I Approximation de f par une fonction affine par morceaux

(Q1) a) G est continue et dérivable sur $[0,1]-\{\alpha\}$ comme quotient de fonctions dérivables.

$$\lim_{t\to\alpha}\frac{g(t)}{t-\alpha}\underset{\substack{\uparrow\\ g(\alpha)=0}}{=}\lim_{t\to\alpha}\frac{g(t)-g(\alpha)}{t-\alpha}=g'(\alpha)=G(\alpha);$$ ainsi G est continue en α.

Donc G est continue sur $[0,1]$ et dérivable sur $[0,1]-\{\alpha\}$.

$\forall t\in[0,1]-\{\alpha\}$, $G'(t)=\dfrac{g'(t)(t-\alpha)-g(t)}{(t-\alpha)^2}$; G' est donc continue sur $[0,1]-\{\alpha\}$ (quotient...)

G est donc continue sur $[0,1]$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]-\{\alpha\}$. Le théorème de la limite de la dérivée indique alors que G est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$ dès que G' admet une limite finie en α. Ce que nous allons prouver.

g est $\mathcal{C}^2$ sur $[0,1]$ donc Taylor-Young donne également : $g(t)=g(\alpha)+(t-\alpha)g'(\alpha)+\dfrac{(t-\alpha)^2}{2}g''(\alpha)+o((t-\alpha)^2)$

g' est $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$ donc Taylor-Young donne encore : $g'(t)=g'(\alpha)+(t-\alpha)g''(\alpha)+o((t-\alpha))$;

ceci donne encore : $(t-\alpha)g'(t)=(t-\alpha)g'(\alpha)+(t-\alpha)^2g''(\alpha)+o((t-\alpha)^2)$ (ok !)

donc $g'(t)(t-\alpha)-g(t)=(t-\alpha)g'(\alpha)+(t-\alpha)^2g''(\alpha)-g(\alpha)-(t-\alpha)g'(\alpha)-\dfrac{(t-\alpha)^2}{2}g''(\alpha)+o((t-\alpha)^2)$

Comme $g(\alpha)=0$ il vient : $g'(t)(t-\alpha)-g(t)=\dfrac{(t-\alpha)^2}{2}g''(\alpha)+o((t-\alpha)^2)$

ce qui s'écrit encore : $g'(t)(t-\alpha)-g(t)=\dfrac{(t-\alpha)^2}{2}g''(\alpha)+(t-\alpha)^2\varepsilon(t)$ avec $\lim\limits_{t\to\alpha}\varepsilon(t)=0$

donc $G'(t)=\dfrac{1}{2}g''(\alpha)+\varepsilon(t)$; ainsi $\lim\limits_{t\to\alpha}G'(t)=\dfrac{1}{2}g''(\alpha)$.

G' a bien une limite finie en α.

Finalement <u>G est $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$</u>. Notons que $G'(\alpha)=\frac{1}{2}g''(\alpha)$.

g est $\mathcal{C}^2$ sur $[0,1]$. L'inégalité de Taylor-Lagrange donne :

$$\forall t\in[0,1],\ |\underset{=}{g(\alpha)}-\underset{=}{g(t)}-(\alpha-t)g'(t)|\leq\frac{(\alpha-t)^2}{2!}\max_{u\in\overleftrightarrow{[t,\alpha]}}|g''(u)|\leq\frac{(t-\alpha)^2}{2}M_2(g).$$

Ainsi $\forall t\in[0,1]-\{\alpha\}$, $$|G'(t)|=\left|\frac{g'(t)(t-\alpha)-g(t)}{(t-\alpha)^2}\right|\underset{\substack{\uparrow\\ g(\alpha)=0}}{=}\frac{|g(\alpha)-g(t)-(\alpha-t)g'(t)|}{|t-\alpha|^2}\leq\frac{1}{2}M_2(g)$$

Notons que : $|G'(\alpha)|=\left|\frac{1}{2}g''(\alpha)\right|\leq\frac{1}{2}M_2(g)$

Finalement. $\underline{\underline{\forall t\in[0,1],\ |G'(t)|\leq\frac{1}{2}M_2(g).}}$

b) G est de classe C^1 sur $[0,1]$ et $\forall t\in[0,1],\ |G'(t)|\leq \frac{1}{2}M_2(g)$

L'inégalité des accroissements finis donne alors :

$$\forall t\in[0,1],\ |G(t)-G(\beta)|\leq \frac{1}{2}M_2(g)|t-\beta|$$

Donc $\forall t\in[0,1]-\{\alpha\},\ \left|\frac{g(t)}{t-\alpha}-0\right|\leq\frac{1}{2}|t-\beta|M_2(g)$; $\forall t\in[0,1]-\{\alpha\},\ |g(t)|\leq\frac{1}{2}|(t-\alpha)(t-\beta)|M_2(g)$

cette dernière inégalité vaut encore pour $t=\alpha$ car $g(\alpha)=0$.

Donc $\underline{\underline{\forall t\in[0,1],\ |g(t)|\leq\frac{1}{2}|(t-\alpha)(t-\beta)|M_2(g)}}$.

Q2) La logique du texte conduit droit dans le mur car $t\mapsto f(t)-\psi_k(t)$ n'est pas de classe C^2 sur $[0,1]$! Nous allons donc jouer un peu plus fin.

Fixons k dans $[\![0,n]\!]$. Notons φ_k la fonction affine qui coïncide avec f a t_k et t_{k+1} $\left(\forall t\in\mathbb{R},\ \varphi_k(t)=\frac{f(t_{k+1})-f(t_k)}{t_{k+1}-t_k}(t-t_k)+f(t_k)\right)$. Nous pouvons au moins dire que φ_k et ψ_k coïncident sur l'intervalle $[t_k,t_{k+1}]$.

Posons $\alpha=t_k$, $\beta=t_{k+1}$ et $\forall t\in[0,1],\ g(t)=f(t)-\varphi_k(t)$.

g est de classe C^2 sur $[0,1]$ comme différence de fonctions de classe C^2 sur $[0,1]$.

De plus $g(\alpha)=g(t_k)=f(t_k)-\varphi_k(t_k)=0$ et de même $g(\beta)=g(t_{k+1})=f(t_{k+1})-\varphi_k(t_{k+1})=0$.

Ainsi $\forall t\in[0,1],\ |g(t)|\leq\frac{1}{2}|(t-t_k)(t-t_{k+1})|M_2(g)$.

Or $\forall t\in[0,1],\ g''(t)=f''(t)-\varphi_k''(t)=f''(t)$ car φ_k est affine et donc de dérivée seconde nulle. Ainsi $M_2(g)=M_2(f)$.

Il vient alors $\forall t\in[0,1],\ |g(t)|\leq\frac{1}{2}|(t-t_k)(t-t_{k+1})|M_2(f)$.

Ainsi :

$$\underline{\underline{\forall t\in[t_k,t_{k+1}]}},\ |f(t)-\psi_k(t)|=|f(t)-\varphi_k(t)|=|g(t)|\leq\frac{1}{2}|(t-t_k)(t-t_{k+1})|M_2(f)$$

$\forall t\in[t_k,t_{k+1}],\ |f(t)-\psi_k(t)|\leq\frac{1}{2}|(t-t_k)(t-t_{k+1})|M_2(f)\leq\frac{1}{2}\max_{t\in[t_k,t_{k+1}]}|(t-t_k)(t-t_{k+1})|M_2(f)$

cherchons alors $\max_{t\in[t_k,t_{k+1}]}|(t-t_k)(t-t_{k+1})|$

$\forall t\in[t_k,t_{k+1}],\ 0\leq(t-t_k)(t_{k+1}-t)=-t^2+(t_k+t_{k+1})t-t_kt_{k+1}=-\left(t-\frac{t_k+t_{k+1}}{2}\right)^2+\frac{(t_k+t_{k+1})^2}{4}-t_kt_{k+1}$

$\forall t\in[t_k,t_{k+1}],\ 0\leq(t-t_k)(t_{k+1}-t)=\frac{(t_k-t_{k+1})^2}{4}-\left(t-\frac{t_k+t_{k+1}}{2}\right)^2\leq\frac{(t_k-t_{k+1})^2}{4}$

avec égalité pour $t=\frac{t_k+t_{k+1}}{2}$

Ainsi nous avons montré que :

$$\max_{t\in[t_k,t_{k+1}]} |(t-t_k)(t-t_{k+1})| = \max_{t\in[t_k,t_{k+1}]} (t-t_k)(t_{k+1}-t) = \frac{(t_k-t_{k+1})^2}{4} = \frac{h^2}{4}.$$

donc $\forall t\in[t_k,t_{k+1}],\ |f(t)-\psi_h(t)| \leq \frac{1}{2}\,\frac{h^2}{4}\,M_2(f) = \frac{h^2}{8}\,M_2(f).$

récap : $\forall k\in[\![0,n]\!],\ \forall t\in[t_k,t_{k+1}],\ |f(t)-\psi_h(t)| \leq \frac{h^2}{8}\,M_2(f).$

Comme $[0,1] = \bigcup_{k=0}^{n} [t_k,t_{k+1}]$ il vient :

$\underline{\forall t\in[0,1],\ |f(t)-\psi_h(t)| \leq \frac{h^2}{8}\,M_2(f).}$ les spécialistes de l'interpolation linéaire ne peuvent pas mieux.

(Q3) Fixons de nouveau k dans $[\![0,n]\!]$.

$$\forall t\in[t_k,t_{k+1}],\ |f(t)-\varphi_h(t)| \leq |f(t)-\psi_h(t)| + |\psi_h(t)-\varphi_h(t)| \leq \frac{h^2}{8}M_2(f) + \max_{t\in[t_k,t_{k+1}]} |\psi_h(t)-\varphi_h(t)|$$

<u>Remarque</u>.. Si u est une fonction affine sur $[a,b]$: $\max_{t\in[a,b]} |u(t)| = \max(|u(a)|,|u(b)|)$

exercice.. montrer ce résultat !

Remarquons que la restriction de $\psi_h-\varphi_h$ est affine sur $[t_k,t_{k+1}]$, donc

$$\begin{aligned}\max_{t\in[t_k,t_{k+1}]} |\psi_h(t)-\varphi_h(t)| &= \max\big(|\psi_h(t_k)-\varphi_h(t_k)|,\ |\psi_h(t_{k+1})-\varphi_h(t_{k+1})|\big)\\ &= \max\big(|f(t_k)-u_k|,\ |f(t_{k+1})-u_{k+1}|\big)\\ &\leq \max_{0\leq i\leq n+1} \big(|f(t_i)-u_i|\big)\end{aligned}$$

Ainsi $\forall t\in[t_k,t_{k+1}],\ |f(t)-\varphi_h(t)| \leq \frac{h^2}{8}M_2(f) + \max_{0\leq i\leq n+1}\big(|f(t_i)-u_i|\big)$

récap : $\forall k\in[\![0,n]\!],\ \forall t\in[t_k,t_{k+1}],\ |f(t)-\varphi_h(t)| \leq \frac{h^2}{8}M_2(f) + \max_{0\leq i\leq n+1}\big(|f(t_i)-u_i|\big)$

Comme $\bigcup_{k=0}^{n}[t_k,t_{k+1}] = [0,1]$: $\forall t\in[0,1],\ |f(t)-\varphi_h(t)| \leq \frac{h^2}{8}M_2(f) + \max_{0\leq i\leq n+1}|f(t_i)-u_i|$;

ou : $\underline{\forall t\in[0,1],\ |f(t)-\varphi_h(t)| \leq \frac{h^2}{8}M_2(f) + \max_{0\leq k\leq n+1}|f(t_k)-u_k|} \overset{!}{=} \frac{h^2}{8}M_2(f) + \sup_{0\leq k\leq n+1}|f(t_k)-u_k|.$

Ainsi : $\underline{\forall t\in[0,1],\ |f(t)-\varphi_h(t)| \leq \frac{h^2}{8}M_2(f) + S_h \text{ avec } S_h = \sup_{0\leq i\leq n+1}|f(t_i)-u_i|}$

II Algorithme de résolution d'un système linéaire

(Q1) Montrons par récurrence que, pour tout élément i de $[\![2,n]\!]$ il existe une suite $(c_1,c_2,\dots,c_i)$ de réels telle que : 1°.. $\forall k\in[\![1,i]\!],\ c_k\in\,]0,1]$

3°.. $\forall k\in[\![1,i-1]\!],\ c_{k+1}=\dfrac{1}{a_{k+1}-c_k}$

2°.. $c_1=\dfrac{1}{a_1}$

→ Montrons la propriété pour $i=2$.

Posons $c_1=\dfrac{1}{a_1}$ ($a_1\neq 0$!).

Alors $a_1\geqslant 2$ donne : $0<c_1\leq\dfrac{1}{2}$; donc $c_1\in\,]0,1]$.

$a_2-c_1\geqslant 2-c_1\geqslant 2-1\geqslant 1$. Posons alors $c_2=\dfrac{1}{a_2-c_1}$ ($a_2-c_1\neq 0$!)

Comme $a_2-c_1\geqslant 1$ il vient : $0<c_2=\dfrac{1}{a_2-c_1}\leq 1$

Ainsi : $c_1\in\,]0,1]$, $c_2\in\,]0,1]$, $c_1=\dfrac{1}{a_1}$ et $c_2=\dfrac{1}{a_2-c_1}$ ce qui montre la propriété pour $i=2$.

→ Supposons la propriété vraie pour $i\in[\![2,n-1]\!]$ et montrons-la pour $i+1$.

$\exists(c_1,c_2,\dots,c_i)\in\mathbb{R}^i$, 1°.. $\forall k\in[\![1,i]\!],\ c_k\in\,]0,1]$
2°.. $c_1=1/a_1$
3°.. $\forall k\in[\![1,i-1]\!],\ c_{k+1}=\dfrac{1}{a_{k+1}-c_k}$.
hypothèse de récurrence.

Remarquons que : $a_{i+1}-c_i\geqslant 2-c_i\underset{c_i\in]0,1]}{\geqslant}2-1=1$.

Nous pouvons donc alors poser $c_{i+1}=\dfrac{1}{a_{i+1}-c_i}$ puisque $a_{i+1}-c_i\neq 0$; mieux $a_{i+1}-c_i\geqslant 1$ donne alors $c_{i+1}\in\,]0,1]$.

Nous avons donc alors une suite $(c_1,c_2,\dots,c_{i+1})$ telle que : 1°.. $\forall k\in[\![1,i+1]\!],\ c_k\in\,]0,1]$
2°.. $c_1=1/a_1$
3°.. $\forall k\in[\![1,i]\!],\ c_{k+1}=\dfrac{1}{a_{k+1}-c_k}$

ceci achève une récurrence plus simple que méchante.

Pour $i=n$ on obtient l'existence d'une suite $(c_1,c_2,\dots,c_n)$ telle que :

- $\forall k\in[\![1,n]\!],\ c_k\in\,]0,1]$;
- $c_1=1/a_1$;
- $\forall k\in[\![1,n-1]\!],\ c_{k+1}=\dfrac{1}{a_{k+1}-c_k}$.

Remarque.. L'unicité de cette suite n'échappe à personne !

(Q2) <u>L'idée</u> Transformer le système (1) en un système (2) triangulaire en utilisant des opérations élémentaires.

<u>L'amorce</u> $L_1 \leftarrow \frac{1}{a_1} L_1$ transforme la première ligne du système en

L'_1 : $u_1 - \frac{1}{a_1} u_2 = \frac{b_1}{c_1}$ c'est à dire $u_1 - c_1 u_2 = d_1$

Effectuons alors l'opération "$L_2 \leftarrow L_2 + L'_1$", la seconde ligne devient $(a_2 - c_1) u_2 - u_3 = b_2 + d_1$, puis $u_2 - c_2 u_3 = (b_2 + d_1) c_2 = d_2$ en multipliant par $c_2 = \frac{1}{a_2 - c_1}$. La deuxième ligne du nouveau système est $L'_2 : u_2 - c_2 u_3 = d_2$. Rappelons que L_3 est $-u_2 + a_3 u_3 - u_4 = b_3$, l'opération $L_3 \leftarrow c_3 (L'_2 + L_3)$ transforme L_3 en L'_3 : $u_3 - c_3 u_4 = (d_2 + b_3) c_3 = d_3$

Dès lors il semble clair que le système

$$(1)\quad \left\{\begin{array}{ll} a_1 u_1 - u_2 = b_1 & L_1 \\ -u_1 + a_1 u_2 - u_3 = b_2 & L_2 \\ \cdots\cdots\cdots & \\ -u_{n-1} + a u_{n-1} & L_n \end{array}\right.$$

se transformera, en itérant le procédé, en un système équivalent et triangulaire qui sera :

$$(2)\quad \left\{\begin{array}{ll} u_1 - c_1 u_2 = d_1 & L'_1 \\ u_2 - c_2 u_3 = d_2 & L'_2 \\ \cdots\cdots\cdots & \\ u_{n-1} - c_{n-1} u_n = d_{n-1} & L'_{n-1} \\ -u_{n-1} + a_n u_n = b_n & L_n \end{array}\right.$$

<u>La solution</u>.. Montrons par récurrence que :

$\forall i \in [\![1, n-1]\!]$ le système "$\left\{\begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ \vdots \\ L_n \end{array}\right.$" est équivalent au système "$\left\{\begin{array}{l} L'_1 \\ L'_2 \\ \vdots \\ L'_i \\ L_{i+1} \\ \vdots \\ L_n \end{array}\right.$"

Pour $i = n-1$ nous aurons alors prouvé l'équivalence entre (1) et (2).

Notons que L'_i : $u_i - c_i u_{i+1} = d_i$ et L_i : $-u_{i-1} + a_i u_i - u_{i+1} = b_i$ avec des validations adéquates...

• Pour $i=1$. L_1 : $a_1u_1 - u_2 = b_1 \iff u_1 - \frac{1}{a_1}u_2 = \frac{b_1}{a_1} \iff u_1 - c_1u_2 = b_1c_1 = d_1$.

donc $\begin{cases} L_1 \\ L_2 \\ \vdots \\ L_n \end{cases}$ est équivalent au système $\begin{cases} L'_1 \\ L_2 \\ \vdots \\ L_n \end{cases}$

• Supposons la propriété vraie pour $i \in [\![1, n-2]\!]$ et montrons-la pour $i+1$.
Cela revient à prouver que le système $\xrightarrow[(a)]{} \begin{cases} L'_1 \\ \vdots \\ L'_i \\ L_{i+1} \\ \vdots \\ L_n \end{cases}$ est équivalent au système $\xrightarrow[(b)]{} \begin{cases} L'_1 \\ \vdots \\ L'_{i+1} \\ L_{i+2} \\ \vdots \\ L_n \end{cases}$

Effectuons sur (a) l'opération " $L_{i+1} \leftarrow c_{i+1}(L'_i + L_{i+1})$ "
Comme $c_{i+1} \neq 0$ on obtient un système équivalent à (a) qui diffère de (a) par sa seule $(i+1)^{\text{ème}}$ ligne qui est :

$c_{i+1}(u_i - c_iu_{i+1} - u_i + a_{i+1}u_{i+1} - u_{i+2}) = c_{i+1}(d_i + b_{i+1})$; c'est à dire :

$\underbrace{c_{i+1}(a_{i+1}-c_i)}_{=1}u_{i+1} - c_{i+1}u_{i+2} = d_{i+1}$; ou encore :

$u_{i+1} - c_{i+1}u_{i+2} = d_{i+1}$ qui n'est autre que L'_{i+1}.

On a ainsi montré que (a) est équivalent à (b). L'hypothèse de récurrence indique que (1) est équivalent à (a) il vient alors (1) équivalent à (b) c'est à dire $\begin{cases} L_1 \\ L_2 \\ \vdots \\ L_n \end{cases}$ équivalent à $\begin{cases} L'_1 \\ \vdots \\ L'_{i+1} \\ L_{i+2} \\ \vdots \\ L_n \end{cases}$ ce qui achève la récurrence.

Le système (1) est bien équivalent au système (2) $\begin{cases} u_1 - c_1u_2 = d_1 \\ u_2 - c_2u_3 = d_2 \\ \dots \\ u_{n-1} - c_{n-1}u_n = d_{n-1} \\ -u_{n-1} + a_nu_n = b_n \end{cases}$

Remplaçons dans (2) la dernière ligne par la somme des deux dernières lignes multipliée par c_n. On obtient alors un système (3) équivalent à (2) et qui ne diffère de (2) que par sa seule dernière ligne qui est :

$c_n(u_{n-1} - c_{n-1}u_n - u_{n-1} + a_nu_n) = c_n(d_{n-1} + b_n)$; c'est à dire $c_n(a_n - c_{n-1})u_n = d_n$;
ou encore : $u_n = d_n$.

Conclusion..

$$(1)\ \begin{cases} a_1 u_1 - u_2 = b_1 \\ -u_1 + a_2 u_2 - u_3 = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots \\ -u_{n-2} + a_{n-1}u_{n-1} - u_n = b_{n-1} \\ -u_{n-1} + a_n u_n = b_n \end{cases} \iff \begin{cases} u_1 - c_1 u_2 = d_1 \\ u_2 - c_2 u_3 = d_2 \\ \dots \\ u_{n-1} - c_{n-1}u_n = d_{n-1} \\ u_n = d_n \end{cases} \ (3)$$

La matrice de (3) est $\begin{bmatrix} 1 & -c_1 & & (0) \\ & 1 & -c_2 & \\ & & \ddots & \ddots \\ (0) & & 1 & -c_{n-1} \\ & & & 1 \end{bmatrix}$; cette matrice est triangulaire supérieure sans zéro sur sa diagonale ; elle est donc inversible. Ceci montre alors que le système (3) admet une solution et une seule ; il en est alors de même pour (1).

Ainsi (1) admet une solution et une seule. Ne reste plus qu'à remarquer que (3) s'écrit encore : $\begin{cases} \forall k \in [\![1,n-1]\!],\ u_k = d_k + c_k u_{k+1} \\ u_n = d_n \end{cases}$ pour dire que :

(1) admet une solution et une seule $(u_1,u_2,\dots,u_n)$ déterminée par les relations :

$$\begin{cases} u_n = d_n \\ \forall k \in [\![1,n-1]\!],\ u_k = d_k + c_k u_{k+1} \end{cases}$$

(Q3) Supposons que : $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $b_k \geqslant 0$ et montrons que : $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $u_k \geqslant 0$

Montrons par récurrence que : $\forall k \in [\![0,n-1]\!]$, $u_{n-k} \geqslant 0$! ce qui traduit une récurrence descendante... Mais n'allons pas trop vite et commençons par prouver, par récurrence que : $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $d_k \geqslant 0$.

- c'est vrai pour $k=1$ car $d_1 = b_1 c_1 \geqslant 0$ ($b_1 \geqslant 0$ et $c_1 > 0$!).
- supposons la propriété vraie pour $k \in [\![1,n-1]\!]$ et montrons-la pour $k+1$.

  $d_{k+1} = (b_{k+1} + d_k)\,c_{k+1} \geqslant 0$ car $b_{k+1} \geqslant 0$, $d_k \geqslant 0$ (H.R.) et $c_{k+1} > 0$

  ceci achève cette première récurrence.

Montrons alors que : $\forall k \in [\![0,n-1]\!]$, $u_{n-k} \geqslant 0$.

→ Pour $k=0$, $u_{n-k} = u_n = d_n \geqslant 0$.

→ supposons $u_{n-k} \geqslant 0$ pour $k \in [\![0,n-2]\!]$ et montrons que $u_{n-(k+1)} \geqslant 0$.

$u_{n-(k+1)} = u_{n-k-1} = d_{n-k-1} + c_{n-k-1}\, u_{n-k-1+1} = \underbrace{d_{n-k-1}}_{\geqslant 0} + \underbrace{c_{n-k-1}}_{>0}\, \underbrace{u_{n-k}}_{\geqslant 0\ (HR)} \geqslant 0$!

ce qui achève la récurrence. Ainsi $\forall k \in [\![0,n-1]\!],\ u_{n-k} \geqslant 0$

Donc $\forall k \in [\![1,n]\!],\ u_k \geqslant 0.$

(Q4) Remarquons que : $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $d_k \geqslant 0$ et $u_k \geqslant 0$ car $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $b_k \geqslant 0$!

$\forall i \in [\![1,n-1]\!],\quad d_{i+1} = (b_{i+1}+d_i)\,c_{i+1} = (1+d_i)\,c_{i+1} \underset{1+d_i \geqslant 0 \text{ et } c_{i+1} \leqslant 1}{\leqslant} 1+d_i$

$\forall i \in [\![1,n-1]\!],\quad d_{i+1} - d_i \leqslant 1.$

$\forall k \in [\![2,n]\!],\quad \sum_{i=1}^{k-1} (d_{i+1}-d_i) \leqslant \sum_{i=1}^{k-1} 1 = k-1.$

$\forall k \in [\![2,n]\!],\quad d_k - d_1 \leqslant k-1$ ... ce qui vaut encore pour $k=1$.

Ainsi $\forall k \in [\![1,n]\!],\ d_k \leqslant k-1+d_1 = k-1+b_1c_1 = k-1+c_1 \underset{c_1 \leqslant 1}{\leqslant} k$

$\forall k \in [\![1,n]\!],\ d_k \leqslant k.$

$\forall i \in [\![1,n-1]\!],\quad u_i = d_i + c_i u_{i+1} \leqslant i + c_i u_{i+1} \underset{c_i \leqslant 1 \text{ et } u_{i+1} \geqslant 0.}{\leqslant} i + u_{i+1}$

$\forall i \in [\![1,n-1]\!],\quad u_i - u_{i+1} \leqslant i$

Donc $\forall k \in [\![1,n-1]\!],\quad \sum_{i=k}^{n-1} (u_i - u_{i+1}) \leqslant \sum_{i=k}^{n-1} i$

$\forall k \in [\![1,n-1]\!],\quad u_k - u_n \leqslant \sum_{i=k}^{n-1} i$

$\forall k \in [\![1,n-1]\!],\quad u_k \leqslant \sum_{i=k}^{n-1} i + u_n = \sum_{i=k}^{n-1} i + d_n \leqslant \sum_{i=k}^{n-1} i + n = \sum_{i=k}^{n} i$

$\forall k \in [\![1,n-1]\!],\ u_k \leqslant \sum_{i=k}^{n} i$, ceci vaut encore pour $k=n$ car : $u_n = d_n \leqslant n$.

Ainsi $\forall k \in [\![1,n]\!],\ u_k \leqslant \sum_{i=k}^{n} i \leqslant \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} \leqslant \frac{(n+1)^2}{2}.$

$\forall k \in [\![1,n]\!],\ u_k \leqslant \frac{(n+1)^2}{2}.$

(Q5) Again ! Posons $M = \sup_{1 \leqslant k \leqslant n} |b_k|$.

$\forall i \in [\![1,n-1]\!],\ |d_{i+1}| = |(b_{i+1}+d_i)c_{i+1}| \leqslant (|b_{i+1}|+|d_i|)|c_{i+1}| \underset{c_{i+1} \in]0,1]}{\leqslant} |b_{i+1}|+|d_i| \leqslant M + |d_i|.$

$\forall i \in [\![1,n-1]\!],\ |d_{i+1}| - |d_i| \leqslant M$. $\forall k \in [\![2,n]\!],\quad \sum_{i=1}^{k-1} (|d_{i+1}| - |d_i|) \leqslant \sum_{i=1}^{k-1} M = (k-1)M$

$\forall k \in [\![2,n]\!],\quad |d_k| - |d_1| \leqslant (k-1)M$ ce qui vaut aussi pour $k=1$.

$\forall k \in [\![1,n]\!]$, $|d_k| \le (k-1)\Pi + |d_1| = (k-1)\Pi + |b_1||c_1| \le (k-1)\Pi + \Pi \times 1 = k\Pi$.

$\forall k \in [\![1,n]\!],\ |d_k| \le k\Pi.$

$\forall i \in [\![1,n-1]\!]$, $|u_i| = |d_i + c_i u_{i+1}| \le |d_i| + |c_i||u_{i+1}| \le i\Pi + |u_{i+1}|$.

$\forall i \in [\![1,n-1]\!]$, $|u_i| - |u_{i+1}| \le i\Pi$

$\forall k \in [\![1,n-1]\!]$, $\displaystyle\sum_{i=k}^{n-1} (|u_i| - |u_{i+1}|) \le \sum_{i=k}^{n-1} (i\Pi) \le \Pi \sum_{i=1}^{n-1} i$

$\forall k \in [\![1,n-1]\!]$, $\displaystyle |u_k| - |u_n| \le \Pi \sum_{i=1}^{n-1} i$

$\forall k \in [\![1,n-1]\!]$, $\displaystyle |u_k| \le \Pi \sum_{i=1}^{n-1} i + |u_n| = \Pi \sum_{i=1}^{n-1} i + |d_n| \le \Pi \sum_{i=1}^{n-1} i + n\Pi = \Pi \sum_{i=1}^{n} i = \frac{\Pi n(n+1)}{2}$

$\forall k \in [\![1,n-1]\!]$, $|u_k| \le \Pi \frac{n(n+1)}{2}$; de plus $|u_n| = |d_n| \le n\Pi \le \frac{n(n+1)}{2}\Pi$

Ainsi $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $|u_k| \le \frac{\Pi n(n+1)}{2} \le \frac{\Pi (n+1)^2}{2}$.

$\forall k \in [\![1,n]\!]$, $|u_k| \le \frac{1}{2}(n+1)^2 \sup_{1 \le k \le n} |b_k|$.

Remarque... En fait Q5 se déduit de Q3 et Q4 ! Mais c'est presque plus long que la solution précédente ?!

Notons $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ la solution de (1). Notons $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ la solution de (1) lorsque le second membre est $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$. Notons enfin $(w_1, w_2, \dots, w_n)$ la solution de (1) lorsque le second membre est : $\begin{pmatrix} \Pi - \varepsilon b_1 \\ \Pi - \varepsilon b_2 \\ \vdots \\ \Pi - \varepsilon b_n \end{pmatrix}$ avec $\varepsilon = 1$ ou -1.

d'après Q4 $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $0 \le v_k \le \frac{1}{2}(n+1)^2$

d'après Q3 $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $w_k \ge 0$ car $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $\Pi - \varepsilon b_k \ge 0$ (car $|b_k| \le \Pi$)

Comme $\begin{pmatrix} \Pi - \varepsilon b_1 \\ \Pi - \varepsilon b_2 \\ \vdots \\ \Pi - \varepsilon b_n \end{pmatrix} = \Pi \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} - \varepsilon \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ alors $\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} = \Pi \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} - \varepsilon \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$ (Audacité très fort !)

Donc $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $w_k = \Pi v_k - \varepsilon u_k$.

Ainsi $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $0 \le w_k = \Pi v_k - \varepsilon u_k \le \frac{1}{2}(n+1)^2 \Pi - \varepsilon u_k$.

Donc $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $\varepsilon u_k \le \frac{1}{2}(n+1)^2 \Pi$. Ce qui donne encore :

$\forall k \in [\![1,n]\!]$, $u_k \le \frac{1}{2}(n+1)^2 \Pi$ et $-u_k \le \frac{1}{2}(n+1)^2 \Pi$ donc $\forall k \in [\![1,n]\!],\ |u_k| \le \frac{1}{2}(n+1)^2 \Pi$

III Obtention de valeurs approchées de f aux points t_k

(Q1) $t\in\mathbb{R}$ et $[t-h,t+h]\subset[0,1]$.

Notons que dans la définition de F, $f(t)$ et $f''(t)$ sont des constantes.

f étant C^4 sur $[0,1]$, F est donc aussi C^4 sur $[-h,h]$. Notons aussi que $F(0)=0$.

$\forall x\in[-h,h]$, $F'(x)=f'(t+x)-f'(t-x)-2xf''(t)$. $F'(0)=0$.

$\forall x\in[-h,h]$, $F''(x)=f''(t+x)+f''(t-x)-2f''(t)$. $F''(0)=0$.

$\forall x\in[-h,h]$, $F'''(x)=f'''(t+x)-f'''(t-x)$. $F'''(0)=0$.

Posons $g=f'''$. g est dérivable sur $[0,1]$ et $\forall y\in[0,1]$, $|g'(y)|=|f^{(4)}(y)|\leq M_4(f)$.

L'inégalité des A.F. donne alors : $\forall(u,v)\in[0,1]^2$, $|g(u)-g(v)|\leq|u-v|M_4(f)$

Donc $\forall x\in[-h,h]$, $|F'''(x)|=|f'''(t+x)-f'''(t-x)|=|g(t+x)-g(t-x)|\leq|t+x-(t-x)|M_4(f)=2|x|M_4(f)$.

$\forall x\in[-h,h]$, $|F'''(x)|\leq 2|x|M_4(f)$.

Alors $\forall u\in\underline{[0,h]}$, $|F''(u)|=|F''(u)-F''(0)|=\left|\int_0^u F'''(x)dx\right|\leq\underbrace{\int_0^u|F'''(x)|dx}_{u\geq0}\leq\int_0^u 2|x|M_4(f)dx$.

$\forall u\in[0,h]$, $|F''(u)|\leq 2M_4(f)\int_0^u x\,dx=M_4(f)u^2$ ... et on recommence.

$\forall x\in[0,h]$, $|F'(x)|=|F'(x)-F'(0)|=\left|\int_0^x F''(u)du\right|\leq\int_0^x|F''(u)|du\leq\int_0^x M_4(f)u^2du=\frac{x^3}{3}M_4(f)$.

Enfin $|F(h)|=|F(h)-F(0)|=\left|\int_0^h F'(u)du\right|\leq\int_0^h|F'(u)|du\leq\int_0^h\frac{x^3}{3}M_4(f)dx=\frac{h^4}{12}M_4(f)$.

Ainsi si $t\in[0,1]$ et si $[t-h,t+h]\subset[0,1]$, $\underline{\underline{|f(t+h)+f(t-h)-2f(t)-h^2f''(t)|\leq\frac{h^4}{12}M_4(f)}}$.

Remarque.. Cela se fait en 2 lignes avec l'inégalité de T.L. F est C^4 sur $[-h,h]$ donc :

$|F(h)|=\left|F(h)-\left(F(0)+hF'(0)+\frac{h^2}{2}F''(0)+\frac{h^3}{3!}F'''(0)\right)\right|\leq\frac{|h-0|^4}{4!}\max_{u\in[0,h]}|F^{(4)}(u)|$

$\forall u\in[0,h]$, $|F^{(4)}(u)|=|f^{(4)}(t+u)-f^{(4)}(t-u)|\leq|f^{(4)}(t+u)|+|f^{(4)}(t-u)|\leq 2M_4(f)$.

Donc $|F(h)|\leq\frac{h^4}{4!}2M_4(f)=\frac{h^4}{12}M_4(f)$ car $F(0)=F'(0)=F''(0)=F'''(0)=0$.

(Q2) Posons $\forall k\in[\![1,n]\!]$, $\varepsilon_k=-f(t_{k-1})+[2+h^2a(t_k)]f(t_k)-f(t_{k+1})+h^2b(t_k)$.

Montrons alors que : $\forall k\in[\![1,n]\!]$, $|\varepsilon_k|\leq\frac{h^4}{12}M_4(f)$.

Soit $k\in[\![1,n]\!]$. $[t_k-h,t_k+h]=[t_{k-1},t_{k+1}]\subset[0,1]$. D'après ce qui précède on peut alors écrire :

$|f(t_k+h)+f(t_k-h)-2f(t_k)-h^2f''(t_k)|\le\frac{h^4}{12}M_4(f)$, donc : $|f(t_{k+1})+f(t_{k-1})-2f(t_k)-h^2f''(t_k)|\le\frac{h^4}{12}M_4(f)$.

Remarquons que : $f''(t_k)=a(t_k)f(t_k)+b(t_k)$. Il vient alors :

$|f(t_{k-1})+f(t_{k+1})-[2+h^2a(t_k)]f(t_k)-h^2b(t_k)|\le\frac{h^4}{12}M_4(f)$, c'est à dire : $|-\varepsilon_k|\le\frac{h^4}{12}M_4(f)$.

Ainsi pour tout élément $k\in[\![1,n]\!]$, il existe un réel ε_k tel que :

$-f(t_{k-1})+[2+h^2a(t_k)]f(t_k)-f(t_{k-1})=-h^2b(t_k)+\varepsilon_k$ avec $|\varepsilon_k|\le\frac{h^4}{12}M_4(f)$.

(Q3) $(3)\iff\begin{cases}u_0=\lambda\\ [2+h^2a(t_1)]u_1-u_0=u_0-h^2b(t_1)=\lambda-h^2b(t_1)\\ \forall k\in[\![2,n-1]\!],\ -u_{k-1}+[2+h^2a(t_k)]u_k+u_{k+1}=-h^2b(t_k)\\ u_{n-1}+[2+h^2a(t_n)]=u_{n+1}-h^2b(t_n)=\mu-h^2b(t_n)\\ u_{n+1}=\mu\end{cases}$

Posons alors $\forall k\in[\![1,n]\!]$, $a_k=2+h^2a(t_k)$, $b_1=\lambda-h^2b(t_1)$, $\forall k\in[\![2,n-1]\!]$, $b_k=-h^2b(t_k)$ et $b_n=\mu-h^2b(t_n)$

$$(3)\iff\begin{cases}u_0=\lambda\\ \left.\begin{array}{l}a_1u_1-u_0=b_1\\ \forall k\in[\![2,n-1]\!],\ -u_{k-1}+a_ku_k+u_{k+1}=b_k\\ u_{n-1}+a_nu_n=b_n\end{array}\right\}(3')\\ u_{n+1}=\mu\end{cases}$$

Notons que $\forall k\in[\![1,n]\!]$, $a_k=2+h^2a(t_k)\ge 2$ car a est positive sur $[0,1]$.

D'après II (3') admet une solution et une seule $(u_1,u_2,\dots,u_n)$ donnée par

$\begin{cases}u_n=d_n\\ \forall k\in[\![1,n-1]\!],\ u_k=d_k+c_ku_{k+1}\end{cases}$ avec $\begin{cases}c_1=1/a_1\\ \forall k\in[\![1,n-1]\!],\ c_{k+1}=1/(a_{k+1}-c_k)\end{cases}$ et $\begin{cases}d_1=b_1c_1\\ \forall k\in[\![1,n-1]\!],\ d_{k+1}=(b_{k+1}+d_k)c_{k+1}\end{cases}$

Ainsi (3) admet une solution et une seule $(u_0,u_1,\dots,u_n,u_{n+1})$ (nécessairement $u_0=\lambda$ et $u_{n+1}=\mu$).

Pour obtenir cette solution $(u_0,u_1,\dots,u_n,u_{n+1})$

(**)

1°. On pose $u_0=\lambda$ et $u_{n+1}=\mu$

2°. On pose $\forall k\in[\![1,n]\!]$, $a_k=2+h^2a(t_k)$, $b_1=\lambda-h^2b(t_1)$, $\forall k\in[\![2,n-1]\!]$, $b_k=-h^2b(t_k)$ et $b_n=\mu-h^2b(t_n)$.

3°. On calcule la suite $(c_1,c_2,\dots,c_n)$ telle que : $c_1=\frac{1}{a_1}$ et $\forall k\in[\![1,n-1]\!]$, $c_{k+1}=\frac{1}{a_{k+1}-c_k}$

4°. On calcule la suite $(d_1,d_2,\dots,d_n)$ telle que : $d_1=b_1c_1$ et $\forall k\in[\![1,n-1]\!]$, $d_{k+1}=(d_k+b_{k+1})c_{k+1}$

5°. On calcule $(u_1,u_2,\dots,u_n)$ par résolution du système triangulaire $\begin{cases}u_n=d_n\\ \forall k\in[\![1,n-1]\!],\ u_k=d_k+c_ku_{k+1}\end{cases}$

Q4) D'après I Q3 :

$$\forall t \in [0,1],\ |f(t) - \varphi_h(t)| \leq \frac{h^2}{8} M_2(f) + S_h \text{ où } S_h = \sup_{0\leq k\leq n+1} |f(t_k) - u_k|$$

Notons que $|f(t_0) - u_0| = |f(t_{n+1}) - u_{n+1}| = 0$ $\quad (f(t_0) = u_0 = \alpha$ et $f(t_{n+1}) = u_{n+1} = \beta)$

$$\forall k \in [\![1,n]\!],\ -u_{k-1} + [2 + h^2 a(t_k)]u_k - u_{k+1} = -h^2 b(t_k)$$

$$\forall k \in [\![1,n]\!],\ -f(t_{k-1}) + [2+h^2 a(t_k)]f(t_k) - f(t_{k+1}) = -h^2 b(t_k) + \varepsilon_k$$

Par différence il vient :

$$\forall k \in [\![1,n]\!],\ -(f(t_{k-1}) - u_{k-1}) + [2+h^2 a(t_k)](f(t_k) - u_k) - (f(t_{k+1}) - u_{k+1}) = \varepsilon_k$$

En remarquant que $f(t_0) - v_0 = f(t_{n+1}) - u_{n+1} = 0$ ceci donne, en posant $v_k = f(t_k) - u_k$:

$$\begin{cases} [2+h^2 a(t_1)]v_1 - v_2 = \varepsilon_1 \\ \forall k \in [\![2,n-1]\!],\ -v_{k-1} + [2 + h^2 a(t_k)]v_k - v_{k+1} = \varepsilon_k \\ -v_{n-1} + [2+h^2 a(t_n)]v_n = \varepsilon_n \end{cases}$$

En posant $\forall k \in [\![1,n]\!],\ a_k = 2 + h^2 a(t_k)$ on a :

1.. $\forall k \in [\![1,n]\!],\ a_k \geq 2$

2.. $\begin{cases} a_1 v_1 - v_2 = \varepsilon_1 \\ \forall k \in [\![2,n-1]\!],\ -v_{k-1} + 2v_k - v_{k+1} = \varepsilon_k \\ -v_{n-1} + a_n v_n = \varepsilon_n \end{cases}$

Ainsi d'après II Q5 on a : $\displaystyle \max_{1\leq k\leq n} |v_k| \leq \frac{1}{\lambda}(n+1)^2 \max_{1\leq k\leq n} |\varepsilon_k|$.

Ce qui donne encore : $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $|f(t_k)-u_k| \leq \frac{1}{2}(n+1)^2 \max\limits_{1\leq k\leq n} |\varepsilon_k| \leq \frac{1}{2}(n+1)^2 \frac{h^4}{12} M_4(f)$

Q3

Ainsi $|S_k| \leq \frac{1}{2}(n+1)^2 \frac{h^4}{12} M_4(f) = \frac{1}{24} \times \frac{1}{h^2} \times h^4 M_4(f) = \frac{h^2}{24} M_4(f)$.

En revenant à la source il vient :

$\forall t \in [0,1]$, $|f(t) - \varphi_h(t)| \leq \frac{h^2}{8} M_2(f) + S_k \leq \frac{h^2}{8} M_2(f) + \frac{h^2}{24} M_4(f)$.

En posant $\underline{\underline{A = \frac{1}{8} M_2(f) + \frac{1}{24} M_4(f)}}$ on obtient : $\underline{\underline{\forall t \in [0,1],\ |f(t) - \varphi_h(t)| \leq Ah^2}} = \frac{A}{(n+1)^2}$.

Complément : un programme !

Le but du jeu est d'obtenir une valeur approchée de $f(x)$ pour $x \in [0,1]$:

→ sachant que $\begin{cases} \forall t \in [0,1],\ f''(t) - a(t) f(t) = b(t) \\ f(0) = \lambda,\ f(1) = \mu \end{cases}$

→ connaissant λ, μ, a et b.

Ce qui précède en donne la possibilité.

On fixe $n \in [\![1, 100]\!]$, on pose $h = \frac{1}{n+1}$ et on prend $\varphi_h(x)$ comme valeur approchée de $f(x)$. L'erreur que l'on commet est alors majorée par Ah^2 où $A = \frac{1}{8} M_2(f) + \frac{1}{24} M_4(f)$.

Le tout est donc de pouvoir calculer $\varphi_h(x)$. Rien de plus simple !

1. On cherche $k \in [\![0,n]\!]$ tel que $x \in [t_k, t_{k+1}]$.

   Si $x = 1$, on prend $k = n$; notons que dans ce cas $\varphi_h(x) = u_{n+1} = \mu$

   Si $x < 1$: $k = E(x/h)$ convient.

2. On a alors $\varphi_h(x) = \frac{u_{k+1} - u_k}{t_{k+1} - t_k}(x - t_k) + u_k = \frac{u_{k+1} - u_k}{h}(x - t_k) + u_k$

Il reste plus qu'à pouvoir calculer $u_0, u_1, u_2, \dots, u_n, u_{n+1}$. Tout a été dit à ce sujet dans III Q3 ! Relire (**).

· le programme qui suit repose sur trois fonctions et une procédure.

* la fonction a qui évalue a en un point.
* la fonction b qui évalue b en un point.
* la procédure calcule_u qui à partir de n, λ, μ calcule $u_0, u_1, \ldots, u_{n+1}$
* la fonction evalue qui à partir de x, n et u calcule $\varphi_n(x)$.

<u>Remarque</u>.. Nous avons pris ici $\forall t \in [0,1]$, $a(t) = \frac{1}{t+1}$, $b(t) = (t+2)e^t$, $\lambda = 1$

et $\mu = 2e$.

On notera aisément que $f : t \mapsto (t+1)e^t$ est la seule fonction deux fois dérivable qui vérifie $\begin{cases} \forall t \in [0,1],\ f''(t) - a(t)f(t) = b(t) \\ f(0) = 1 \text{ et } f(1) = 2e \end{cases}$

<u>Une exécution</u>

```
Donnez la valeur de n (n<=1000). n=100
Donnez la valeur de x. x=0.4
Valeur approchée :  2.0886224930E+00
Valeur :  2.0885545767E+00
Delta :  -6.7916298576E-05
```

<u>le programme</u>

```
program equa_diff;

uses crt;
const Dim_Max=1001;
type vecteur=array[0..Dim_Max] of real;

var n:integer;x,lambda,mu,valeur,valeur_app:real;u:vecteur;
```

```
function a(x:real):real;

begin
a:=1/(x+1);
end;
```

```
function b(x:real):real;

begin
b:=(x+2)*exp(x);
end;
```

```
procedure calcule_u(n:integer;lambda,mu:real;var u:vecteur);


var k:integer;h,ch:real;c,d:vecteur;

begin

h:=1/(n+1);ch:=h*h;
c[1]:=1/(2+ch*a(h));d[1]:=c[1]*(-b(h)*ch+lambda);

for k:=2 to n-1 do
    begin
    c[k]:=1/(2+ch*a(k*h)-c[k-1]);
    d[k]:=(-ch*b(k*h)+d[k-1])*c[k];
    end;

c[n]:=1/((2+ch*a(n*h))-c[n-1]);d[n]:=((-ch*b(n*h)+mu)+d[n-1])*c[n];

u[0]:=lambda;u[n+1]:=mu;u[n]:=d[n];

for k:=n-1 downto 1 do u[k]:=d[k]+c[k]*u[k+1];

end;
```

```
function evalue(x:real;n:integer;u:vecteur):real;

var k:integer;

begin
if x=1 then evalue:=u[n+1]
       else begin
            k:=trunc(x*(n+1));
            evalue:=(u[k+1]-u[k])*(n+1)*(x-k/(n+1))+u[k];
            end;
end;
```

```
begin

lambda:=1;mu:=2*exp(1);

write('Donnez la valeur de n (n<=1000). n=');readln(n);
write('Donnez la valeur de x. x=');readln(x);

calcule_u(n,lambda,mu,u);
valeur:=(1+x)*exp(x);
valeur_app:=evalue(x,n,u);

writeln('Valeur approchée : ',valeur_app);
writeln('Valeur : ',valeur);
writeln('Delta :  ',valeur-valeur_app);

end.
```

Programme principal.

Pour utiliser ce programme pour une autre fonction f il suffit de modifier les fonctions a et b et la "première" ligne du programme principal.