséquent $\lim_{x\to0}\left(P_{2\ell}'(x)\cot(\pi x)\right)=\frac{r_{2\ell-2}}{\pi}$

Finalement $\lim_{x\to0}f_\ell'(x)=\frac{r_{2\ell-2}}{\pi}-\frac{r_{2\ell-2}}{2\pi}=\frac{1}{2\pi}r_{2\ell-2}$ $(<+\infty\ !)$ ↙ 3ème erreur dans L+G.

f_ℓ est donc de classe C^1 sur $[0,1]$. Notons que $f_\ell'(0)=f_\ell'(1)=\frac{1}{2\pi}r_{2\ell-2}$.

(Q2) a) $J_p(1)=\int_0^1 P_2(x)\cos(2\pi px)\,dx=\int_0^1\left(\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x+\frac{1}{12}\right)\cos 2\pi px\,dx$

$J_p(1)=\underbrace{\left[\left(\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x+\frac{1}{12}\right)\frac{\sin 2\pi px}{2\pi p}\right]_0^1}_{0}-\int_0^1\left(x-\frac{1}{2}\right)\frac{\sin2\pi px}{2\pi p}dx=-\frac{1}{2\pi p}\left(\left[\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{\cos2\pi px}{2\pi p}\right)\right]_0^1-\int_0^1\left(-\frac{\cos2\pi px}{2\pi p}\right)dx\right)$

$J_p(1)=-\frac{1}{2\pi p}\left[\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2\pi p}\right)-\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2\pi p}\right)+\frac{1}{2\pi p}\times\frac{1}{2\pi p}\underbrace{\left[\sin2\pi px\right]_0^1}_{=0}\right]=\frac{1}{(2\pi p)^2}=\frac{1}{4\pi^2p^2}$

Plus simplement $J_p(1)=\int_0^1\frac{x^2-x}{2}\cos 2\pi px\,dx+\frac{1}{12}\int_0^1\cos(2\pi px)\,dx=I_p+\frac{1}{12}\left[\frac{\sin2\pi px}{2\pi p}\right]_0^1=I_p=\frac{1}{4\pi^2p^2}$!

b) $J_p(k+1) = \int_0^1 P_{2k+2}(x)\cos(2\pi p x)\,dx = \underbrace{\left[P_{2k+2}(x)\frac{\sin(2\pi p x)}{2\pi p}\right]_0^1}_{=0} - \int_0^1 P'_{2k+2}(x)\frac{\sin(2\pi p x)}{2\pi p}\,dx$

Donc $\underset{P'_{2k+2}=P_{2k+1}}{J_p(k+1)} = -\frac{1}{2\pi p}\int_0^1 P_{2k+1}(x)\sin(2\pi p x)\,dx = -\frac{1}{2\pi p}\left(\left[P_{2k+1}(x)\left(-\frac{\cos 2\pi p x}{2\pi p}\right)\right]_0^1 - \int_0^1 P'_{2k+1}(x)\left(-\frac{\cos 2\pi p x}{2\pi p}\right)dx\right)$

$J_p(k+1) = \frac{1}{4\pi^2p^2}\left(\underbrace{P_{2k+1}(1)-P_{2k+1}(0)}_{=0}\right) - \frac{1}{4\pi^2p^2}\int_0^1 P'_{2k+1}(x)\cos(2\pi p x)\,dx = -\frac{1}{4\pi^2p^2}\int_0^1 P_{2k}(x)\cos(2\pi p x)\,dx.$

Donc $J_p(k+1) = -\frac{1}{4\pi^2p^2}J_p(k)$.

$(J_p(k))_{k\geq 1}$ est géométrique de raison $-\frac{1}{4\pi^2p^2}$

$\forall k\in\mathbb{N}^*$, $J_p(k) = \left(-\frac{1}{4\pi^2p^2}\right)^{k-1}J_p(1) = \left(-\frac{1}{4\pi^2p^2}\right)^{k-1}\left(\frac{1}{4\pi^2p^2}\right) = -\left(-\frac{1}{4\pi^2p^2}\right)^k$

$\forall k\in\mathbb{N}^*$, $I_p(k) = \int_0^1 P_{2k}(x)\cos 2\pi p x\,dx - \int_0^1 r_{2k}\cos(2\pi p x)\,dx = J_p(k) - r_{2k}\left[\frac{\sin(2\pi p x)}{2\pi p}\right]_0^1 = J_p(k).$

Donc $\underline{\forall k\in\mathbb{N}^*, \quad I_p(k) = J_p(k) = -\left(-\frac{1}{4\pi^2p^2}\right)^k.}$

9.3) a) Soit $n\in\mathbb{N}^*$. $I_1(k)+I_2(k)+\dots+I_n(k) = -\sum_{p=1}^n\left(-\frac{1}{4\pi^2p^2}\right)^k = \frac{(-1)^{k+1}}{(4\pi^2)^k}\sum_{p=1}^n\frac{1}{p^{2k}}$

Donc $I_1(k)+I_2(k)+\dots+I_n(k) = \frac{(-1)^{k+1}}{(4\pi^2)^k}S_{2k}(n)$.

$I_1(k)+I_2(k)+\dots+I_n(k) = \sum_{p=1}^n I_p(k) = \int_0^1 (P_{2k}(x)-r_{2k})\left(\sum_{p=1}^n\cos(2\pi p x)\right)dx$

$\forall x\in]0,1[$, $(P_{2k}(x)-r_{2k})\sum_{p=1}^n\cos(2\pi p x) = (P_{2k}(x)-r_{2k})\frac12\left[\cot \pi x \sin 2\pi n x + \cos 2\pi n x - 1\right]$

$\forall x\in]0,1[$, $(P_{2k}(x)-r_{2k})\sum_{p=1}^n\cos(2\pi p x) = \frac12 f_k(x)\sin(2\pi n x) + \frac12(P_{2k}(x)-r_{2k})(\cos 2\pi n x - 1)$

Notons que ceci vaut encore pour $x=0$ et $x=1$ car $P_{2k}(0)=P_{2k}(1)=r_{2k}$!

Donc $\sum_{p=1}^n J_p(k) = \frac12\int_0^1 f_k(x)\sin(2\pi n x)\,dx + \frac12\int_0^1(P_{2k}(x)-r_{2k})(\cos 2\pi n x - 1)\,dx.$

Donc $\sum_{p=1}^n I_p(k) = \frac12\int_0^1 f_k(x)\sin(2\pi n x)\,dx + \frac12 I_n(k) - \frac12\int_0^1(P_{2k}(x)-r_{2k})\,dx.$

$\int_0^1 (P_{2k}(x)-r_{2k})\,dx = \int_0^1(P'_{2k+1}(x)-r_{2k})\,dx = \left[P_{2k+1}(x)-xr_{2k}\right]_0^1 \underset{P_{2k+1}(1)=P_{2k+1}(0)=0}{=} -r_{2k}.$

Pour finir : $I_1(k)+I_2(k)+\dots+I_n(k) = \frac{(-1)^{k+1}}{(4\pi^2)^k}S_{2k}(n) = \frac12\int_0^1 f_k(x)\sin(2\pi n x)\,dx + \frac12 I_n(k) + r_{2k}/2$

f_k est de classe C^1 sur $[0,1]$ donc $\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 f_k(x)\sin(2\pi n x)\,dx = 0$ (I Q c)

$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac12 I_n(k)\right) = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac12\left(-\left(-\frac{1}{4\pi^2n^2}\right)^k\right)\right) = 0$

Donc $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{(-1)^{k+1}}{(4\pi^2)^k}S_{2k}(n)\right) = \frac{r_{2k}}{2}$; $\frac{(-1)^{k+1}}{(4\pi^2)^k}S_{2k} = \frac{r_{2k}}{2}$. $\underline{S_{2k} = (-1)^{k+1}\frac{(4\pi^2)^k}{2}r_{2k}.}$

b) $S_2 = (-1)^{k+1}\frac{(4\pi^2)^2}{2} r_2 = \frac{4\pi^2}{2} r_2 = 2\pi^2 \times \frac{1}{12} = \frac{\pi^2}{6}$. $\qquad \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^2} = \frac{\pi^2}{6}$ (11)

$k=1$ (dans B), $k \geq 2$!!!)

$S_4 = -\frac{(4\pi^2)^2}{2} r_4 = -8\pi^4 \times \left(-\frac{1}{720}\right) = \frac{\pi^4}{90} \qquad \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^4} = \frac{\pi^4}{90}$

$S_6 = \frac{(4\pi^2)^3}{2} r_6 = 32\pi^6 r_6 = 32\pi^6 \frac{1}{30240} = \frac{\pi^6}{945}$. $\qquad \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^6} = \frac{\pi^6}{945}$

$S_8 = -\frac{(4\pi^2)^4}{2} r_8 = -128\pi^8\left(-\frac{1}{1209600}\right) = \frac{\pi^8}{9450} \qquad \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^8} = \frac{\pi^8}{9450}$

(Q4) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $S_{2k} - S_{2k}(n) = R_{2k}(n) = \sum_{p=n+1}^{+\infty} \frac{1}{p^{2k}} = \sum_{p=n}^{+\infty} \frac{1}{(p+1)^{2k}}$

$\forall p \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{1}{(p+1)^{2k}} \leq \frac{1}{2k-1}\left(\frac{1}{p^{2k-1}} - \frac{1}{(p+1)^{2k-1}}\right)$

Donc $\forall q \in [\![n, +\infty[\![, \quad \sum_{p=n}^{q} \frac{1}{(p+1)^{2k}} \leq \frac{1}{2k-1}\left(\frac{1}{n^{2k-1}} - \frac{1}{(q+1)^{2k-1}}\right) \leq \frac{1}{2k-1} \times \frac{1}{n^{2k-1}}$

Par passage à la limite sur q : $\sum_{p=n}^{+\infty} \frac{1}{(p+1)^{2k}} = R_{2k}(n) \leq \frac{1}{2k-1} \times \frac{1}{n^{2k-1}}$

$\forall p \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{1}{2k-1}\left(\frac{1}{p^{2k-1}} - \frac{1}{(p+1)^{2k-1}}\right) \leq \frac{1}{p^{2k}}$. $\forall q \in [\![n+1, +\infty[\![, \quad \frac{1}{2k-1}\left(\frac{1}{(n+1)^{2k-1}} - \frac{1}{(q+1)^{2k-1}}\right) \leq \sum_{p=n+1}^{q} \frac{1}{p^{2k}}$

Donc par passage à la limite sur q : $\frac{1}{2k-1} \frac{1}{(n+1)^{2k-1}} \leq R_{2k}(n)$

Finalement $\quad \frac{1}{2k-1} \frac{1}{(n+1)^{2k-1}} \leq S_{2k} - S_{2k}(n) \leq \frac{1}{2k-1} \times \frac{1}{n^{2k-1}}$

Soit encore $\quad 0 \leq S_{2k}(n) - S_{2k} + \frac{1}{2k-1}\frac{1}{n^{2k-1}} \leq \frac{1}{2k-1}\left[\frac{1}{n^{2k-1}} - \frac{1}{(n+1)^{2k-1}}\right] \leq \frac{1}{n^{2k}}$ (0)

Donc $\quad \underline{0 \leq S_{2k}(n) - S_{2k} + \frac{1}{2k-1}\frac{1}{n^{2k-1}} \leq \frac{1}{n^{2k}}}$

$\frac{1}{n^4} \leq 10^{-6} \iff n \geq 32$; $\frac{1}{n^6} \leq 10^{-6} \iff n \geq 10$; $\frac{1}{n^8} \leq 10^{-6} \iff n \geq 6$.

Donc $\quad S_4(32) + \frac{1}{3}\frac{1}{32^3}$ est une valeur approchée à 10^{-6} de S_4

$S_6(10) + \frac{1}{5}\frac{1}{10^5}$ ——————————— S_6

$S_8(6) + \frac{1}{7}\frac{1}{6^7}$ ——————————— S_8

$S_4(32) \simeq 1{,}082\ 313\ 528 \qquad S_4(32) + \frac{1}{3}\frac{1}{32^3} \simeq 1{,}082\ 323\ 702$; $S_4 \simeq 1{,}082\ 324$

$S_6(10) \simeq 1{,}017\ 341\ 512 \qquad S_6(10) + \frac{1}{5}\frac{1}{10^5} \simeq 1{,}017\ 343\ 512$; $S_6 \simeq 1{,}017\ 344$

$S_8(6) \simeq 1{,}004\ 077\ 080 \qquad S_8(6) + \frac{1}{7} \times \frac{1}{6^7} \simeq 1{,}004\ 077\ 590$; $S_8 \simeq 1{,}004\ 077$

La machine donne avec $S_4 = \frac{\pi^4}{90} \simeq 1{,}082\ 323\ 234$

$S_6 = \frac{\pi^6}{945} \simeq 1{,}017\ 343\ 062$

$S_8 = \frac{\pi^8}{9450} \simeq 1{,}004\ 077\ 356$