

EXERCICE 1

Calcul approché de $\ln a$ pour $a \in [1, 2]$.

La notation $f^{(p)}$ désigne la fonction dérivée d'ordre p de la fonction numérique f .

1° a) Soit $u : x \mapsto \frac{1}{1+x}$ et $v : x \mapsto \frac{1}{1-x}$.

Déterminer, pour tout $p \in \mathbb{N}$, les fonctions $u^{(p)}$ et $v^{(p)}$.

b) Soit $f : x \mapsto \ln \frac{1-x}{1+x}$.

Déterminer l'ensemble de définition D_f de f . Montrer qu'il existe deux réels λ et μ à préciser tels que :

$$\forall x \in D_f \quad f'(x) = \lambda u(x) + \mu v(x).$$

En déduire $f^{(p)}(x)$ pour $p \in \mathbb{N}^*$ et $x \in D_f$.

c) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, calculer $f^{(2k)}(0)$ et $f^{(2k+1)}(0)$.

Montrer que : $\forall x \in \left[0, \frac{1}{3}\right] \quad \left| f^{(2n+3)}(x) \right| \leq (2n+2)! \frac{3^{2n+3}}{4^{n+1}}$.

d) On pose $S_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$.

Montrer, en utilisant l'inégalité de Taylor-Lagrange, que :

$$\forall x \in \left[0, \frac{1}{3}\right] \quad \left| f(x) - 2S_n(x) \right| \leq \frac{1}{4^{n+1}(2n+3)}.$$

2° a) Soit a un réel de l'intervalle $[1, 2]$. On pose $x = \frac{a-1}{a+1}$.

Montrer, en utilisant 1°, que : $\left| \ln a - 2S_n(x) \right| \leq \frac{1}{4^{n+1}(2n+3)}$.

b) Déterminer la plus petite valeur de l'entier n pour laquelle

$$\frac{1}{4^{n+1} (2n+3)} < 5 \times 10^{-4}$$

c) On choisit $a = \frac{3}{2}$; calculer x .

Pour $k \in \{0, 1, 2, 3\}$ donner la valeur exacte de $\frac{x^{2k+1}}{2k+1}$.

Calculer $2S_3(x)$ (on écrira, avec toutes ses décimales, la valeur approchée de $2S_3(x)$ affichée par la calculatrice).

Comparer avec $\ln\left(\frac{3}{2}\right)$ (on donnera l'ordre de grandeur de $\ln\left(\frac{3}{2}\right) - 2S_3(x)$).



EXERCICE 2

Démonstration de l'égalité : [1] $\int_0^1 x^{-x} dx = \sum_{k=1}^{+\infty} k^{-k}.$

1° Soit $g :]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto -x \ln x$$

Etablir le tableau de variations de g .

2° A l'aide de la formule de Taylor-reste intégral, montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall u \in \mathbb{R} \quad e^u = \sum_{k=0}^n \frac{u^k}{k!} + R_n(u), \text{ où } R_n \text{ est continue et vérifie :}$$

$$\forall u \geq 0 \quad 0 \leq R_n(u) \leq \frac{u^{n+1}}{(n+1)!} e^u.$$

3° Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit $J_n = \int_0^{+\infty} e^{-u} u^n du$.

a) Justifier l'existence de J_n .

b) Calculer J_0 ; à l'aide d'une intégration par parties, trouver une relation entre J_{k+1} et J_k , pour $k \in \mathbb{N}$; en déduire la valeur de J_n .

c) Soit $k \in \mathbb{N}$ et $\varepsilon \in]0, 1[$.

Effectuer sur l'intégrale $\int_{\varepsilon}^1 x^k (\ln x)^k dx$ le changement de variable $v = -(k+1) \ln x$.

d) En déduire l'existence et la valeur de $I_k = \int_0^1 x^k (\ln x)^k dx$.

4° a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrer que :

$$\int_0^1 x^{-x} dx = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} I_k + r_n, \text{ avec } 0 \leq r_n \leq \frac{e^{1/e}}{(n+1)! e^{n+1}}.$$

b) En déduire l'égalité [1].

5° Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose : $s_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{(k+1)^{k+1}}$.

Montrer que s_7 , que l'on calculera avec toutes les décimales fournies par la calculatrice, est une

valeur approchée à 10^{-7} près de $\int_0^1 x^{-x} dx$.



PROBLEME

Probabilité de trouver un mot donné dans un texte aléatoire.

Dans tout le problème, p désigne un entier supérieur ou égal à 2 et toutes les suites sont définies pour $n \in \mathbb{N}^*$.

– Dans une grande école de commerce, un étudiant a programmé son (micro-)ordinateur de la façon suivante :

l'ordinateur fait imprimer un nombre, aussi grand que l'on veut, de caractères (des lettres), les uns après les autres, de manière aléatoire ; pour chaque caractère imprimé, la probabilité que ce soit une lettre donnée est constante.

– L'étudiant cherche la probabilité pour qu'un mot précis de p lettres apparaisse au moins une fois dans le "texte" produit par l'ordinateur (on ne tient pas compte des passages à la ligne).

– Soit X_j ($j \in \mathbb{N}^*$) la variable aléatoire égale au j -ième caractère produit par la machine (voir note en bas de page).

– On note $x_0 x_1 \dots x_{p-1}$ la séquence de lettres qui forme le mot en question.

– Le mot voulu est écrit à partir du i -ième caractère si l'événement

$$A_i = (X_i = x_0) \cap (X_{i+1} = x_1) \cap \dots \cap (X_{i+p-1} = x_{p-1})$$

est réalisé.

- Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on s'intéresse donc au calcul de $v_n = P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right)$, qui représente la probabilité

pour que le mot voulu apparaisse au moins une fois dans la suite des $n + p - 1$ premiers caractères imprimés.

- On fait les deux hypothèses suivantes :

1) Les v.a. X_j suivent toutes la même loi de probabilité.

2) Les v.a. X_j sont mutuellement indépendantes.

Les deux parties du problème sont largement indépendantes : seuls les résultats des questions 1° et 8° de la première partie sont utiles pour la deuxième partie.

Note : pour avoir des variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$, il suffirait, par exemple, de remplacer les lettres par leurs rangs dans l'alphabet. Mais ceci n'a pas d'importance pour la suite du problème.

PREMIERE PARTIE : relation de récurrence satisfaite par (v_n) .

1° Montrer que la suite (v_n) est croissante.

2° Montrer que :

$$\forall i \in \mathbb{N}^* \quad P(A_i) = P(A_1).$$

Dans la suite du problème, on note a cette constante (qu'on suppose non nulle).

3° On dit qu'une séquence de lettres $x_0 x_1 \dots x_{p-1}$ est superposable en partie (en abrégé : s.e.p.) si et seulement si :

$$\exists i \in [[1, p-1]] \quad \forall j \in [[1, p-1]] \quad (j \geq i \Rightarrow x_j = x_{j-i}).$$

Regarder si les séquences suivantes sont s.e.p. (et donner une valeur de i le cas échéant) :

a) ENTENDENT

b) ECRICOME

c) FINI

Dans la suite du problème, on suppose que :

la séquence $x_0 x_1 \dots x_{p-1}$ n'est pas s.e.p.

4° Soit q et r deux entiers strictement positifs.
Montrer que, si $1 \leq r \leq p-1$, alors A_q et A_{q+r} sont incompatibles.

5° Soit $k \geq p$. Montrer que : $v_{k+1} = v_k + a - P\left(\left(\bigcup_{i=1}^{k-p+1} A_i\right) \cap A_{k+1}\right)$.

6° Quelles sont les variables X_j qui interviennent dans $\bigcup_{i=1}^{k-p+1} A_i$?

Et dans A_{k+1} ? En déduire que : $v_{k+1} = v_k + a - a v_{k-p+1}$.

7° Calculer v_k pour $k \in [[1, p]]$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = 1 - v_n$

8° Vérifier que (u_n) est une suite décroissante de réels de $[0, 1]$ telle que :

$$\begin{cases} \forall k \in [[1, p]] & u_k = 1 - ka \\ \forall k \geq p & u_{k+1} = u_k - a u_{k-p+1} \end{cases}$$

DEUXIEME PARTIE : étude de la suite (u_n) ; exemples .

- 1°** Justifier la convergence de la suite (u_n) .
 Quelle est sa limite ? En revenant à (v_n) , quelle interprétation peut-on donner de ce résultat ?
- 2° Majoration de u_n .**
 Montrer que : $\forall n \geq p \quad u_n \leq (1-a)^{n-p} (1-pa)$.
 Retrouver ainsi la limite de (u_n) .
- 3° Etude du cas particulier : $p = 2$ et $a = \frac{4}{25}$.**
- a) Calculer u_n en fonction de n .
- b) On suppose que, pour chaque caractère imprimé, la probabilité pour que ce soit la lettre A (respectivement S) est $\frac{40}{75}$ (respectivement $\frac{3}{10}$).
 Quelle est la probabilité d'avoir au moins une fois le mot "AS" dans un texte de 51 caractères ?
 (on écrira toutes les décimales fournies par la calculatrice).
- 4° On suppose dans cette question que $p = 3$ et $a < \frac{2^2}{3^3}$.**
- a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $U_n = \begin{bmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{bmatrix}$.
- Montrer que, pour $k \geq 3$, on peut écrire : $U_{k-1} = A U_{k-2}$, avec $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
 Déterminer l'expression de U_n en fonction de n, A , et U_1 .
- b) Montrer que les valeurs propres de la matrice A sont les nombres λ solutions de l'équation :
- $$\lambda^3 - \lambda^2 + a = 0$$
- c) Etudier les variations sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \mapsto x^3 - x^2 + a$;
 En déduire que A admet trois valeurs propres réelles $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ vérifiant
- $$-1 < \lambda_1 < 0 < \lambda_2 < \frac{2}{3} < \lambda_3 < 1 .$$
- d) Montrer qu'il existe une matrice diagonale $D \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, et une matrice $Q \in GL_3(\mathbb{R})$, telles que :
- $$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad A^{n-1} = Q D^{n-1} Q^{-1} .$$
- (on ne demande pas d'explicitier Q)

e) En déduire qu'il existe trois réels α, β, γ , qu'on ne demande pas de calculer, tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = \alpha \lambda_1^{n-1} + \beta \lambda_2^{n-1} + \gamma \lambda_3^{n-1}$$

5° Dans cette dernière question : $p = 4$.

a) On suppose, dans ce a), que, pour chaque caractère, la probabilité du F (resp. du I, du N) est 0.02 (resp. 0.1, 0.05).

(i) Ecrire un algorithme qui, pour n donné, calcule u_n et affiche la probabilité d'avoir au moins une fois le mot "FINI" dans un texte de $n + 3$ caractères.

(ii) Donner les valeurs numériques obtenues (arrondies à 10^{-4} près) pour $n \in \{50, 100, 300\}$.

b) On cherche, comme au 4° précédent, à établir une expression de u_n en fonction de n . On

suppose que : $a < \frac{3^3}{4^4}$.

(i) Soit le polynôme $R = X^4 - X^3 + a$.

Montrer que R a deux racines réelles μ_1 et μ_2 . Vérifier qu'elles appartiennent à l'intervalle $]0, 1[$.

(ii) Soit δ une racine complexe (non réelle) de R .

Justifier son existence. Montrer que $\bar{\delta}$ est aussi racine de R .

(iii) Comment se factorise alors R dans $\mathbb{C}[X]$?

En considérant le produit des racines de R , montrer que : $|\delta|^2 = \frac{a}{\mu_1 \mu_2}$.

On démontre alors (et on admettra) que $|\delta| < 1$, et qu'il existe un unique quadruplet $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) \in \mathbb{C}^4$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = \alpha_1 \mu_1^{n-1} + \alpha_2 \mu_2^{n-1} + \alpha_3 \delta^{n-1} + \alpha_4 \bar{\delta}^{n-1}.$$

Montrer que α_1 et α_2 sont réels, et que $\alpha_4 = \overline{\alpha_3}$.

