I Q1.. a.. → $u_0 = a \leq 2a$ → Supposons $u_n \leq 2a$ pour $n \in \mathbb{N}$ et montrons que : $u_{n+1} \leq 2a$.

$\frac{1-e^{-n}}{2} \geq 0$; $\frac{1-e^{-n}}{2} u_n \leq \frac{1-e^{-n}}{2} \times 2a = (1-e^{-n})a \leq a$; $u_{n+1} = a + \frac{1-e^{-n}}{2} u_n \leq a + a = 2a$ ...cqfd.

Finalement cette récurrence montre que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq 2a$.

b.. Montrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq u_{n+1}$.

→ C'est vrai pour $n=0$ car $u_0 = a$ et $u_1 = a$

→ Supposons la propriété vraie pour $n \in \mathbb{N}$ et montrons la pour $n+1$.

$-e^{n+1} \leq -e^{n}$; $-e^{-n} \leq e^{-n-1}$; $\frac{1-e^{-n}}{2} \leq \frac{1-e^{-n-1}}{2}$; $u_n \frac{1-e^{-n}}{2} \underset{u_n \geq 0}{\leq} u_n \frac{1-e^{-n-1}}{2} \underset{u_n \leq u_{n+1} \text{ et } \frac{1-e^{-n-1}}{2} \geq 0}{\leq} u_{n+1} \frac{1-e^{-n-1}}{2}$

Par conséquent : $a + \frac{1-e^{-n}}{2} u_n \leq a + \frac{1-e^{-n-1}}{2} u_{n+1}$; $u_{n+1} \leq u_{n+2}$.

$\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq u_{n+1}$; $(u_n)_{n \geq 0}$ est positive et croissante

c.. $(u_n)_{n\geq 0}$ est croissante et majorée par $2a$; elle converge. Posons $\ell = \lim_{n \to +\infty} u_n$.

$\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = a + \frac{1-e^{-n}}{2} u_n$ et $\lim_{n\to+\infty} e^{-n} = 0$, par conséquent : $\ell = a + \frac{1}{2}\ell$; $\ell = 2a$.

Finalement : $(u_n)_{n \geq 0}$ converge vers $2a$.

Q2 a.. Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_n \leq u_n$.

→ $v_1 \leq a + \frac{1-1}{2} v_0 = a = u_1$

→ Supposons l'inégalité vraie pour $n \in \mathbb{N}^*$ et montrons la pour $n+1$.

$v_{n+1} \leq a + \frac{1-e^{-n}}{2} v_n \underset{\frac{1-e^{-n}}{2} \geq 0 \,+\, H.R.}{\leq} a + \frac{1-e^{-n}}{2} u_n = u_{n+1}$ ...cqfd.

b.. $(v_n)_{n\geq 0}$ est majorée par $\max(v_0, 2a)$ car la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est majorée par $2a$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_n \leq u_n$.

c.. $a = 45$ et $v_n = (-1)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ donnent un contre-exemple !

$a \in \mathbb{R}_+$ et $v_n = -n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ donnent un second contre-exemple.

Il peut y avoir cependant convergence pour $(v_n)_{n\geq 0}$ ($a \in \mathbb{R}_+$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = -\frac{1}{(n+1)^2}$)

Q3 a.. $f : x \mapsto e^{-x}$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$.

$\exists \theta_x \in]0,1[$, $f(x) = f(0) + f'(0)x + f''(0)\frac{x^2}{2} + f'''(x\theta_x)\frac{x^3}{6} = 1 - x + \frac{x^2}{2} - e^{-x\theta_x}\frac{x^3}{6}$

donc $e^{-x} - (1 - x + \frac{x^2}{2}) = -e^{-x\theta_x}\frac{x^3}{6} \leq 0$; $e^{-x} \leq 1 - x + \frac{x^2}{2}$. Ce qui vaut aussi pour $x = 0$,

par conséquent : $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $e^{-x} \leq 1 - x + \frac{x^2}{2}$.

b.. $\int_0^1 e^{-x^3} dx \underset{\forall x \in [0,1],\, x^3 \in [0,1]}{\leq} \int_0^1 (1 - x^3 + \frac{x^6}{2}) dx = \left[x - \frac{x^4}{4} + \frac{x^7}{14}\right]_0^1 = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{14} = \frac{23}{28} \leq \frac{5}{6}$

$\forall x \in [1, +\infty[$, $0 \leq e^{-x^3} \leq e^{-x}$ et $\lim_{A \to +\infty} \int_1^A e^{-x} dx = \lim_{A\to+\infty} (\frac{1}{e} - e^{-A}) = \frac{1}{e}$

donc $\int_1^{+\infty} e^{-x} dx$ converge et vaut $1/e$; les inégalités précédentes montrent alors que

$\int_1^{+\infty} e^{-x^3} dx$ converge et est majorée par $1/e$ donc par $1/2$.

Finalement $\int_0^{+\infty} e^{-x^3} dx$ converge et est majorée par $\frac{5}{6} + \frac{1}{2} = \frac{4}{3}$

Q4.– __Remarque__.. Soit $n \in \mathbb{N}$. $\int_0^n e^{-x^3}dx \leq \int_0^{+\infty} e^{-x^3}dx$ ($\forall x \in \mathbb{R}, e^{-x^3} \geq 0$) ; $\int_0^{n} e^{-x^3}dx \leq \frac{4}{3}$

donc $\int_0^n e^{-x^3}dx \leq \frac{4}{3}$; supposons $w_n \geq 0$; $w_{n+1} \leq a + \frac{w_n}{4}\int_0^n e^{-x^3}dx \leq a + \frac{1}{3}w_n$

si $w_n \leq \alpha a$ alors $w_{n+1} \leq (1+\frac{\alpha}{3})a$ et $(1+\frac{\alpha}{3})a \leq \alpha a$ ssi $0 \leq a(\frac{2}{3}\alpha - 1) = \frac{2}{3}a(\alpha - \frac{3}{2})$

C'est clair maintenant ! Montrons que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ w_n \leq \frac{3}{2}a$ ($w_1 \leq a$)

→ C'est vrai pour $n = 1$ ($w_1 \leq a + \frac{w_0}{4}\int_0^0 e^{-x^3}dx = 0 \leq \frac{3}{2}a$ ($a \in \mathbb{R}_+$))

→ Supposons l'inégalité vraie pour $n \in \mathbb{N}^*$ et montrons la pour $n+1$.

1^er cas.– $w_n \leq 0$. Alors $w_{n+1} \leq a \leq \frac{3}{2}a$.

2^e cas.. $w_n \geq 0$. $\frac{w_n}{4}\int_0^n e^{-x^3}dx \leq \frac{w_n}{4} \times \frac{4}{3} = \frac{1}{3}w_n \leq \frac{1}{3} \times \frac{3}{2}a = \frac{1}{2}a$

$w_{n+1} \leq a + \frac{w_n}{4}\int_0^n e^{-x^3}dx \leq a + \frac{1}{2}a = \frac{3}{2}a$.

II Q1.. Soit $x \in \mathbb{R}_+$. f est continue sur $[0,x]$. f possède une borne supérieure sur $[0,x]$ c'est à dire que $\{f(t) ; t \in [0,x]\}$ admet une borne supérieure dans $\mathbb{R}$.

$\forall x \in \mathbb{R}_+$, $g(x) = \sup_{t \in [0,x]} f(t)$. Montrons que g est croissante ; soient x et x' deux éléments de $\mathbb{R}_+$ tels que $x \leq x'$.

$[0,x] \subset [0,x']$. $g(x')$ est un majorant de f sur $[0,x']$ donc sur $[0,x]$; $g(x')$ est plus grand que le plus petit des majorants de f sur $[0,x]$ c'est à dire $g(x)$; $g(x) \leq g(x')$... cqfd.

Montrons que g est continue sur $\mathbb{R}_+$. Il suffit de montrer que g est continue à droite en tout point de $\mathbb{R}_+$ et continue à gauche en tout point de $\mathbb{R}_+^*$.

Soit $x_0 \in \mathbb{R}_+$. Montrons que $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists \eta \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in \mathbb{R}_+, 0 \leq x - x_0 < \eta \Rightarrow |g(x) - g(x_0)| < \varepsilon$ (continuité à droite)

g étant croissante il suffit de montrer que : $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists \eta \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in \mathbb{R}_+, 0 \leq x - x_0 < \eta \Rightarrow g(x) < g(x_0) + \varepsilon$.

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. f est continue en x_0. $\exists \eta \in \mathbb{R}_+^*, \forall y \in \mathbb{R}_+, |y - x_0| < \eta \Rightarrow |f(y) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow f(y) < f(x_0) + \varepsilon/2$

Soit $x \in \mathbb{R}_+$ tel que : $0 \leq x - x_0 < \eta$. Montrons alors que : $g(x) < g(x_0) + \varepsilon$, c'est à dire : $\sup_{t \in [0,x]} f(t) < g(x_0) + \varepsilon$

$\forall t \in [0,x_0]$, $f(t) \leq g(x_0) < g(x_0) + \varepsilon/2$

$\forall t \in [x_0,x]$, $|t - x_0| \leq |x - x_0| < \eta$, $\forall t \in [x_0,x]$, $f(t) < f(x_0) + \varepsilon \leq g(x_0) + \varepsilon/2$

Finalement $\forall t \in [0,x]$, $f(t) < g(x_0) + \varepsilon/2$, donc $\sup_{t \in [0,x]} f(t) \leq g(x_0) + \frac{\varepsilon}{2} < g(x_0) + \varepsilon$

C'est ce qu'il fallait montrer, g est donc continue à droite en x_0.

Soit $x_0 \in \mathbb{R}_+^*$. Montrons que g est continue à gauche en x_0 ; c'est à dire que :

$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists \eta \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in \mathbb{R}_+, 0 \leq x_0 - x < \eta \Rightarrow |g(x) - g(x_0)| < \varepsilon$. g étant croissante sur $\mathbb{R}_+$ il suffit de montrer que : $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists \eta \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in \mathbb{R}_+, 0 \leq x_0 - x < \eta \Rightarrow g(x_0) < g(x) + \varepsilon$.

1^er cas.. $g(x_0) > f(x_0)$. $\exists \alpha \in [0,x_0[$, $f(\alpha) = \sup_{t \in [0,x_0]} f(t) = g(x_0)$ (f est continue sur $[0,x_0]$)

Soit $x \in [\alpha,x_0]$. $g(x_0) \underset{g \text{ croissante}}{\geq} g(x) \geq f(\alpha) = g(x_0)$; [$\alpha \in [0,x]$!] $\forall x \in [\alpha,x_0]$, $g(x) = g(x_0)$, g est constante sur $[\alpha,x_0]$; g est continue à gauche en x_0

2^e cas.. $g(x_0) = f(x_0)$.

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. $\exists \eta \in \mathbb{R}_+^*$, $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $|x-x_0| < \eta \Rightarrow |f(x)-f(x_0)| < \varepsilon \Rightarrow f(x_0) < f(x)+\varepsilon$ (continuité de f en x_0)

$\forall x \in \mathbb{R}_+$, $0 \leq x_0 - x < \eta \Rightarrow g(x_0) = f(x_0) < f(x)+\varepsilon \leq g(x)+\varepsilon$

$\forall x \in \mathbb{R}_+$, $0 \leq x_0 - x < \eta \Rightarrow 0 \underset{\uparrow}{\leq} g(x_0)-g(x) < \varepsilon \Rightarrow |g(x)-g(x_0)| < \varepsilon$.

$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists \eta \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in \mathbb{R}_+$, $0 \overset{g \text{ est croissante}}{\leq} x_0 - x < \eta \Rightarrow |g(x)-g(x_0)| < \varepsilon$. g est continue à gauche en x_0.

Q2+Q3+Q4 Ces 3 questions sont résolues si l'on montre les résultats suivants:

- h est une fonction continue et positive sur $\mathbb{R}_+$ telle que $\int_0^{+\infty} h(t)dt$ converge
- f est continue sur $\mathbb{R}_+$ et $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $f(x) \leq a + \int_0^x f(t)h(t)dt$.

  a) f si f est croissante sur $\mathbb{R}_+$ alors f est majorée sur $\mathbb{R}_+$

  b) si f est positive sur $\mathbb{R}_+$ alors f est majorée sur $\mathbb{R}_+$

  c) f est majorée sur $\mathbb{R}_+$!

(Pour retrouver Q2 prendre $h : x \mapsto e^{-x}$ et pour Q3 prendre $h : x \mapsto e^{-x^3}$; dans les deux cas h est positive et $\int_0^{+\infty}$ converge)

a) On suppose f croissante sur $\mathbb{R}_+$

Notons H une primitive de h sur $\mathbb{R}_+$. H est croissante sur $\mathbb{R}_+$ car h est positive. Soit $k \in \mathbb{N}$ et soit $x \in [k,+\infty[$.

$$f(x) \leq a + \int_0^x f(t)h(t)dt = a + \int_0^k f(t)h(t)dt + \int_k^x f(t)h(t)dt \underset{\uparrow}{\leq} a + \int_0^k f(t)h(t)dt + f(x)\int_k^x h(t)dt$$

f est croissante et h est positive

$f(x) \leq a + \int_0^k f(t)h(t)dt + f(x)(H(x)-H(k))$; $[1-(H(x)-H(k))]f(x) \leq a + \int_0^k f(t)h(t)dt$.

$\int_0^{+\infty} h(t)dt$ converge ; par conséquent $\lim\limits_{y \to +\infty} \int_y^{+\infty} h(t)dt = 0$

$\exists A \in \mathbb{R}_+^*$, $\forall y \in \mathbb{R}_+$, $y \geq A \Rightarrow |\int_y^{+\infty} h(t)dt| < 1/3$.

Posons maintenant $k = E(A)+1$ et supposons toujours $x \geq k$.

$$\left|\int_k^x h(t)dt\right| = \left|\int_k^{+\infty} h(t)dt - \int_x^{+\infty} h(t)dt\right| \leq \left|\int_k^{+\infty} h(t)dt\right| + \left|\int_x^{+\infty} h(t)dt\right| < 2/3$$

$0 \leq H(x)-H(k) \underset{\uparrow}{=} |H(x)-H(k)| = |\int_k^x h(t)dt| < 2/3$; $-(H(x)-H(k)) > -\frac{2}{3}$; $1-(H(x)-H(k)) > \frac{1}{3}$

H est croissante sur $\mathbb{R}_+$

Par conséquent $0 < \dfrac{1}{1-(H(x)-H(k))} < 3$ et : $\dfrac{1}{1-(H(x)-H(k))}\left[a + \int_0^k f(t)h(t)dt\right] \underset{\uparrow}{\leq} 3\max(0, a+\int_0^k f(t)h(t)dt)$

faire 2 cas $\left| \begin{array}{l} [\ \ ] < 0 \\ [\ \ ] \geq 0 \end{array} \right.$

$\forall x \in [k,+\infty[$, $f(x) \leq 3\max(0, a + \int_0^k f(t)h(t)dt)$

f est donc majorée sur $[k,+\infty[$. De plus f est continue sur $[0,k]$; f est encore majorée sur $[0,k]$.
Finalement f est majorée sur $[0,k]$ et $[k,+\infty[$ donc sur $\mathbb{R}_+$ ... cqfd.

b) On suppose f positive sur $\mathbb{R}_+$.

Soit $x \in \mathbb{R}_+$. $\forall t \in [0,x]$, $f(t) \leq a + \int_0^t f(u)h(u)du \overset{f \geq 0 \text{ et } h \geq 0}{\leq} a + \int_0^x f(u)h(u)du \overset{f \leq g \text{ et } h \geq 0}{\leq} a + \int_0^x g(u)h(u)du$

$g : x \mapsto \sup\limits_{z \in [0,x]} f(z)$

$\forall t \in [0,x]$, $f(t) \leq a + \int_0^x g(u)h(u)du$

Par conséquent $\sup\limits_{t \in [0,x]} f(t) \leq a + \int_0^x g(u)h(u)du$

Finalement $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $g(x) \leq a + \int_0^x g(t)h(t)dt$. Comme g est continue et croissante sur $\mathbb{R}_+$ nous sommes ramenés au a). g est donc majorée sur $\mathbb{R}_+$; f étant majorée par g, f est majorée sur $\mathbb{R}_+$

c) f est quelconque.

Posons $f^+ = \max(0, f)$. $f^+ = \frac{1}{2}(f+|f|)$. f^+ est continue et positive sur $\mathbb{R}_+$. $f \leq f^+$

Pour montrer que f est majorée il suffit de montrer que f^+ est majorée. Pour ce faire nous allons utiliser b).

$\forall x \in \mathbb{R}_+$, $f(x) \leq a + \int_0^x f(t)h(t)dt \leq |a| + \int_0^x f(t)h(t)dt \underset{f \leq f^+ \text{ et } h \geq 0}{\leq} |a| + \int_0^x f^+(t)h(t)dt$; de plus :

$\forall x \in \mathbb{R}_+$, $0 \leq |a| + \int_0^x f^+(t)h(t)dt$ $\quad (f^+ \geq 0 \text{ et } h \geq 0)$.

Par conséquent : $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $f^+(x) = \max(0, f(x)) \leq |a| + \int_0^x f^+(t)h(t)dt$

Nous pouvons utiliser b) avec $|a|$ et f^+ ; f^+ est majorée sur $\mathbb{R}_+$.

f étant majorée par f^+, f est majorée sur $\mathbb{R}_+$.

Q5.– a) Soit $x \in \mathbb{R}^+$. $\int_0^x \varphi(t)e^{-t}dt = \int_0^x (f(t) - a e^{1-e^{-t}})e^{-t}dt = \int_0^x f(t)e^{-t}dt - a\int_0^x e^{-t}e^{1-e^{-t}}dt$

$\int_0^x \varphi(t)e^{-t}dt = \int_0^x f(t)e^{-t}dt - a\left[e^{1-e^{-t}}\right]_0^x = \int_0^x f(t)e^{-t}dt - a(e^{1-e^{-x}} - 1)$

$\int_0^x \varphi(t)e^{-t}dt = a + \int_0^x f(t)e^{-t}dt - ae^{1-e^{-x}} \underset{(4)}{\geq} f(x) - ae^{1-e^{-x}} = \varphi(x)$

Finalement : $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $\varphi(x) \leq \int_0^x \varphi(t)e^{-t}dt$

b) Soit $c \in \mathbb{R}_+$. $\lambda = \sup_{w \in [0,c]} \varphi(w)$. Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\forall x \in [0,c]$, $\varphi(x) \leq \frac{\lambda(1-e^{-x})^n}{n!}$

→ C'est évident pour $n = 0$ ($\forall x \in [0,c]$, $\varphi(x) \leq \lambda = \sup_{w \in [0,c]} \varphi(w)$)

→ Supposons la propriété vraie pour $n \in \mathbb{N}$ et montrons la pour $n+1$.

Soit $x \in [0,c]$. $\forall t \in [0,x]$, $\varphi(t) \leq \frac{\lambda(1-e^{-t})^n}{n!}$ (H.R.)

Donc $\int_0^x \varphi(t)e^{-t}dt \leq \int_0^x \frac{\lambda(1-e^{-t})^n}{n!}e^{-t}dt = \frac{\lambda}{n!}\left[\frac{(1-e^{-t})^{n+1}}{(n+1)}\right]_0^x = \lambda\frac{(1-e^{-x})^{n+1}}{(n+1)!}$

Par conséquent : $\varphi(x) \leq \int_0^x \varphi(t)e^{-t}dt \leq \frac{\lambda(1-e^{-x})^{n+1}}{(n+1)!}$ ... cqfd.

c) Fixons c dans $\mathbb{R}_+$. $\forall x \in [0,c]$, $\varphi(x) \leq \lambda\frac{(1-e^{-x})^n}{n!}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ $(\lambda = \sup_{w \in [0,c]} \varphi(w))$

En particulier : $\varphi(c) \leq \frac{\lambda(1-e^{-c})^n}{n!}$. $\lim_{n \to +\infty} \frac{(1-e^{-c})^n}{n!} = 0$ (car connu), donc $\varphi(c) \leq 0$

Finalement : $\forall c \in \mathbb{R}_+, \varphi(c) \leq 0$; $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $\varphi(x) \leq 0$! $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $f(x) \leq ae^{1-e^{-x}}$.

d) Il suffit de montrer que $u : x \mapsto ae^{1-e^{-x}}$ est une fonction continue qui vérifie (4) !

La continuité est évidente reste la relation 4.

Soit $x \in \mathbb{R}^+$, $\int_0^x u(t)e^{-t}dt = \int_0^x ae^{1-e^{-t}}(e^{-t})dt = a\left[e^{1-e^{-t}}\right]_0^x = a(e^{1-e^{-x}} - 1) =$

$\int_0^x u(t)e^{-t}dt + a = u(x) \geq u(x)$! u vérifie (4)

Par conséquent : $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $\psi(x) \geq ae^{1-e^{-x}}$.