

EXERCICE

1. Soit a et b deux réels strictement positifs et A la matrice carrée d'ordre 2 définie par : $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$

a) Si a et b sont égaux alors les colonnes de A sont liées donc A n'est pas inversible.

b) $A^2 = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + b^2 & 2ab \\ 2ab & a^2 + b^2 \end{pmatrix}$ et $A^2 - 2aA = \begin{pmatrix} b^2 - a^2 & 0 \\ 0 & b^2 - a^2 \end{pmatrix} = (b^2 - a^2)I$

Donc, si $a \neq b$ (et $a \neq -b$ qui est vérifié car a et b sont strictement positifs) $b^2 - a^2 \neq 0$
et $I = \frac{1}{b^2 - a^2} A \cdot A$

Conclusion : si $a \neq b$, A est inversible et $A^{-1} = \frac{1}{b^2 - a^2} A$

c) Comme $A^2 - 2aA - (b^2 - a^2)I = 0$, si α est valeur propre de A alors $\alpha^2 - 2a\alpha - (b^2 - a^2) = 0$
On vérifie que $a + b$ et $a - b$ en sont racines. $(a + b)^2 - 2a(a + b) - (b^2 - a^2) = 0$ et de même pour $a - b$.

Comme $a - b \neq a + b$ (car $b \neq 0$), ce sont les seules racines.

Conclusion : les seules valeurs propres possibles sont $a + b$ et $a - b$

$A - (a + b)I = \begin{pmatrix} b & b \\ b & b \end{pmatrix}$ est non inversible donc $a + b$ est bien valeur propre; de même pour $a - b$

Conclusion : Les valeurs propres de A sont $a + b$ et $a - b$

d) On cherche un vecteur propre $(1, y)$ associé à $a + b$:

$$(A - (a + b)I) \begin{pmatrix} 1 \\ y \end{pmatrix} = 0 \iff y = -1 \text{ donc } (1, -1) \text{ est vecteur propre associé à } a + b$$

$$(A - (a - b)I) \begin{pmatrix} -b \\ b \end{pmatrix} = 0 \text{ et } (1, 1) \text{ est un vecteur propre associé à } (a - b)$$

On peut utiliser la condition suffisante de diagonalisabilité (2 valeurs propres distinctes) ou constater que $(1, 1)$ et $(1, -1)$ étaient deux vecteurs non proportionnels donc libres, pour conclure qu'ils forment une base de vecteurs propres.

Et avec $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $\Delta = \begin{pmatrix} a + b & 0 \\ 0 & a - b \end{pmatrix}$ on a donc $A = Q\Delta Q^{-1}$.

e) Par la méthode de Gauss :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 - L_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 + \frac{1}{2}L_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}} Q^{-1}$$

Et $A^n = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (a + b)^n & 0 \\ 0 & (a - b)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} (a + b)^n + (a - b)^n & (a + b)^n - (a - b)^n \\ (a + b)^n - (a - b)^n & (a + b)^n + (a - b)^n \end{pmatrix}$
pour tout $n \in \mathbb{N}$

2. Soit p un réel vérifiant $0 < p < 1$ et q le réel $1 - p$. On suppose que X et Y sont deux variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, indépendantes et suivant la même loi géométrique de paramètre p .

Pour tout ω de Ω , on désigne par $M(\omega)$ la matrice carrée d'ordre 2: $\begin{pmatrix} X(\omega) & Y(\omega) \\ Y(\omega) & X(\omega) \end{pmatrix}$ et on

note $S(\omega)$ (respectivement $D(\omega)$) la plus grande (respectivement la plus petite) valeur propre de $M(\omega)$ et on définit ainsi deux variables aléatoires sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$.

a) On a $(X = Y) = \bigcup_{i=1}^{+\infty} (X = i \cap Y = i)$ ($\cup$ d'incompatibles et $\cap$ d'indépendants) donc

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(X = Y) &= \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbf{P}(X = i) \mathbf{P}(Y = i) \\ &= \sum_{i=1}^{+\infty} q^{2(i-1)} p^2 \\ &= p^2 \frac{1}{1 - q^2} = \frac{p^2}{(1 - q)(1 + q)} = \frac{p^2}{p(2 + p)} \\ &= \frac{p}{2 - p} \end{aligned}$$

On a vu que, pour a et b strictement positifs, A est inversible si (question b) et seulement si (question a) $a \neq b$

Et comme $X(\Omega) = Y(\Omega) =]1, +\infty[$ elles sont strictement positives.

Donc $M(\omega)$ inversible si et seulement si $X(\omega) \neq Y(\omega)$

$$\text{Conclusion : } \mathbf{P}(M \text{ inversible}) = 1 - \mathbf{P}(Y = X) = \frac{2 - 2p}{2 - p}$$

b) Les valeurs propres de M sont $X + Y > X - Y$ donc $S = X + Y$ (d'où le nom S comme somme) et $D = X - Y$ (comme différence ...)

Donc

$$\begin{aligned} \text{cov}(S, D) &= E(SD) - E(S)E(D) \\ &= E(X^2 - Y^2) - E(X + Y)E(X - Y) \\ &= E(X^2) - E(X)^2 - E(Y^2) + E(Y)^2 \\ &= V(X) - V(Y) \\ &= 0 \end{aligned}$$

c) $([S = 2] \cap [D = 0]) = (X = 1 \cap Y = 1)$ donc $\mathbf{P}(S = 2 \cap D = 0) = p^2$

alors que $\mathbf{P}(S = 2) = \mathbf{P}(X = 1 \cap Y = 1) = p^2$ et $\mathbf{P}(D = 0) = \mathbf{P}(X = Y) = \frac{p}{2 - p} \neq 1$

car $p \neq 2 - p$ car $p \neq 1$

Donc $\mathbf{P}([S = 2] \cap [D = 0]) \neq \mathbf{P}([S = 2]) \cdot \mathbf{P}([D = 0])$. et

Conclusion : Les variables aléatoires S et D ne sont pas indépendantes alors que leurs covariance est

d) On a $(S = n) = \bigcup_{i=1}^{n-1} (X = i \cap Y = n - i)$ pour que $X = i$ et $Y = n - i$ soient tout deux possibles.

Donc

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(S = n) &= \sum_{i=1}^{n-1} \mathbf{P}(X = i) \mathbf{P}(Y = n - i) \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} q^{i-1} p \cdot q^{n-i-1} p \text{ car } i \geq 1 \text{ et } n - i \geq 1 \\ &= \frac{p^2 q^n}{q^2} \sum_{i=1}^{n-1} 1 = (n - 1) p^2 q^{n-2}. \end{aligned}$$

e) La plus grande des valeurs propres est S .

La plus probable est celle de plus grande probabilité.

Soit $f(x) = (x-1)p^2q^{x-2} = p^2(x-1)\exp[(x-2)\ln(q)]$ f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et

$$\begin{aligned}f'(x) &= p^2(q^{x-2} + (x-1)\ln(q) \cdot q^{x-2}) \\&= p^2q^{x-2}(1 + (x-1)\ln(q))\end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}1 + (x-1)\ln(q) &> 0 &\iff (x-1)\ln(q) > -1 \\&\iff x-1 < -1/\ln(q) \text{ car } \ln(q) < 0 \\&\iff x < -1/\ln(19/21) + 1 = x_0 \simeq 10.9\end{aligned}$$

La fonction est donc croissante sur $]0, x_0[$ et décroissante sur $]x_0, +\infty[$

Sa plus grande valeur entière est donc en 10 ou en 11. Et comme $f(11) > f(10)$

Conclusion : la valeur la plus probable de la plus grande valeur propre des matrices $M(\omega)$ possibles

Problème

Partie A : Étude d'une fonction

On suppose, dans cette question, qu'il existe une fonction f de classe $\mathcal{C}^1$ sur les intervalles $] -\infty, 0[$ et $]0, 1[$, vérifiant pour tout réel x appartenant à $] -\infty, 0[\cup]0, 1[$, l'égalité :

$$x(1-x)f'(x) + (1-x)f(x) = 1$$

Soit h la fonction définie sur $] -\infty, 0[\cup]0, 1[$, par: $h(x) = xf(x)$.

Montrer que h est de classe $\mathcal{C}^1$ sur les intervalles $] -\infty, 0[$, $]0, 1[$ et calculer sa dérivée.

1. a) f est $\mathcal{C}^1$ sur les intervalles $] -\infty, 0[$ et $]0, 1[$ donc h l'est aussi comme produit de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$

La dérivée de h est alors : $h'(x) = f(x) + xf'(x)$

et comme $x(1-x)f'(x) + (1-x)f(x) = 1$ alors $(1-x \neq 0) \implies f(x) + xf'(x) = -\frac{1}{1-x}$

et $h'(x) = -\frac{1}{1-x}$

Donc h est une primitive de $x \rightarrow -\frac{1}{1-x}$ sur chacun des deux intervalles.

Et comme $1-x > 0$ sur ces intervalles, une primitive en est $x \rightarrow -\ln(1-x)$ alors h en diffère par une constante, sur chacun de ces intervalles.

Donc il existe deux constantes réelles c_1 et c_2 vérifiant

$$\begin{cases} \forall x \in]-\infty, 0[, & h(x) = -\ln(1-x) + c_1 \\ \forall x \in]0, 1[, & h(x) = -\ln(1-x) + c_2 \end{cases}$$

- b) On définit une fonction f sur les intervalles $] -\infty, 0[$ et $]0, 1[$ par:

$$\begin{cases} \forall x \in]-\infty, 0[, & f(x) = \frac{-\ln(1-x) + c_1}{x} \\ \forall x \in]0, 1[, & f(x) = \frac{-\ln(1-x) + c_2}{x} \end{cases}$$

Pour que f soit prolongeable par continuité en 0, elle doit avoir la même limite finie à droite et à gauche en 0.

- En 0^+ : si $c_1 \neq 0$ alors le numérateur tend vers $c_1 \neq 0$ et le dénominateur vers 0 donc le quotient tend l'infini et la fonction n'est pas prolongeable.

Il est donc nécessaire que c_1 soit égal à 0.

Et pour $c_1 = 0$ on a alors $f(x) = \frac{-\ln(1-x)}{x} \sim \frac{-x}{x} \rightarrow 1$ quand $x \rightarrow 0$

- En 0^- : il faut de même que c_2 soit nul et on a là encore $f(x) \rightarrow 1$.

Donc pour $c_1 = c_2 = 0$ la fonction f est prolongeable par continuité en 0 par $f(0) = 1$ et ce sont les seules valeurs qui conviennent.

2. il est rassurant de voir que la fonction f définie ici est la même que celle que l'on vient de trouver.

a) On a $\ln(1+h) = h - \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{3} + h^3\varepsilon(h)$ avec $\varepsilon(h) \rightarrow 0$ quand $h \rightarrow 0$ donc

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + x^3\varepsilon(x) \text{ avec } \varepsilon(x) \rightarrow 0 \text{ quand } x \rightarrow 0$$

Donc

$$\begin{aligned} -\frac{\ln(1-x)}{x} &= -\frac{1}{x} \left(-x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + x^3\varepsilon(x) \right) \\ &= 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + x^2\varepsilon_1(x) \end{aligned}$$

b) La fonction f est continue en 0 puisqu'elle est la fonction prolongée par continuité que l'on avait trouvée.

On forme alors le taux d'accroissement de f en 0 : pour $x \neq 0$

$$\begin{aligned} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \frac{1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + x^2\varepsilon_1(x) - 1}{x} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{x}{3} + x\varepsilon_2(x) \rightarrow \frac{1}{2} \end{aligned}$$

donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = \frac{1}{2}$.

c) Pour tout x de $] -\infty, 0[\cup]0, 1[$, on a :

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{-\frac{1}{1-x}x - \ln(1-x)}{x^2} \\ &= -\frac{1}{x} \left(-\frac{1}{1-x} - \frac{\ln(1-x)}{x} \right) \\ &= \left(\frac{1}{1-x} - f(x) \right) \frac{1}{x} \end{aligned}$$

f est déjà C^1 sur $] -\infty, 0[\cup]0, 1[$ comme quotient de fonctions C^1 (avec $x \neq 0$)

Pour la continuité de f' en 0, on utilise le développement limité de la question précédente :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left[\frac{1}{1-x} - \left(1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + x^2\varepsilon_1(x) \right) \right] \frac{1}{x} \\ &= \frac{1}{x(1-x)} \left[1 + (x-1) \left(1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + x^2\varepsilon_1(x) \right) \right] \\ &= \frac{1}{x(1-x)} \left[1 - 1 + x \left(-1 + \frac{1}{2} \right) + x\varepsilon_2(x) \right] \\ &= \frac{-\frac{1}{2}x + x\varepsilon_2(x)}{x(1-x)} = \frac{-1 + \varepsilon_2(x)}{2(1-x)} \rightarrow \frac{1}{2} \text{ quand } x \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Et comme $f'(0) = \frac{1}{2}$, f' est continue en 0.

Donc f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $] -\infty, 1[$.

3. a) Pour étudier son signe, on étudie ses variations :

φ est dérivable sur $] -\infty, 1[$ et

$$\varphi'(x) = \frac{1-x+x}{(1-x)^2} + \frac{-1}{1-x} = \frac{1-(1-x)}{(1-x)} = \frac{x}{(1-x)^2}$$

qui est donc du signe de x .

x	$-\infty$	0	1
$\varphi'(x)$	-	0	+
$\varphi(x)$	$+$	$\searrow$	$\nearrow$

Comme $f'(x) = \frac{\varphi(x)}{x^2}$ pour $x \neq 0$, f est alors strictement croissante sur $] -\infty, 1[$

b) Reste à étudier le comportement aux bornes :

- en 1 : $-\frac{\ln(1-x)}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 1} +\infty$ et on a une asymptote verticale.
- en $-\infty$: $-\frac{\ln(1-x)}{x} \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} 0$ forme indéterminée. ON fait le changement de variable $t = -x \rightarrow +\infty$

$$\begin{aligned} f(x) &= -\frac{\ln(1+t)}{-t} = \frac{\ln(t(1+1/t))}{t} \\ &= \frac{\ln(t)}{t} + \frac{\ln(1+1/t)}{t} \text{ car } t > 0 \text{ et } 1+1/t > 0 \\ &\rightarrow 0 \text{ car } \ln(t) \ll t \end{aligned}$$

et on a donc une asymptote horizontale en $-\infty$.

- A l'origine la tangente a une pente de $1/2$

On réutilise le DL de f pour obtenir la position par rapport à la tangente d'équation $y = 1 + \frac{1}{2}x$:

$$\begin{aligned} f(x) - \left(1 + \frac{x}{2}\right) &= 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + x^2\varepsilon_1(x) - 1 + \frac{x}{2} \\ &= \frac{x^2}{3} + x^2\varepsilon_1(x) = x^2 \left(\frac{1}{3} + \varepsilon_1(x)\right) \\ &\rightarrow 0^+ \end{aligned}$$

Donc au voisinage de l'origine, la courbe est au dessus de sa tangente.

x	$-\infty$	0	1
$f'(x)$		$+$	$+$
$f(x)$	0	$\nearrow$	$+\infty$

4. Soit x un réel de l'intervalle $]0, 1[$.

a) $h(t) = -\ln(1-t)$. h est de classe C^∞ sur $] -\infty, 1[$ et :

$$h'(x) = -\frac{-1}{1-t} = \frac{1}{1-t} \quad ''(t) = \frac{1}{(1-t)^2} \quad '''(t) = \frac{2}{(1-t)^3}$$

.

et par récurrence on prouve que pour tout entier naturel n non nul, $h^{(n)}(t) = \frac{(n-1)!}{(1-t)^n}$.

b) Comme h est de classe C^{n+2} on a alors d'après la formule de Taylor reste intégrale à l'ordre $n+1$:

$$\begin{aligned} h(x) &= \sum_{k=0}^{n+1} \frac{x^k}{k!} h^{(k)}(0) + \int_0^x \frac{1}{(n+1)!} (x-t)^{n+1} h^{(n+2)}(t) dt \\ &= h(0) + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{x^k}{k!} h^{(k)}(0) + \int_0^x \frac{1}{(n+1)!} (x-t)^{n+1} \frac{(n+1)!}{(1-t)^{n+2}} dt \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{x^k}{k} + \int_0^x \frac{(x-t)^{n+1}}{(1-t)^{n+2}} dt \end{aligned}$$

c) Pour $x > 0$ et $t \in [0, x]$ on a $0 \leq t \leq x$ et donc $0 \leq x-t$ et pour $x < 1$ on a $0 \leq t < 1$ et $0 < 1-t$. Donc $0 \leq \frac{x-t}{1-t}$

Pour la seconde inégalité : $\frac{x-t}{1-t} - x = \frac{x-t-x(1-t)}{1-t} = \frac{t(x-1)}{1-t} \leq 0$ donc $\frac{x-t}{1-t} \leq x$

Et finalement, pour tout réel t de l'intervalle $[0, x]$, on a : $0 \leq \frac{x-t}{1-t} \leq x$

Il reste à mettre bout à bout les résultats précédents :

- On a d'abord $f(x) = \frac{h(x)}{x} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{x^{k-1}}{k} + \frac{1}{x} \int_0^x \frac{(x-t)^{n+1}}{(1-t)^{n+2}} dt$
- On réindexe la somme $\sum_{k=1}^{n+1} \frac{x^{k-1}}{k} = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k+1}$
- la différence est donc : $f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k+1} = \frac{1}{x} \int_0^x \frac{(x-t)^{n+1}}{(1-t)^{n+2}} dt$
- Dans $\frac{(x-t)^{n+1}}{(1-t)^{n+2}}$ on va majorer $\frac{(x-t)^{n+1}}{(1-t)^{n+1}}$ pour conserver $\frac{1}{1-t}$ en se primitivant donnera $\ln(1-x)$ pour le $f(x)$ recherché :
Sur $[0, x]$ on a $\frac{x-t}{1-t} \leq x$ donc $\frac{(x-t)^{n+1}}{(1-t)^{n+1}} \leq x^{n+1}$ car la fonction puissance est croissante sur $\mathbb{R}^+$ et que tous les termes sont positifs.
Donc $0 \leq \frac{(x-t)^{n+1}}{(1-t)^{n+2}} \leq x^{n+1} \frac{1}{1-t}$
- Enfin, comme $0 \leq x$ (ordre des bornes)

$$\begin{aligned} 0 \leq \int_0^x \frac{(x-t)^{n+1}}{(1-t)^{n+2}} dt &\leq \int_0^x x^{n+1} \frac{1}{1-t} dt = x^{n+1} [-\ln(1-t)]_{t=0}^x \text{ car } 1-t > 0 \\ &\leq -x^{n+1} \ln(1-x) \end{aligned}$$

et donc en divisant par x :

$$0 \leq f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k+1} \leq x^{n+1} \frac{-\ln(1-x)}{x} = x^{n+1} f(x)$$

d) Quand n tend vers $+\infty$, $x^{n+1} \rightarrow 0$ car $|x| < 1$ donc par encadrement $f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k+1} \rightarrow 0$

et donc la série $\sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n+1}$ converge et vaut $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n+1} = f(x)$

Partie B : Étude d'une variable aléatoire à densité

1. Dans cette question f est la fonction définie à la question 2 de la partie A.

a) Soit f_1 la fonction définie sur $]0, 1]$ par :
$$\begin{cases} f_1(t) = \frac{\ln t}{t-1} & \text{si } t \neq 1 \\ f_1(1) = 1 \end{cases}$$

- f_1 est continue pour $t-1 \neq 0$ et $t > 0$ (sur $]0, 1[$) comme quotient de fonctions continues.
- En 1^- : on effectue le changement de variable $h = t-1 \rightarrow 0$ et $f(t) = \frac{\ln(1+h)}{h} \rightarrow 1 = f(1)$ car $\ln(1+h) \sim h$ quand $h \rightarrow 0$.
- Donc f_1 est continue sur $]0, 1]$

On a $\int_0^x f(t) dt = \int_0^x -\frac{\ln(1-t)}{t} dt$ et $\int_{1-x}^1 f_1(t) dt = \int_{1-x}^1 \frac{\ln t}{t-1} dt$

Dans la première intégrale, on effectue le changement de variable $\tau = 1-t \iff t = 1-\tau$
 $t=0 \iff \tau=1 : t=x \iff \tau=1-x$ et $dt = -d\tau$ ($t \rightarrow 1-t$ est de classe C^1 sur $[0, x]$ et f est continue sur l'intervalle image de $[0, x]$ par cette fonction)

Donc

$$\int_0^x f(t) dt = \int_{1-x}^1 -\frac{\ln(\tau)}{(1-\tau)} - d\tau = \int_{1-x}^1 f_1(\tau) d\tau$$

b) On prouve en intégrant par parties :

dans $\int_a^1 t^n \ln t dt$ on pose alors $u'(t) = t^n : u(t) = t^{n+1}/(n+1)$ et $v(t) = \ln(t) : v'(t) = 1/t$ avec u et v de classe C^1 sur $[a, 1]$.

$$\begin{aligned} \int_a^1 t^n \ln t dt &= \left[\frac{t^{n+1}}{n+1} \ln(t) \right]_a^1 - \int_a^1 \frac{t^{n+1}}{n+1} \frac{1}{t} dt \\ &= 0 - \frac{a^{n+1} \ln a}{n+1} - \left[\frac{1}{(n+1)^2} t^{n+1} \right]_a^1 \\ &= -\frac{a^{n+1} \ln a}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2} (1 - a^{n+1}) \end{aligned}$$

Et quand $a \rightarrow 0^+$ on a $a^{n+1} \ln a = \ln(a) / \left(\frac{1}{a^{n+1}}\right) \rightarrow 0$ car $\ln(a) \ll \frac{1}{a^{n+1}}$ et $a^{n+1} \rightarrow 0$ car $n+1 > 0$ donc

$$\int_a^1 t^n \ln t dt \rightarrow -\frac{1}{(n+1)^2}$$

Donc l'intégrale $\int_0^1 t^n \ln t dt$ converge et $\int_0^1 t^n \ln t dt = -\frac{1}{(n+1)^2}$.

c) Soit a un réel de l'intervalle $]0, 1[$ et n un entier naturel. On a

$$\begin{aligned} \int_a^1 f_1(t) dt + \sum_{k=0}^n \int_a^1 t^k \ln t dt &= \int_a^1 \left(\frac{\ln t}{t-1} + \sum_{k=0}^n t^k \right) \ln t dt && \text{prolongeable en 1} \\ &= \int_a^1 \left(\frac{1}{t-1} + \frac{t^{n+1}-1}{t-1} \right) \ln t dt && \text{pour } t \neq 1 \text{ prolongeable.} \\ &= \int_a^1 t^{n+1} \frac{\ln(t)}{t-1} dt \\ &= \int_a^1 t^{n+1} f_1(t) dt \end{aligned}$$

d) $t f_1(t) = \frac{t \ln(t)}{t-1}$ donc la fonction $t \mapsto t f_1(t)$ est continue sur $]0, 1[$

En 0 on a $t \ln(t) \rightarrow 0$ et en 1 on a vu que $\ln(t) / (t-1) \rightarrow 1$. Donc Cette fonction est bien prolongeable par continuité en 0 et en 1 donc prolongeable en une fonction h_1 continue sur $[0, 1]$.

On rassemble les questions précédentes :

- $\int_a^1 f_1(t) dt = \int_a^1 t^{n+1} f_1(t) dt - \sum_{k=0}^n \int_a^1 t^k \ln t dt$
- Avec $\int_a^1 t^k \ln t dt \rightarrow -\frac{1}{(k+1)^2}$ quand $a \rightarrow 0$
- et $\int_a^1 t^{n+1} f_1(t) dt = \int_a^1 t^n t f_1(t) dt = \int_a^1 t^n h_1(t) dt \rightarrow \int_0^1 t^n h_1(t) dt$ (la fonction h_1 est continue, donc l'intégrale est une intégrale propre)
- Finalement $\int_a^1 f_1(t) dt \rightarrow \int_0^1 t^n h_1(t) dt - \sum_{k=0}^n -\frac{1}{(k+1)^2}$

Finalement l'intégrale $\int_0^1 f_1(t) dt$ converge et

$$\int_0^1 f_1(t) dt = \sum_{k=0}^n \frac{1}{(k+1)^2} + \int_0^1 t^n h_1(t) dt$$

e) Comme la fonction h_1 est continue (et positive) sur le segment $[0, 1]$ elle y admet donc un maximum M

Donc pour tout $t \in [0, 1] : 0 \leq h_1(t) \leq M$ et $(t^n \geq 0) \Rightarrow 0 \leq t^n h_1(t) \leq M t^n$

En intégrant l'inégalité ($0 \leq 1$) on obtient $0 \leq \int_0^1 t^n h_1(t) dt \leq \int_0^1 M t^n dt = \frac{M}{n+1}$

D'où :

$$0 \leq \int_0^1 f_1(t) dt - \sum_{k=0}^n \frac{1}{(k+1)^2} \leq \frac{M}{n+1}$$

f) La série de terme général $\frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann avec $2 > 1$ donc elle est convergente.

Comme $\frac{M}{n+1} \rightarrow 0$ alors, par encadrement $\int_0^1 f_1(t) dt - \sum_{k=0}^n \frac{1}{(k+1)^2} \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow +\infty$

Donc $\sum_{k=0}^n \frac{1}{(k+1)^2} \rightarrow \int_0^1 f_1(t) dt$ (constante) quand $n \rightarrow +\infty$

Finalement $\int_0^1 f_1(t) dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

D'autre part $\int_0^x f(t) dt = \int_{1-x}^1 f_1(t) dt \rightarrow \int_0^1 f_1(t) dt$ quand $x \rightarrow 1$

Donc $\int_0^1 f(t) dt$ impropre en 1 est convergente et $\int_0^1 f_1(t) dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

2. On donne: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ et on désigne par g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par:

$$\begin{cases} g(t) = \frac{6}{\pi^2} f(t) & \text{si } t \in [0, 1[\\ g(t) = 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

a) On se rappelle que $f \geq 0$ et continue sur $\mathbb{R}$ donc sur $]-\infty, 1[$ et que $\int_0^1 f(t) dt = \frac{\pi^2}{6}$

Donc g est positive sur $\mathbb{R}$, continue sur $\mathbb{R} - \{0, 1\}$ et

$\int_{-\infty}^{+\infty} g$ est impropre en $\pm\infty$ et en 1.

$\int_{-\infty}^0 g = \int_{-\infty}^0 0 = 0$ et de même $\int_1^{+\infty} g = 0$

Enfin comme $\int_0^1 f(t) dt$ converge et vaut $\frac{\pi^2}{6}$ alors $\int_0^1 \frac{6}{\pi^2} f(t) dt$ converge et vaut 1.

Donc $\int_{-\infty}^{+\infty} g$ converge et vaut 1.

Donc g est bien une densité de probabilité.

b) Soit X une variable aléatoire ayant pour densité g .

Par le même changement de variable $t = 1 - \tau$ on trouve $\int_0^x \ln(1-t) dt = \int_{1-x}^1 \ln \tau d\tau$.

L'espérance de X est (si elle converge) $\int_{-\infty}^{+\infty} tg(t) dt$.

Or $\int_{-\infty}^0 tg(t) dt = 0$ et $\int_1^{+\infty} tg(t) dt = 0$

Reste à étudier

$$\int_0^1 tg(t) dt = \int_0^1 \frac{6}{\pi^2} t \frac{-\ln(1-t)}{t} dt = \int_0^1 -\frac{6}{\pi^2} \ln(1-t) dt$$

Comme on a vu précédemment que $\int_0^1 t^n \ln t dt = -\frac{1}{(n+1)^2}$ pour tout entier naturel n donc pour $n = 0$ on a $\int_0^1 \ln \tau d\tau$ converge et vaut $-\frac{1}{1^2} = -1$ donc $\int_0^x \ln(1-t) dt = \int_{1-x}^1 \ln \tau d\tau \rightarrow -1$ quand $x \rightarrow 1$ et $\int_0^1 \ln(1-t) dt$ converge et vaut -1

Donc $\int_0^1 tg(t) dt$ converge et vaut $\frac{6}{\pi^2}$

Finalement X a bien une espérance et $E(X) = -\frac{6}{\pi^2}$

c) Par le même changement de variable on trouve pour $0 \leq x < 1$ que

$$\begin{aligned} \int_0^x (t-1) \ln(1-t) dt &= \int_{1-x}^1 -\tau \ln \tau d\tau \\ &\rightarrow -\int_0^1 \tau^1 \ln \tau d\tau = -\frac{-1}{2^2} \end{aligned}$$

Donc l'intégrale $\int_0^1 (t-1) \ln(1-t) dt$ converge et est égale à $\frac{1}{4}$

On a alors

$$\begin{aligned} \int_0^1 t^2 g(t) dt &= \int_0^1 \frac{6}{\pi^2} t^2 \frac{-\ln(1-t)}{t} dt = \int_0^1 -\frac{6}{\pi^2} t \ln(1-t) dt \\ &= \int_0^1 -\frac{6}{\pi^2} (t-1+1) \ln(1-t) dt \\ &= -\frac{6}{\pi^2} \int_0^1 (t-1) \ln(1-t) dt - \frac{6}{\pi^2} \int_0^1 \ln(1-t) dt \\ &= -\frac{6}{\pi^2} \frac{1}{4} + \frac{6}{\pi^2} = \frac{9}{2\pi^2} \end{aligned}$$

Donc X^2 a une espérance qui est $E(X^2) = \frac{9}{2\pi^2}$

et enfin X a une variance qui est $V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{9}{2\pi^2} - \frac{36}{\pi^4}$

Partie C : Encadrement d'une fonction de deux variables

Dans cette partie, on désigne par V l'ensemble ouvert défini par:

$$V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} < y < \frac{1}{2}\}$$

1. Soit u la fonction de V dans $\mathbb{R} : (x, y) \mapsto u(x, y) = xy^2 + x^2 + y^2 + \frac{1}{4}$.

a) u est de classe C^2 sur l'ouvert V et

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = y^2 + 2x \text{ et } \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = 2xy + 2y$$

$$\begin{cases} \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y^2 + 2x = 0 \\ 2xy + 2y = 0 \end{cases} \quad (1)$$

• Si $y = 0$ alors (1) $\iff \begin{cases} x = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$ et $(0, 0)$ est un point critique.

• Si $y \neq 0$ alors (1) $\iff \begin{cases} y^2 = 2 \\ x + 1 = 0 \iff x = -1 \end{cases}$ et comme $\sqrt{2} \notin]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$ il n'y a pas de tels points critiques dans V .

Donc le seul point où F peut avoir un extremum local est $(0, 0)$.

On y calcule les dérivées secondes :

$$r = \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} = 2 \text{ et } s = \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x \partial y} = 2y \text{ et } \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial^2 y} = 2y + 2$$

Donc en $(0, 0)$ on a $r = 2$, $s = 0$ et $t = 2$ donc $rt - s^2 = 4 > 0$ et on a un extremum local en ce point.

De plus $r = 2 > 0$ et c'est donc un minimum local.

Est-il minimum global ?

On a $u(0, 0) = \frac{1}{4}$ et $u(x, y) = xy^2 + x^2 + y^2 + \frac{1}{4} = (x + 1)y^2 + x^2 + \frac{1}{4} \geq \frac{1}{4}$. (car $x + 1 \geq 0$ sur V)

Donc la fonction u admet $(0, 0)$ comme minimum global sur V et n'admet pas de maximum.

b) Comme $|x| < \frac{1}{2}$ et $|y| < \frac{1}{2}$ alors $|xy^2| < \frac{1}{8} : x^2 < \frac{1}{4}$ et $y^2 < \frac{1}{4}$

Donc $xy^2 + x^2 + y^2 + \frac{1}{4} \leq |xy^2| + x^2 + y^2 + \frac{1}{4} < \frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{7}{8}$ sur l'ouvert V .

2. Soit F la fonction : $(x, y) \mapsto F(x, y) = \frac{\ln\left(\frac{3}{4} - xy^2 - x^2 - y^2\right)}{\frac{1}{4} + xy^2 + x^2 + y^2}$

a) Avec $t = u(x, y) = \frac{1}{4} + xy^2 + x^2 + y^2$ on reconnaît que $F(x, y) = \frac{\ln(1-t)}{t} = -f(u(x, y))$

Reste à voir si $u(x, y) \in]0, 1[$

Or u est minimum en $(0, 0)$ où elle vaut $\frac{1}{4}$ donc pour tout (x, y) de V on a :

$$\frac{1}{4} \leq u(x, y) \leq \frac{7}{8} < 1$$

Donc F est bien définie sur l'ouvert V .

Comme f est strictement croissante sur $]0, 1[$, $-f$ sera strictement décroissante et donc $-f(u(x, y))$ sera maximum quand $u(x, y)$ sera minimum.

Donc sur l'ouvert V , F a comme unique maximum le point $(0, 0)$

$$\text{et } F(0, 0) = 4 \ln\left(\frac{3}{4}\right)$$

b) On a donc une majoration de $F \leq 4 \ln \left(\frac{3}{4} \right)$

Pour le minorant : on sait que $u(x, y) \leq \frac{7}{8}$ sur V et comme $-f$ est décroissante, $-f(u(x, y)) \geq -f\left(\frac{7}{8}\right)$ donc :

$$-f\left(\frac{7}{8}\right) \leq F(x, y) \leq 4 \ln \left(\frac{3}{4} \right)$$

pour tout (x, y) de V .