PREMIERE PARTIE Voila Tcheby !

(Q1) Peut-on dire que T_n est un polynome alors que T_n est une application de $[-1,1]$ dans $\mathbb{R}$? Il serait peut-être plus convenable de dire que T_n est la restriction à $I=[-1,1]$ d'une fonction polynome. Cela étant :

$\forall x\in I,\ T_1(x) = \frac{1}{2^{1-1}}\cos(1\,\mathrm{Arc}\cos x) = x$

$\forall x\in I,\ T_2(x) = \frac{1}{2^{2-1}}\cos(2\,\mathrm{Arc}\cos x) = \frac{1}{2}\left(2\cos^2(\mathrm{Arc}\cos x)-1\right) = \frac{1}{2}(2x^2-1) = x^2-\frac{1}{2}$.

$\forall x\in I,\ T_3(x) = \frac{1}{2^{3-1}}\cos(3\,\mathrm{Arc}\cos x) = \frac{1}{4}\left(4\cos^3(\mathrm{Arc}\cos x)-3\cos(\mathrm{Arc}\cos x)\right) = \frac{1}{4}(4x^3-3x) = x^3-\frac{3}{4}x$.

Soit $n\in\mathbb{N}^*$ et soit $x\in I$. Posons $\theta=\mathrm{Arc}\cos x$. $\cos\theta = x$.

$T_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}}\cos(n\theta) = \frac{1}{2^{n-1}}\mathrm{Re}(e^{in\theta}) = \frac{1}{2^{n-1}}\mathrm{Re}(\cos\theta+i\sin\theta)^n = \frac{1}{2^{n-1}}\sum_{0\le 2k\le n} C_n^{2k}(\cos\theta)^{n-2k}(-1)^k(\sin\theta)^{2k}$

$T_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}}\sum_{k=0}^{E(\frac{n}{2})} C_n^{2k}(\cos\theta)^{n-2k}(-1)^k(1-\cos^2\theta)^k$

Finalement $\forall n\in\mathbb{N}^*, \forall x\in I, T_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}}\sum_{k=0}^{E(\frac{n}{2})} C_n^{2k}(-1)^k x^{n-2k}(1-x^2)^k$, T_n est "un polynome" pour tout $n\in\mathbb{N}$.

Reprenons n dans $\mathbb{N}^*$. Notons tout de suite que $\deg T_n\le n$. Précisons, le coefficient de x^n dans $x^{n-2k}(1-x^2)^k$ est $(-1)^k$; par conséquent le coefficient de x^n dans T_n est

$\frac{1}{2^{n-1}}\sum_{k=0}^{E(\frac{n}{2})} C_n^{2k}(-1)^k(-1)^k = \frac{1}{2^{n-1}}\sum_{k=0}^{E(\frac{n}{2})} C_n^{2k} = 1$! (ce qui est encore vrai pour $n=0$).

En effet : $2^n = (1+1)^n+(1-1)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k + \sum_{k=0}^{n} C_n^k(-1)^k = \sum_{k=0}^{n} C_n^k(1+(-1)^k) = 2\sum_{k=0}^{E(\frac{n}{2})} C_n^{2k}$ donc

$\sum_{k=0}^{E(\frac{n}{2})} C_n^{2k} = \frac{2^n}{2} = 2^{n-1}$.

Conclusion. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, le coefficient de x^n dans T_n est 1.

(Q2) Soit $x\in[-1,1]$. Posons $\theta=\mathrm{Arc}\cos x$. $\cos\theta=x$. $\theta\in[0,\pi]$

Soit $n\in\mathbb{N}^*$. $T_n(x)=0 \iff \frac{1}{2^{n-1}}\cos(n\theta)=0 \iff n\theta\equiv\frac{\pi}{2}\ (\pi) \iff \theta\equiv\frac{\pi}{2n}\left(\frac{\pi}{n}\right)$

$T_n(x)=0 \iff \exists k\in\mathbb{Z},\ \theta = \frac{\pi}{2n}+k\times\frac{\pi}{n} = \frac{(2k+1)\pi}{2n}$

ou encore : $T_n(x)=0 \iff \exists j\in\mathbb{Z},\ \theta=\frac{(2j-1)\pi}{2n} \underset{\theta\in[0,\pi]}{\iff} \exists j\in[\![1,n]\!],\ \theta=\frac{(2j-1)\pi}{2n}$

Posons $\forall j\in[\![1,n]\!],\ \theta_j=\frac{2j-1}{2n}\pi$. $\theta_1,\theta_2,\dots,\theta_n$ sont n valeurs distinctes et croissantes de $[0,\pi]$. Posons $\forall j\in[\![1,n]\!],\ x_j=\cos\left(\frac{2j-1}{2n}\pi\right)$; $x_1,x_2,\dots,x_n$ sont n valeurs distinctes et décroissantes de $[-1,1]$ (cos définit une bijection strictement décroissante de $[0,\pi]$ sur $[-1,1]$) ; de plus $\forall j\in[\![1,n]\!],\ T_n(x_j)=0$ (d'après les équivalences précédentes).

Par conséquent $x_1,x_2,\dots,x_n$ sont n zéros de T_n appartenant à $I=[-1,1]$.

T_n étant "un polynôme de degré n", on peut donc dire que T_n admet exactement n zéros distincts dans I : $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Q3.a) Soit $f \in E$. Montrons que $\int_{-1}^{+1} \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ est convergente ; pour cela montrons qu'elle est absolument convergente. f est bornée sur $[-1,1]$, soit M un majorant de $|f|$ sur $[-1,1]$.

$\forall x \in]-1,1[$, $\left|\frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}}\right| \leqslant \frac{M}{(1-x)^{1/2}(1+x)^{1/2}}$. La convergence de $\int_{-1}^{1} \frac{|f(x)|}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ résultera de la convergence de $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{(1-x)^{1/2}(1+x)^{1/2}}$ ... qui est claire car :

* $\forall x \in]-1,1[$, $\frac{1}{(1-x)^{1/2}(1+x)^{1/2}} \geqslant 0$
* $\frac{1}{(1-x)^{1/2}(1+x)^{1/2}} \underset{1}{\sim} \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{(1-x)^{1/2}}$ et $1/2 < 1$
* $\frac{1}{(1-x)^{1/2}(1+x)^{1/2}} \underset{-1}{\sim} \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{(1+x)^{1/2}}$ et $1/2 < 1$

b) $J(1) = \int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \underset{\substack{x=\cos\theta \\ \theta = \operatorname{Arc\,cos} x \\ d\theta = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx}}{=} \int_{\pi}^{0} -\,d\theta = \pi$

Soit $n \in \mathbb{N}$. Si $n=0$: $J(T_n^2) = J(T_0^2) = J(1) = \pi$. Supposons $n \geqslant 1$.

$$J(T_n^2) = \int_{-1}^{1} \frac{\left(1/2^{n-1} \cos(n \operatorname{Arc\,cos} x)\right)^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \underset{x=\cos\theta}{=} \int_{\pi}^{0} \left(\frac{1}{2^{n-1}} \cos(n\theta)\right)^2 (-d\theta)$$

$$J(T_n^2) = \frac{1}{4^{n-1}} \int_0^{\pi} \cos^2 n\theta\, d\theta$$

$$J(T_n^2) = \frac{1}{4^{n-1}} \int_0^{\pi} \frac{1+\cos(2n\theta)}{2}\,d\theta = \frac{1}{4^{n-1}} \left[\frac{1}{2}\theta + \frac{\sin(2n\theta)}{4n}\right]_0^{\pi} = \frac{\pi}{2^{2n-1}}.$$

Soit $(m,n) \in \mathbb{N}^2$ et $m \neq n$. Si $m=0$ $J(T_n T_m) = J(T_n) = \frac{1}{2^{n-1}} \int_{-1}^{1} \frac{\cos(n \operatorname{Arc\,cos} x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \frac{1}{2^{n-1}} \int_0^{\pi} \cos(n\theta)\,d\theta \underset{\substack{\text{calcul} \\ \text{évident} \\ n \neq 0 !}}{=} 0$

de même si $n=0$, $J(T_n T_m) = J(T_m) = 0$. Supposons $m \neq 0$ et $n \neq 0$.

$$J(T_n T_m) = \frac{1}{2^{n+m-2}} \int_{-1}^{1} \frac{\cos(n \operatorname{Arc\,cos} x)\cos(m \operatorname{Arc\,cos} x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \frac{1}{2^{n+m-2}} \int_0^{\pi} \cos(n\theta)\cos(m\theta)\,d\theta$$

$$J(T_n T_m) = \frac{1}{2^{n+m-1}} \left[\int_0^{\pi} \cos((n+m)\theta)\,d\theta + \int_0^{\pi} \cos((n-m)\theta)\,d\theta\right] = \frac{1}{2^{n+m-1}} \left[\frac{\sin(n+m)\theta}{(n+m)} + \frac{\sin(n-m)\theta}{(n-m)}\right]_0^{\pi} = 0$$

Résumons .. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $J(T_n^2) = \pi/2^{2n-1}$

$\forall (n,m) \in \mathbb{N}^2$, $n \neq m \Rightarrow J(T_n T_m) = 0$

$J(T_0^2) = J(1) = \pi$

Remarque .. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $J(T_n) = 0$.

c) $\forall i \in [\![0,n]\!]$, $\deg T_i = i$ donc $(T_0, T_1, \dots, T_n)$ est une famille libre de $\mathbb{R}_n[X]$. Cette famille contient $n+1$ éléments et $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}_n[X] = n+1$, par conséquent c'est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Soit $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$. $\exists (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$, $P = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i T_i$ ($(T_0, T_1, \dots, T_{n-1})$ est une base de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$)

$$J(T_n P) \underset{\text{linéarité de l'intégrale}}{=} \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i J(T_n T_i) = 0$$

Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Supposons $\deg P = T_n$. $\exists (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$, $P = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i T_i$

$J(T_n P) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i J(T_n T_i) = \alpha_n J(T_n T_n) = \frac{\alpha_n \pi}{2^{2n-1}}$

Notons que α_n n'est autre que le coefficient de X^n dans P car $\sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i T_i \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ et le coefficient de X^n dans T_n est 1.

$\boxed{\text{DEUXIEME PARTIE}}$ et voilà Lagrange. { Il faut bien se convaincre que cette deuxième partie est une question de cours

Q1 Soit $i \in [\![1, n]\!]$ et soit $j \in [\![1, n]\!]$

Si $i \neq j$: $L_j(x_i) = \prod_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n} \left(\frac{x_i - x_k}{x_j - x_k}\right) = 0$; $L_j(x_j) = \prod_{\substack{k=1\\k\neq j}} \left(\frac{x_j - x_k}{x_j - x_k}\right) = 1$.

$k = i$ annule tout !

L_j est en fait l'unique élément de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ qui prend la valeur 1 en x_j et 0 en $x_1, x_2, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n$.

Notons que $(L_1, L_2, \dots, L_n)$ est une base de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ et que les coordonnées de $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ sur cette base sont $(P(x_1), P(x_2), \dots, P(x_n))$

Q2 a) La linéarité de F est une évidence !

b) Soit $P \in \mathbb{R}_{2n-1}[X]$. Supposons $F(P) = 0$.

$\forall i \in [\![1, n]\!]$, $P(x_i) = P'(x_i) = 0$; pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, x_i est une racine d'ordre au moins 2 de P ; par conséquent $Q = (X - x_1)^2 (X - x_2)^2 \cdots (X - x_n)^2$ divise P. $\deg Q = 2n$ et $\deg P < 2n$; par conséquent $P = 0_{\mathbb{R}_{2n-1}[X]}$.

Finalement $\operatorname{Ker} F = \{0_{\mathbb{R}_{2n-1}[X]}\}$

c) F est une application linéaire injective de $\mathbb{R}_{2n-1}[X]$ dans $\mathbb{R}^{2n}$ et $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}_{2n-1}[X] = \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^{2n} = 2n$ donc F est bijective. F est un isomorphisme de $\mathbb{R}_{2n-1}[X]$ sur $\mathbb{R}^{2n}$.

Q3.. Ce qui précède montre que : $\forall (a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^{2n}$, $\exists ! P \in \mathbb{R}_{2n-1}[X]$,

$P(x_1) = a_1$, $P(x_2) = a_2, \dots, P(x_n) = a_n$, $P'(x_1) = b_1$, $P'(x_2) = b_2, \dots, P'(x_n) = b_n$.

Appliquons ceci au $2n$-uplet $(f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n), f'(x_1), f'(x_2), \dots, f'(x_n))$; nous obtenons l'existence et l'unicité d'un élément $\tilde{f}$ de $\mathbb{R}_{2n-1}[X]$ tel que :

$\forall j \in [\![1, n]\!]$, $\tilde{f}(x_j) = f(x_j)$ et $\tilde{f}'(x_j) = f(x_j)$.

Q4 Posons $\forall x \in \mathbb{R}$, $P(x) = \sum_{j=1}^{n} f(x_j) L_j^2(x) + \sum_{j=1}^{n} \left[f'(x_j) - 2f(x_j) L_j'(x_j)\right](x - x_j) L_j^2(x)$

$P \in \mathbb{R}_{2n-1}[X]$ car $\forall j \in [\![1, n]\!]$ $\deg L_j = n - 1$ $(\dots \deg L_j^2 = 2n-2$ et $\deg (X - x_j) L_j^2 = 2n-1)$

$P(x_i) = \sum_{j=1}^{n} f(x_j) L_j^2(x_i) + \sum_{j=1}^{n} \left[f'(x_j) - 2f(x_j) L_j'(x_j)\right](x_i - x_j) L_j^2(x_i) = f(x_i)$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$

$L_j(x_i) = \begin{cases} 1 \text{ si } j = i \\ 0 \text{ si } j \neq i \end{cases}$

Soit $i \in [\![1,n]\!]$

$$P'(x_i)=\sum_{j=1}^{n} f(x_j)\,2L_j'(x_i)L_j(x_i)+\sum_{j=1}^{n}\left[f'(x_j)-2f(x_j)L_j'(x_j)\right]\left(L_j^2(x_i)+(x_i-x_j)\,2L_j'(x_i)L_j(x_i)\right)$$

$$P'(x_i)=f(x_i)\,2L_i'(x_i)+\left(f'(x_i)-2f(x_i)L_i'(x_i)\right)(1+0)$$ } dans chaque Σ il ne reste que le terme d'indice i.

$$P'(x_i)=f(x_i)\,2L_i'(x_i)+f'(x_i)-2f(x_i)L_i'(x_i)=f'(x_i).$$

Par conséquent P est parfaitement qualifié pour être $\tilde{f}$!

TROISIEME PARTIE

(Q1) a) φ s'annule $n+1$ fois sur I en $x_1, x_2, \dots, x_n, x$; en appliquant Rolle aux n intervalles déterminés par ces $n+1$ points on obtient n zéros $y_1, y_2, \dots, y_n$ distincts de $x_1, x_2, \dots, x_n$ et x pour φ'. De plus φ' s'annule en $x_1, x_2, \dots, x_n$ (car f s'annule en ces points ainsi que la dérivée de $t \mapsto (t-x_1)^2(t-x_2)^2\cdots(t-x_n)^2$ ... zéro d'ordre 2). Finalement φ' s'annule en au moins $2n$ points distincts de I.

b) Montrons par récurrence que pour tout $p \in [\![1,2n]\!]$, $\varphi^{(p)}$ s'annule en au moins $2n-p+1$ points distincts de I.

- Nous venons de voir que c'est vrai pour $p=1$
- Supposons la propriété vraie pour $p \in [\![1,2n-1]\!]$ et montrons-la pour $p+1$.

Soit $z_1, z_2, \dots, z_{2n-p+1}$ $2n-p+1$ zéros distincts de I tels que $z_1<z_2<\dots<z_{2n-p+1}$.

Soit $i \in [\![1,2n-p]\!]$. $\varphi^{(p)}$ est continue sur $[z_i,z_{i+1}]$ et dérivable sur $]z_i,z_{i+1}[$ et $\varphi^{(p)}(z_i)=\varphi^{(p)}(z_{i+1})=0$

$\exists z_i' \in]z_i,z_{i+1}[$, $(\varphi^{(p)})'(z_i')=0$; z_i' est un zéro de $\varphi^{(p+1)}$ appartenant à $]z_i,z_{i+1}[$.

i variant de 1 à $2n-p$, nous venons de fabriquer $2n-p=2n-(p+1)+1$ zéros distincts dans I pour $\varphi^{(p+1)}$. Ceci achève la récurrence.

c) Ce qui précède montre que $\varphi^{(2n)}$ s'annule au moins $2n-2n+1$ fois sur I !

$\exists c \in I$, $\varphi^{(2n)}(c)=0$.

$\forall t \in I$, $\varphi^{(2n)}(t)=f^{(2n)}(t)-(2n)!\,A$ ($t \mapsto (t-x_1)^2(t-x_2)^2\cdots(t-x_n)^2$ est de degré $2n$ ...)

Donc $A=\dfrac{f^{(2n)}(c)}{(2n)!}$ car $\varphi^{(2n)}(c)=0$.

A est déterminé par la condition $\varphi(x)=0$, donc $f(x)=A(x-x_1)^2\cdots(x-x_n)^2=\dfrac{f^{(2n)}(c)}{(2n)!}(x-x_1)^2\cdots(x-x_n)^2$

$\forall x \in I-\{x_1,x_2,\dots,x_n\}$, $\exists c \in I$, $f(x)=(x-x_1)^2(x-x_2)^2\cdots(x-x_n)^2\dfrac{f^{(2n)}(c)}{(2n)!}$.

d) Ceci vaut encore pour $x \in \{x_1,\dots,x_n\}$ (prendre c quelconque !)

(Q2) Il suffit d'appliquer le résultat précédent à $f-\tilde{f}$. $f-\tilde{f}$ est $2n$ fois dérivable sur I, s'annule en $x_1, x_2, \dots, x_n$ ainsi que sa dérivée. $\exists c \in I$, $f(x)-\tilde{f}(x)=(x-x_1)^2\cdots(x-x_n)^2\dfrac{(f-\tilde{f})^{(2n)}(c)}{(2n)!}$

$\deg \tilde{f} \leq 2n-1$ donc $\tilde{f}^{(2n)} \equiv 0$.

Finalement $\boxed{\forall x \in I, \exists c \in I,\ f(x)=\tilde{f}(x)+(x-x_1)^2(x-x_2)^2\cdots(x-x_n)^2\dfrac{f^{(2n)}(c)}{(2n)!}}$

QUATRIÈME PARTIE

Q1 Soit $j \in [\![1,n]\!]$. $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{(x-x_j)L_j^2(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = J\left((x-x_j)L_j^2\right)$

$\forall x \in I$, $\displaystyle (x-x_j)L_j = \prod_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n} \frac{1}{(x_j-x_k)} \,(x-x_j)\prod_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n}(x-x_k) = \prod_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n}\frac{1}{(x_j-x_k)}\, T_n(x) = a\,T_n(x)$

$\deg T_n = n$; $x_1, x_2, \dots, x_n$ sont les zéros de T_n et le coeff de X^n dans T_n est 1

où $\displaystyle a = \prod_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n}\frac{1}{x_j-x_k}$

donc $\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{(x-x_j)L_j^2(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = J(aL_jT_n) = 0$ d'après I Q3 c car $\deg L_j = n-1 < n$!

$\displaystyle J(\tilde{f}) \underset{\text{linéarité de } J}{=} \sum_{j=1}^{n} f(x_j)\,J(L_j^2) + \sum_{j=1}^{n}\left[f'(x_j)-2f(x_j)L_j'(x_j)\right]\underbrace{\int_{-1}^{1}\frac{(x-x_j)L_j^2(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx}_{=0} = \sum_{j=1}^{n} f(x_j)\,J(L_j^2).$

$$\boxed{J(\tilde{f}) = \sum_{j=1}^{n} f(x_j)\,J(L_j^2)}$$

Q2 f est de classe C^{2n} sur I. $f^{(2n)}$ est continue sur I. Soit M (resp. m) sa borne supérieure et m sa borne inférieure (I est un segment).

$\forall x \in I, \exists c \in I$, $\displaystyle f(x) = \tilde{f}(x) + T_n^2(x)\,\frac{f^{(2n)}(c)}{(2n)!}$

Donc $\forall x \in I$, $\displaystyle m\,\frac{T_n^2(x)}{(2n)!} \le f(x)-\tilde{f}(x) \le M\,\frac{T_n^2(x)}{(2n)!}$ $\quad(\forall x\in I,\ T_n^2(x)\geq 0)$.

Donc $\forall x \in I - \{-1,1\}$, $\displaystyle \frac{m}{(2n)!}\frac{T_n^2(x)}{\sqrt{1-x^2}} \le \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{\tilde{f}(x)}{\sqrt{1-x^2}} \le \frac{M}{(2n)!}\frac{T_n^2(x)}{\sqrt{1-x^2}}$

En intégrant (ce qui est possible car la convergence des intégrales est assurée par I Q3 a) on obtient : $\displaystyle\frac{m}{(2n)!}J(T_n^2) \le J(f)-J(\tilde{f}) \le \frac{M}{(2n)!}J(T_n^2)$. $\displaystyle J(T_n^2) = \frac{\pi}{2^{2n-1}}$ donc

$\displaystyle m \le \frac{(2n)!\,2^{2n-1}}{\pi}\left(J(f)-J(\tilde{f})\right) \le M$. $f^{(2n)}$ prend toutes les valeurs entre m et M donc

$\exists d \in I$, $\displaystyle\frac{(2n)!\,2^{2n-1}}{\pi}\left(J(f)-J(\tilde{f})\right) = f^{(2n)}(d)$.

Finalement : $\exists d \in I$, $\displaystyle J(f) = J(\tilde{f}) + \frac{\pi}{2^{2n-1}}\frac{f^{(2n)}(d)}{(2n)!} \overset{\text{Q1 et } a_j = J(L_j^2)}{=} \sum_{j=1}^{n} a_j f(x_j) + \frac{\pi}{2^{2n-1}}\frac{f^{(2n)}(d)}{(2n)!}$

Q3 Evident car si $f \in \mathbb{R}_{2n-1}[X]$, $f^{(2n)} \equiv 0$!