



CHAMBRE DE COMMERCE ET D'INDUSTRIE DE PARIS
DIRECTION DE L'ENSEIGNEMENT
Direction des Admissions et concours

ECOLE DES HAUTES ETUDES COMMERCIALES
E.S.C.P.-E.A.P.
ECOLE SUPERIEURE DE COMMERCE DE LYON
CONCOURS D'ADMISSION SUR CLASSES PREPARATOIRES

OPTION GENERALE
MATHEMATIQUES I

Année 1988

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.

Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.

Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

L'objet du problème est d'étudier la convergence d'une suite de polynômes d'interpolation d'une fonction f , ce qui constitue la partie III. Dans la partie I, on construit les polynômes d'interpolation de f ; dans la partie II, on explicite un tel polynôme sur un exemple.

PARTIE I : Interpolation d'une fonction par un polynôme

Soient n un nombre entier naturel non nul et $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ une suite de nombres réels distincts. On leur associe les n polynômes $L_1, L_2, \dots, L_n$, définis pour $1 \leq j \leq n$ par :

$$L_j(x) = \prod_{\substack{1 \leq k \leq n \\ k \neq j}} \frac{x - x_k}{x_j - x_k}$$

1. Pour tout entier j tel que $1 \leq j \leq n$, expliciter le degré et les racines du polynôme L_j . Calculer $L_j(x_j)$.
2. Soit P un polynôme à coefficients réels de degré strictement inférieur à n . On pose :

$$Q(x) = \sum_{j=1}^n P(x_j) L_j(x)$$

- (a) Pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq n$, calculer $Q(x_k)$.
- (b) Prouver que $P = Q$.

3. Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs réelles. On suppose que, pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq n$, le point x_k appartient à I .
Montrer qu'il existe un polynôme P_f de degré strictement inférieur à n et un seul satisfaisant aux conditions suivantes : pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq n$,

$$P_f(x_k) = f(x_k)$$

PARTIE II : Exemples

- On prend $f(x) = \frac{64}{x+7}$; $I = [0, 36]$; $n = 3$; $x_1 = 1$, $x_2 = 9$, $x_3 = 25$.
 - Expliciter les polynômes L_1, L_2, L_3 .
 - Calculer le polynôme P_f défini dans la question **I.3**. On vérifiera que le polynôme $64P_f$ est à coefficients dans $\mathbb{Z}$.
- On prend $g(x) = \frac{64}{x^2+7}$; $I = [-6, 6]$, $n = 6$; $x_1 = -5$, $x_2 = -3$, $x_3 = -1$, $x_4 = 1$, $x_5 = 3$, $x_6 = 5$.
 - Sans nouveaux calculs, expliciter le polynôme P_g , (défini comme dans la question **I.3**) à l'aide du polynôme P_f .
 - Etudier la variation de P_g sur l'intervalle $[-6, 6]$.
 - Construire, dans le plan rapporté à un repère orthonormal, les courbes représentatives de g et de P_g .

PARTIE III : Etude d'une suite de polynômes d'interpolation

Dans cette partie, on considère la fonction f définie sur $[0, 1]$ par la relation :

$$f(x) = \frac{1}{x + \alpha^2}$$

où α est un nombre réel strictement positif.

Les notations étant les mêmes que dans la partie **I** les points $x_1, x_2, \dots, x_n$ sont donnés par :

$$x_k = \left(\frac{2k-1}{2n} \right)^2 \quad \text{pour } 1 \leq k \leq n$$

On note P_n , le polynôme P_f défini dans la question **I.3**.

- Calcul de $f(x) - P_n(x)$
On pose : $A(x) = 1 - (x + \alpha^2)P_n(x)$.
 - Vérifier que $A(x)$ est un polynôme de degré inférieur ou égal n , qui admet $x_1, x_2, \dots, x_n$ comme racines.
 - On pose :

$$Q_n(x) = \prod_{k=1}^n (x - x_k)$$

Montrer qu'il existe un nombre réel c_n tel que, pour tout nombre réel x :

$$A(x) = c_n Q_n(x)$$

- Prouver finalement que, pour tout nombre réel x :

$$f(x) - P_n(x) = \frac{(-1)^n Q_n(x)}{(x + \alpha^2) \prod_{k=1}^n (\alpha^2 + x_k)}$$

2. *Etude d'une fonction auxiliaire*

Soit h la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$h(x) = \int_0^1 \ln(x^2 + u^2) du$$

- (a) Calculer $h(x)$ à l'aide d'une intégration par parties.
- (b) Vérifier que, pour tout nombre réel strictement positif x :

$$h'(x) = \pi - 2 \arctan x$$

- (c) Etudier la variation de h . Prouver que h se prolonge en une fonction de classe C^∞ sur $[0, +\infty[$.
- (d) Montrer qu'il existe un nombre réel α_0 et un seul tel que :

$$0 < \alpha_0 < 1 \quad \text{et} \quad h(\alpha_0) = 2 \ln 2 - 2$$

- (e) Construire la courbe représentative de h .

3. *Détermination d'un équivalent de c_n*

- (a) Soient F une fonction de classe C^2 sur $[0, 1]$ et a un élément de l'intervalle $[0, 1[$. Pour tout nombre réel t tel que $0 \leq t \leq 1 - a$, on pose :

$$G(t) = \int_a^{a+1} F(u) du - tF\left(a + \frac{t}{2}\right)$$

- i. Calculer G' en fonction de F et de F' .
- ii. Soit x un élément de l'intervalle $[0, 1 - a]$. En appliquant la formule de Taylor avec reste intégral la fonction F sur l'intervalle $\left[a + \frac{x}{2}, a + x\right]$, établir que :

$$|G'(x)| \leq \frac{x^2}{8} M \quad \text{où} \quad M = \sup_{t \in [0, 1]} |F''(t)|$$

- iii. En déduire que, pour tout élément x de l'intervalle $[0, 1 - a]$:

$$|G(x)| \leq \frac{x^3}{24} M$$

- (b) Montrer que, pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq n$:

$$\left| \ln(\alpha^2 + x_k) - n \int_{(k-1)/n}^{k/n} \ln(\alpha^2 + u^2) du \right| \leq \frac{1 + \alpha^2}{12\alpha^4 n^2}$$

A cet effet, on appliquera le résultat de la question précédente, avec :

$$F(u) = \ln(\alpha^2 + u^2) \quad a = \frac{k-1}{n} ; \quad x = \frac{1}{n}$$

- (c) Soit $(a_n)_{n \geq 1}$ la suite de terme général :

$$a_n = \prod_{k=1}^n (\alpha^2 + x_k)$$

Déduire du **b.** la limite de la suite $(\ln a_n - nh(\alpha))_{n \geq 1}$. Obtenir enfin un équivalent simple de la suite $(a_n)_{n \geq 1}$.

4. (a) Vérifier que : $Q_n(1) = \frac{(4n)!}{2^{4n}n^{2n}(2n)!}$.
- (b) On admet l'équivalent (formule de Stirling) : $n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$.
Déterminer un équivalent simple de la suite $(Q_n(1))_{n \geq 1}$.
- (c) Déterminer l'ensemble des nombres réels strictement positifs α tels que la suite $(P_n(1))_{n \geq 1}$ converge vers $f(1)$.