

Préliminaire : Trace d'une matrice et d'un endomorphisme

a) $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ sont deux éléments de $M_p(\mathbb{R})$ donc :

$$\underline{\underline{\text{Tr}(AB) = \sum_{i=1}^p \left(\sum_{k=1}^p a_{ik} b_{ki} \right)}} \quad \text{Tr}(AB) = \sum_{i=1}^p \left(\sum_{k=1}^p a_{ik} b_{ki} \right) = \sum_{k=1}^p \left(\sum_{i=1}^p b_{ki} a_{ik} \right) = \text{Tr}(BA)$$

donc $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$.

b) π et π' sont semblables donc il existe une matrice inversible P de $M_p(\mathbb{R})$ telle

que : $\pi' = P^{-1} \pi P$.

$$\text{Tr}(\pi) = \text{Tr}(P^{-1} \pi P) = \text{Tr}((P^{-1} \pi') P) \stackrel{\text{a)} \downarrow}{=} \text{Tr}(P(P^{-1} \pi')) = \text{Tr}(PP^{-1} \pi') = \text{Tr}(I_p \pi')$$

donc $\text{Tr}(\pi) = \text{Tr}(\pi')$.

Si π et π' sont deux matrices semblables de $M_p(\mathbb{R})$: $\text{Tr}(\pi) = \text{Tr}(\pi')$.

Partie I : Etude des éléments de l'ensemble $T(E)$

Q1 a) Soit λ réel.

$$v - \lambda x \text{ orthogonal à } x \iff 0 = \langle v - \lambda x, x \rangle = \langle v, x \rangle - \lambda \langle x, x \rangle = \langle v, x \rangle - \lambda \|x\|^2$$

$$v - \lambda x \text{ orthogonal à } x \iff \lambda = \frac{\langle v, x \rangle}{\|x\|^2} \quad (\|x\|^2 \neq 0 \text{ car } x \neq 0_E).$$

Pour tout v appartenant à E l'unique nombre réel $\lambda(v)$ tel que $v - \lambda(v)x$ soit orthogonal à x est : $\frac{\langle v, x \rangle}{\|x\|^2}$.

b) B'at du cours !! $X = \{u \in E \mid \langle u, x \rangle = 0\} = \{t \in E \mid \forall y \in \text{Vect}(x), \langle t, y \rangle = 0\}$

donc $X = (\text{Vect}(x))^\perp$. Ainsi $E = \text{Vect}(x) \oplus X$... et même $E = \text{Vect}(x) \oplus X$!

Mais il inverse la case.

d'après : $\text{Vect}(x) + X \subset E$.

Réciproquement soit v un élément de E . $v = \lambda(v)x + (v - \lambda(v)x)$. Or $\lambda(v)x \in \text{Vect}(x)$ et

$v - \lambda(v)x$ est orthogonal à x donc appartient à X . Ainsi $v \in \text{Vect}(x) + X$

Pour conclure $E \subset \text{Vect}(x) + X$.

Finalement : $E = \text{Vect}(x) + X$. Montrons que cette somme est directe.

Soit $t \in \text{Vect}(x) \cap X$. $\exists \lambda \in \mathbb{R}, t = \lambda x$ et t appartient à X donc est orthogonal à x .

Ainsi $\langle t, x \rangle = 0$; donc $0 = \langle \lambda x, x \rangle = \lambda \|x\|^2$. λ est alors nul car $\|x\|^2$ ne l'est pas. Ainsi $t = 0_E$.

donc $E = \text{Vect}(x) + X$ et $\text{Vect}(x) \cap X = \{0_E\}$. $\text{Vect}(x)$ et X sont supplémentaires ... et orthogonales

Q2 a) • $x \in E$ et $\forall v \in E, \langle x, v \rangle \in \mathbb{R}$; $\forall v \in E, u_x(v) = \langle x, v \rangle x \in E$

$$\forall (v_1, v_2) \in E^2, \forall \lambda \in \mathbb{R}, u_x(\lambda v_1 + v_2) = \langle x, \lambda v_1 + v_2 \rangle x = (\lambda \langle x, v_1 \rangle + \langle x, v_2 \rangle) x$$

$$\forall (v_1, v_2) \in E^2, \forall \lambda \in \mathbb{R}, u_x(\lambda v_1 + v_2) = \lambda \langle x, v_1 \rangle x + \langle x, v_2 \rangle x = \lambda u_x(v_1) + u_x(v_2).$$

u_x est un endomorphisme de E .

$$\bullet \forall (v_1, v_2) \in E^2, \langle u_x(v_1), v_2 \rangle = \langle \langle x, v_1 \rangle x, v_2 \rangle = \langle x, v_1 \rangle \langle x, v_2 \rangle = \langle x, v_2 \rangle \langle v_1, x \rangle$$

$$\forall (v_1, v_2) \in E^2, \langle u_x(v_1), v_2 \rangle = \langle v_1, \langle x, v_2 \rangle x \rangle = \langle v_1, u_x(v_2) \rangle$$

u_x est symétrique

$$\bullet \forall v \in E, u_x(v) = \langle x, v \rangle x \in \text{Vect}(x); \text{Im } u_x \subset \text{Vect}(x).$$

$$\text{rg } u_x = \dim \text{Im } u_x \leq \dim(\text{Vect}(x)) = 1. \quad \underline{\text{rg } u_x \leq 1.}$$

$$\bullet \forall v \in E, \langle u_x(v), v \rangle = \langle \langle x, v \rangle x, v \rangle = \langle x, v \rangle \langle x, v \rangle = (\langle x, v \rangle)^2 \geq 0$$

$$\forall v \in E, \langle u_x(v), v \rangle \geq 0.$$

ce qui précède montre que : u_x est un élément de $T(E)$ pour tout x dans $E - \{0_E\}$.

Remarques. - 1. Ça vaut aussi pour $x = 0_E$.

$$2.. \text{Si } x \text{ n'est pas nul } \text{rg } u_x = 1 \quad (u_x(\frac{1}{\|x\|^2} x) = x \neq 0_E) \dots$$

Soit $(e_1, \dots, e_p)$ une base de X ($\dim X = p-1$ car $E = \text{Vect}(x) \oplus X$ et $x \neq 0_E$).

$\mathcal{B} = (x, e_1, \dots, e_p)$ est une base de E car (x) est une base de $\text{Vect}(x)$, $(e_1, \dots, e_p)$ est une base de X et $E = \text{Vect}(x) \oplus X$.

et X des $\langle x, e_i \rangle = 0$

$$u_x(x) = \langle x, x \rangle x = \|x\|^2 x \quad \text{et } \forall i \in \{1, p\}, u_x(e_i) = \langle x, e_i \rangle x = 0_E$$

$$\text{Ainsi } \pi_{\mathcal{B}}(u_x) = \begin{pmatrix} \|x\|^2 & & (0) \\ & 0 & \\ (0) & & \ddots \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

Remarque. - 2. Il faut sans doute ici supposer que: $p \geq 2$!

$$\text{Tr}(u_x) = \text{Tr}(\pi_{\mathcal{B}}(u_x)) = \|x\|^2.$$

$$\underline{\text{Tr}(u_x) = \|x\|^2.}$$

$$\text{Tr}(u_x \circ u_x) = \text{Tr}((\pi_{\mathcal{B}}(u_x))^2) = \text{Tr} \begin{pmatrix} \|x\|^4 & & (0) \\ & 0 & \\ (0) & & \ddots \\ & & & 0 \end{pmatrix} = \|x\|^4.$$

$$\underline{\text{Tr}(u_x \circ u_x) = \|x\|^4.}$$

b) $Sp(u_x) = Sp(\pi_E(u_x)) = \{0, \|x\|^2\}$

$rg(u_x) \leq 1$ et $u_x \neq 0_{X(E)}$ donc $rg(u_x) = 1$ et ainsi $\dim \text{Ker } u_x = p-1$.

Par conséquent $\dim SEP(u_x, 0) = p-1$ et alors nécessairement $\dim SEP(u_x, \|x\|^2) = 1$.

$\forall x \in X, u_x(t) = \langle x, t \rangle x = 0, x = 0_E; x \in SEP(u_x, 0)$ et

$\dim X = p-1 = \dim SEP(u_x, 0); \quad \underline{SEP(u_x, 0) = X.}$

$u_x(x) = \langle x, x \rangle x = \|x\|^2 x; x \in SEP(u_x, \|x\|^2)$. Comme x n'est pas nul et que $SEP(u_x, \|x\|^2)$ est une droite vectorielle: $SEP(u_x, \|x\|^2) = \text{Vect}(x)$.

c) Reprenons la base $B = (e, e_2, \dots, e_p)$ précédente.

$$(f \circ u_x)(x) = f(\|x\|^2 x) = \|x\|^2 f(x) = \|x\|^2 [\lambda(f(x)) x + (f(x) - \lambda(f(x)) x)]$$

La composante du vecteur $(f \circ u_x)(x)$ relative au premier vecteur de B est

alors $\|x\|^2 \lambda(f(x))$ car $\|x\|^2 [f(x) - \lambda(f(x)) x] \in X \perp \text{Vect}(e, e_2, \dots, e_p)$.

Cette composante est encore: $\|x\|^2 \frac{\langle f(x), x \rangle}{\|x\|^2} = \langle f(x), x \rangle$.

$$\forall i \in [2, p], (f \circ u_x)(e_i) = f(u_x(e_i)) = f(0_E) = 0_E$$

Pour tout i dans $[2, p]$ la composante de $(f \circ u_x)(e_i)$ sur le vecteur e_i de B est 0.

Les éléments diagonaux de la matrice de $f \circ u_x$ dans B sont: $(\langle f(x), x \rangle, 0, \dots, 0)$

Ainsi la trace de $f \circ u_x$ est $\langle f(x), x \rangle$.

Q3 a) $\text{Im } u = \text{Vect}(x)$. Or $u(x) \in \text{Im } u$ donc $\exists \mu \in \mathbb{R}, u(x) = \mu x$.

Ainsi $x \neq 0_E$ et $u(x) = \mu x$. x est un vecteur propre de u .

$u \in T(E)$ donc $\langle x, u(x) \rangle \geq 0; \langle x, \mu x \rangle \geq 0; \mu \|x\|^2 \geq 0$.

Ainsi $\mu \geq 0$ car $\|x\|^2 > 0$. Donc μ est positive.

b) Montrons d'abord que: $x \in \text{Ker } u$. Soit t un élément de X . $\left\{ \begin{array}{l} x = t \text{ ou } t \in E \\ \langle x, t \rangle = 0 \end{array} \right.$

Prendons un élément quelconque z de E . $\exists \delta \in \mathbb{R}, u(z) = \delta x$.

$$\langle u(t), z \rangle = \langle t, u(z) \rangle = \langle t, \delta x \rangle = \delta \langle t, x \rangle = 0.$$

Ainsi $\forall z \in E, \langle u(t), z \rangle = 0$. Soit $u(t) \in E^\perp = \{0_E\}$; $u(t) = 0_E$; $t \in K \cap u$.
On a donc bien $x \in K \cap u$.

Soit alors v un élément de E . $v = \lambda(v)x + (v - \lambda(v)x)$ avec $\lambda(v) = \frac{\langle x, v \rangle}{\|x\|^2}$.

$v - \lambda(v)x \in x^\perp$ donc $u(v - \lambda(v)x) = 0$.

Ainsi $u(v) = \lambda(v)u(x) + u(v - \lambda(v)x) = \lambda(v)u(x) = \frac{\langle x, v \rangle}{\|x\|^2} x$.

$$\forall v \in E, u(v) = \frac{1}{\|x\|^2} \langle x, v \rangle x.$$

c) Nous savons déjà que : $\gamma \geq 0$. Supposons $\gamma = 0$ alors $\forall v \in E, u(v) = 0_E$ et $u = 0_{T(E)}$ ce qui est contraire à l'hypothèse.

Ainsi : $\gamma > 0$.

$$\forall v \in E, u(v) = \frac{\gamma}{\|x\|^2} \langle x, v \rangle x = \left\langle \frac{\sqrt{\gamma}}{\|x\|} x, v \right\rangle \frac{\sqrt{\gamma}}{\|x\|} x.$$

Posez $y = \frac{\sqrt{\gamma}}{\|x\|} x$. $y \neq 0_E$ et $\forall v \in E, u(v) = \langle y, v \rangle y = u_y(v)$.

Ainsi $\exists y \in E, u = u_y$; mieux $\exists y \in E - \{0_E\}, u = u_y$.

d) Δ Attention ici car l'application en question, que j'noterai ϕ , n'est pas linéaire ne serait-ce que parce que $T(E)$ n'est pas un espace vectoriel !

Observons que ϕ est bien une application de E dans $T(E)$ d'après Q2 et parce que $u_0 = 0_{T(E)} \in T(E)$! Soit $x \in E - \{0_E\}$,

$$\forall v \in E, u_x(v) = \langle x, v \rangle x = -\langle x, v \rangle (-x) = \langle -x, v \rangle (-x) = u_{-x}(v)$$

Ainsi $u_x = u_{-x}$ et $x \neq -x$ car $x \neq 0_E$.

Soit $\phi(x) = \phi(-x)$ avec $x \neq -x$. ϕ n'est pas injective.

Montrons que ϕ est surjective. Soit u un élément quelconque de $T(E)$.

Montrons que : $\exists y \in E, \phi(y) = u$ ou $u_y = u$

Si u n'est pas nul c'est clair d'après c). Si u est nul $y = 0_E$ fait l'affaire.

Ainsi $\forall u \in T(E), \exists y \in E, \phi(y) = u$. ϕ est surjective.

Exercice : Montrons que : $\forall (x, x') \in E^\perp, \phi(x) = \phi(x') \Leftrightarrow x = x'$ ou $x = -x'$... nous y arrivons.

**Partie II Approximation des éléments de $S(E)$
par les éléments de $T(E)$.**

Q1 a) Je rappelle que $\text{Tr} : \mathcal{M}_p(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ est linéaire.
 $A \mapsto \text{Tr}(A)$

Ainsi $\forall (A, B) \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})^2, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \text{Tr}(\lambda A + B) = \lambda \text{Tr}(A) + \text{Tr}(B)$.

On vérifie que : $\forall (f, g) \in \mathcal{L}(E)^2, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \text{Tr}(\lambda f + g) = \lambda \text{Tr}(f) + \text{Tr}(g)$.

Notons que $[\cdot, \cdot]$ est un produit scalaire sur $S(E)$

$\Rightarrow [\cdot, \cdot]$ est une application de $S(E) \times S(E)$ dans $\mathbb{R}$. (1)

$\Rightarrow$ Soit $(f, g, h) \in S(E)^3$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\bullet [\lambda f + g, h] = \text{Tr}((\lambda f + g) \circ h) = \text{Tr}(\lambda f \circ h + g \circ h) = \lambda \text{Tr}(f \circ h) + \text{Tr}(g \circ h) = \lambda [f, h] + [g, h] \quad (2)$$

$$\bullet [f, g] = \text{Tr}(f \circ g) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{cyclicité}}}{=} \text{Tr}(g \circ f) = [g, f] \quad (3)$$

$\bullet$ Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormale de E . Posons $A = (a_{ij}) = \pi_{\mathcal{B}}(f)$.

$$[f, f] = \text{Tr}(f \circ f) = \text{Tr}(A^2) = \sum_{i=1}^p \sum_{k=1}^p a_{ik} a_{ki}.$$

f étant symétrique et la base $\mathcal{B}$ étant orthonormale : A est symétrique ;
donc $\forall (i, j) \in [1, p]^2, a_{ij} = a_{ji}$.

$$[f, f] = \sum_{i=1}^p \sum_{k=1}^p a_{ik} a_{ki} = \sum_{i=1}^p \sum_{k=1}^p a_{ik}^2 = \sum_{i=1}^p \sum_{k=1}^p a_{ik}^2 \geq 0. [f, f] \geq 0 \quad (4)$$

Supposons $[f, f] = 0$; alors $\sum_{i=1}^p \sum_{k=1}^p a_{ik}^2 = 0$ donc $\forall (i, k) \in [1, p]^2, a_{ik}^2 = 0$.

Ainsi $\forall (i, k) \in [1, p]^2, a_{ik} = 0$. $A = 0_{\mathcal{M}_p(\mathbb{R})}$ donc $f = 0_{S(E)}$.

$$\forall f \in S(E), [f, f] = 0 \Rightarrow f = 0_{S(E)} \quad (5)$$

(1), (1'), (3), (4) et (5) montrent que $[\cdot, \cdot]$ est un produit scalaire sur $S(E)$.

$$b) N^2(f - u_k) = N^2(f) - 2[f, u_k] + N^2(u_k) = N^2(f) - 2\text{Tr}(f \circ u_k) + \text{Tr}(u_k \circ u_k).$$

Si u n'est pas nul $\neq 0$ fournit : $\text{Tr}(f \circ u_k) = \langle f(u), u \rangle$ et $\text{Tr}(u_k \circ u_k) = \|u_k\|^4$ et

$$\text{ainsi } N^2(f - u_k) = N^2(f) - 2\langle u, f(u) \rangle + \|u\|^4.$$

$$\text{Si } u = 0 : N^2(f - u_k) = N^2(f) = N^2(f) - 2\langle 0_E, f(0_E) \rangle + \|0_E\|^4 = N^2(f) - 2\langle u, f(u) \rangle + \|u\|^4.$$

$\uparrow$
 $u_k = 0_{\mathcal{L}(E)}$

Finalement $N^2(f - u_x) = N^2(f) - 2\langle x, f(x) \rangle + \|x\|^4$ pour $f \in S(E)$ et $u_x \in T(E)$.

② a) Soit $t \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
 h(t) &= F(x+ty) = N^2(f) - 2\langle x+ty, f(x+ty) \rangle + \|x+ty\|^4 \\
 h(t) &= N^2(f) - 2\langle x, f(x) \rangle - 2t\langle y, f(x) \rangle - 2t\langle x, f(y) \rangle - 2t^2\langle y, f(y) \rangle + (\|x\|^2 + 2t\langle x, y \rangle + t^2\|y\|^2)^2 \\
 \text{Notons que : } \langle y, f(x) \rangle &= \langle x, f(y) \rangle \text{ car } f \text{ est symétrique. N'oublions pas que } \|y\| = 1. \\
 \text{Ainsi } h(t) &= N^2(f) - 2\langle x, f(x) \rangle - 4t\langle y, f(x) \rangle - 2t^2\langle y, f(y) \rangle + \|x\|^4 + 4t^2(\langle x, y \rangle)^2 + t^4 + \\
 &\quad 4t\|x\|^2\langle x, y \rangle + 4t^2\|x\|^2\langle x, y \rangle + 4t^3\langle x, y \rangle + \\
 &\quad \underline{4t^4 + 4\langle x, y \rangle t^3 + 2(2(\langle x, y \rangle)^2 + \|x\|^2 - \langle y, f(y) \rangle)t^2 + 4(\|x\|^2\langle x, y \rangle - \langle y, f(x) \rangle)t} \\
 &\quad \underline{+ \|x\|^4 + N^2(f) - 2\langle x, f(x) \rangle}
 \end{aligned}$$

h est donc une fonction polynôme de degré 4.

b) Supposons que $\forall z \in E, F(x) \leq F(z)$.

Alors $\forall t \in \mathbb{R}, F(x) \leq F(x+ty), \forall t \in \mathbb{R}, h(0) \leq h(t)$.

h présente un minimum en 0 et donc $h'(0) = 0$. (h est dérivable sur $\mathbb{R}$ car t est polynôme)

c) Le résultat obtenu à a) donne sans difficulté $h'(0) = 4(\|x\|^2\langle x, y \rangle - \langle y, f(x) \rangle)$

Ainsi $4(\|x\|^2\langle x, y \rangle - \langle y, f(x) \rangle) = 0$ ou $\|x\|^2\langle x, y \rangle - \langle y, f(x) \rangle = 0$ et ceci

pour tout vecteur unitaire y de E .

$$\forall y \in E, \|y\| = 1 \Rightarrow 0 = \|x\|^2\langle x, y \rangle - \langle y, f(x) \rangle = \langle \|x\|^2x - f(x), y \rangle$$

Soit $(e_1, e_2, \dots, e_p)$ une base orthonormale de E .

$\forall i \in \overline{1, p}$, $\|e_i\| = 1$ donc $\forall i \in \overline{1, p}$, $\|x\|^2x - f(x)$ est orthogonal à e_i .

Ainsi $\|x\|^2x - f(x) \in (\text{Vect}(e_1, e_2, \dots, e_p))^\perp = E^\perp = \{0_E\}$.

$$\forall x \in E, \underline{f(x) = \|x\|^2x}.$$

d) Soit $t \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
 F(x+ty) - F(x) &= h(t) - (N^2(f) - 2\langle x, f(x) \rangle + \|x\|^4) \\
 &= t^4 + 4\langle x, y \rangle t^3 + 2(2(\langle x, y \rangle)^2 + \|x\|^2 - \langle y, f(y) \rangle)t^2 + 4(\|x\|^2\langle x, y \rangle - \langle y, f(x) \rangle)t \\
 &\quad + \|x\|^4 + N^2(f) - 2\langle x, f(x) \rangle - \|x\|^4 + N^2(f) - 2\langle x, f(x) \rangle.
 \end{aligned}$$

En se rappelant que $f(x) = \|x\|^2 x$ nous obtenons :

$$F(x+ty) - F(x) = t^4 + 4\langle x, y \rangle t^3 + 2(2\langle x, y \rangle^2 + \|x\|^2 - \langle y, f(y) \rangle) t^2 \text{ car :}$$

$$4(\|x\|^2 \langle x, y \rangle - \langle y, f(x) \rangle) = 4(\langle \|x\|^2 x - f(x), y \rangle) = 4\langle 0_E, y \rangle = 0.$$

$$\text{Donc } F(x+ty) - F(x) = t^2 [t^2 + 4\langle x, y \rangle t + 4\langle x, y \rangle^2 + 2\|x\|^2 - 2\langle y, f(y) \rangle]$$

$$\text{Ainsi : } F(x+ty) - F(x) = t^2 [(t + 2\langle x, y \rangle)^2 + 2(\|x\|^2 - \langle y, f(y) \rangle)] \text{ pour tout réel } t.$$

③ * Supposons que $F(x) = m(f)$; c'est à dire que F présente un minimum en x .

Alors on a d'abord $f(x) = \|x\|^2 x$.

Soit y un vecteur unitaire de E

$$\forall t \in \mathbb{R}, F(x+ty) \geq F(x) \text{ donc } \forall t \in \mathbb{R}, t^2 [(t + 2\langle y, x \rangle)^2 + 2(\|x\|^2 - \langle y, f(y) \rangle)] \geq 0$$

$$\text{Par conséquent : } \forall t \in \mathbb{R}^*, (t + 2\langle y, x \rangle)^2 + 2(\|x\|^2 - \langle y, f(y) \rangle) \geq 0$$

$$\text{Par continuité : } \forall t \in \mathbb{R}, (t + 2\langle y, x \rangle)^2 + 2(\|x\|^2 - \langle y, f(y) \rangle) \geq 0.$$

$$\text{En faisant } t = -2\langle y, x \rangle \text{ on obtient : } \|x\|^2 - \langle y, f(y) \rangle \geq 0 \text{ ou : } \langle y, f(y) \rangle \leq \|x\|^2.$$

$$\text{Ainsi si } F(x) = m(f) \text{ on a : } \begin{cases} (i) f(x) = \|x\|^2 x \\ (ii) \text{ pour tout vecteur unitaire } y : \langle y, f(y) \rangle \leq \|x\|^2 \end{cases}$$

$$$$

Réciproquement supposons que l'on a (i) et (ii) et montrons que $F(x) = m(f)$.

Il s'agit de prouver que : $\forall z \in E, F(x) \leq F(z)$... ou $\forall z \in E - \{x\}, F(x) \leq F(z)$.

$$\text{Soit } z \in E - \{x\}. \text{ Posons } y = \frac{1}{\|z-x\|} (z-x) \text{ et } t = \|z-x\|.$$

$$\text{Alors } y \text{ est un vecteur unitaire, } t \in \mathbb{R} \text{ et } z = x + ty.$$

(i) donne $f(x) = \|x\|^2 x$ qui donne comme dans ② d) :

$$F(x+ty) - F(x) = t^2 [(t + 2\langle y, x \rangle)^2 + 2(\|x\|^2 - \langle y, f(y) \rangle)]$$

$$\text{Or : } t^2 \geq 0, (t + 2\langle y, x \rangle)^2 \geq 0 \text{ et } 2(\|x\|^2 - \langle y, f(y) \rangle) \geq 0 \text{ grâce à (ii).}$$

$$\text{Ainsi } F(x+ty) - F(x) \geq 0 \text{ donc } F(z) \geq F(x).$$

$$\forall z \in E - \{x\}, F(x) \leq F(z). \text{ } F \text{ présente un minimum en } x ; \underline{F(x) = m(f)}.$$

$$\text{Ainsi } F(x) = m(f) \Leftrightarrow \begin{cases} (i) f(x) = \|x\|^2 x \\ \text{ou} \\ (ii) \text{ pour tout vecteur unitaire } y : \langle y, f(y) \rangle \leq \|x\|^2. \end{cases}$$

Q4) a) f est un endomorphisme symétrique de l'espace vectoriel euclidien E d'ac.
il existe une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_p)$ de E , orthogonale et constituée de vecteurs propres de f .

b) $\pi_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_p \end{pmatrix}$. $\pi_{\mathcal{B}}(f^2) = \begin{pmatrix} \lambda_1^2 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_p^2 \end{pmatrix}$.

$$N(f) = \sqrt{[f, f]} = \sqrt{\text{Tr}(ff)} = \sqrt{\text{Tr}(f^2)} = \sqrt{\sum_{i=1}^p \lambda_i^2} \quad \underline{\underline{N(f) = \sqrt{\sum_{i=1}^p \lambda_i^2}}}$$

c) soit y un vecteur unitaire de E . $\exists (y_1, y_2, \dots, y_p) \in \mathbb{R}^p$, $y = \sum_{i=1}^p y_i e_i$.

$$f(y) = \sum_{i=1}^p y_i f(e_i) = \sum_{i=1}^p y_i \lambda_i e_i.$$

$(e_1, e_2, \dots, e_p)$ étant une base orthogonale: $\langle y, f(y) \rangle = \sum_{i=1}^p y_i (y_i \lambda_i) = \sum_{i=1}^p \lambda_i y_i^2$

$$\langle y, f(y) \rangle = \sum_{i=1}^p \lambda_i y_i^2 \leq \sum_{i=1}^p \lambda_p y_i^2 = \lambda_p \|y\|^2 = \lambda_p \quad \text{car } \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_p \text{ et } \|y\| = 1$$

de plus: $\langle e_p, f(e_p) \rangle = \langle e_p, \lambda_p e_p \rangle = \lambda_p \|e_p\|^2 = \lambda_p$.

donc $\forall y \in E, \|y\| = 1 \Rightarrow \langle y, f(y) \rangle \leq \lambda_p = \langle e_p, f(e_p) \rangle$

Ainsi λ_p est le plus grand élément de $\{\langle y, f(y) \rangle; y \in E \text{ et } \|y\| = 1\}$.

Reprenons un vecteur unitaire $y = \sum_{i=1}^p y_i e_i$ de E . $\langle y, f(y) \rangle = \sum_{i=1}^p \lambda_i y_i^2$ et $\sum_{i=1}^p y_i^2 = 1$

$$\langle y, f(y) \rangle = \lambda_p \Leftrightarrow \sum_{i=1}^p \lambda_i y_i^2 = \lambda_p \Leftrightarrow \sum_{i=1}^p \lambda_i y_i^2 = \sum_{i=1}^p \lambda_p y_i^2 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^p (\lambda_p - \lambda_i) y_i^2 = 0$$

Notons que: $\forall i \in \overline{1, p-1}, (\lambda_p - \lambda_i) y_i^2 \geq 0$.

donc $\langle y, f(y) \rangle = \lambda_p \Leftrightarrow \forall i \in \overline{1, p-1}, (\lambda_p - \lambda_i) y_i^2 = 0$.

doit r le plus petit élément de $\{i \in \overline{1, p-1} \mid \lambda_i = \lambda_p\}$.

$\forall i \in \overline{1, r-1}, \lambda_i < \lambda_p$ et $\forall i \in \overline{r, p}, \lambda_i = \lambda_p$.

$$\langle y, f(y) \rangle = \lambda_p \Leftrightarrow \forall i \in \overline{1, p-1}, (\lambda_p - \lambda_i) y_i^2 = 0 \Leftrightarrow \forall i \in \overline{1, r-1}, y_i = 0$$

$$\langle y, f(y) \rangle = \lambda_p \Leftrightarrow y \in \text{Vect}(e_r, e_{r+1}, \dots, e_p)$$

comme $\forall i \in \overline{r, p}, \lambda_i = \lambda_p$: $\forall i \in \overline{r, p}, e_i \in \text{SEP}(f, \lambda_p)$; $\text{Vect}(e_r, e_{r+1}, \dots, e_p)$ est
certainement dans $\text{SEP}(f, \lambda_p)$. Notons que cette inclusion est une égalité.

• Soit $z = \sum_{i=1}^p z_i e_i$ un élément de E .

$$z \in \text{SEP}(f, \lambda_p) \Leftrightarrow f(z) = \lambda_p z \Leftrightarrow f\left(\sum_{i=1}^p z_i e_i\right) = \lambda_p \sum_{i=1}^p z_i e_i \Leftrightarrow \sum_{i=1}^p z_i f(e_i) = \lambda_p \sum_{i=1}^p z_i e_i$$

$$z \in \text{SEP}(f, \lambda_p) \Leftrightarrow \sum_{i=1}^p z_i \lambda_i e_i = \sum_{i=1}^p \lambda_p z_i e_i \Leftrightarrow \forall i \in \{1, p\}, z_i \lambda_i = \lambda_p z_i \Leftrightarrow \forall i \in \{1, p\}, (\lambda_i - \lambda_p) z_i = 0$$

$$z \in \text{SEP}(f, \lambda_p) \Leftrightarrow \forall i \in \{1, p\}, z_i = 0 \Leftrightarrow z \in \text{Vect}(e_1, e_2, \dots, e_p). \quad \text{SEP}(f, \lambda_p) = \text{Vect}(e_1, \dots, e_p).$$

$$\begin{cases} \lambda_i \cdot \lambda_p = 0 \text{ si } i \in \{1, p\} \\ \lambda_i \cdot \lambda_p < 0 \text{ si } i \in \{1, p-1\} \end{cases}$$

donc $\{y \in E \mid \|y\| = 1 \text{ et } \langle y, f(y) \rangle = \lambda_p\} = \{y \in E \mid \|y\| = 1 \text{ et } f(y) = \lambda_p y\}.$

(95) a) Supposons $\lambda_p \leq 0$. $\sup \{ \langle y, f(y) \rangle \mid y \in E \text{ et } \|y\| = 1 \} = \lambda_p \leq 0$.

Alors $\forall y \in E, \|y\| = 1 \Rightarrow \langle y, f(y) \rangle \leq 0$.

• Supposons $x = 0_E$. Alors $f(x) = \|x\|^2 x$ et pour tout vecteur unitaire y ,

$$\langle y, f(y) \rangle \leq 0 = \|x\|^2.$$

donc (i) et (ii) sont vérifiées et ainsi $F(x) = m(f)$.

• Réciproquement, supposons que l'on ait $F(x) = m(f)$.

$f(x) = \|x\|^2 x$. Supposons x non nul. $\|x\|^2$ est alors une valeur propre de f strictement positive. Ceci implique $\lambda_p \leq 0$.

Ainsi $F(x) = m(f)$ donne $x = 0_E$.

Si $\lambda_p \leq 0$, alors $F(x) = m(f)$ n'est nullement si x est nul.

b) $\lambda_p > 0$. Soit x un élément de E .

Remarquons que $\sup \{ \langle y, f(y) \rangle \mid y \in E \text{ et } \|y\| = 1 \} = \lambda_p$.

Ainsi (ii) $\Leftrightarrow \lambda_p \leq \|x\|^2$.

$F(x) = m(f) \Leftrightarrow$ (i) et (ii) $\Leftrightarrow f(x) = \|x\|^2 x$ et $\lambda_p \leq \|x\|^2$. Notons que $\lambda_p > 0$.

$F(x) = m(f) \Leftrightarrow \lambda_p \leq \|x\|^2$ et x est un vecteur propre de f associé à la valeur propre $\|x\|^2$. λ_p étant la plus grande valeur propre de f il vient :

$$F(x) = m(f) \Leftrightarrow \lambda_p = \|x\|^2 \text{ et } x \in \text{SEP}(f, \lambda_p) \Leftrightarrow x \in \text{SEP}(f, \lambda_p) \text{ et } \|x\| = \sqrt{\lambda_p}.$$

Soit x un élément de $SEP(f, \lambda_p)$ tel que: $\|x\| = \sqrt{\lambda_p}$. (de toute évidence un tel élément existe!).

$$F(x) = N^2(f) - 2\langle x, f(x) \rangle + \|x\|^4 = N^2(f) - 2\langle x, \lambda_p x \rangle + \lambda_p^2 = N^2(f) - 2\lambda_p \|x\|^2 + \lambda_p^2$$

$$F(x) = N^2(f) - 2\lambda_p^2 + \lambda_p^2 = N^2(f) - \lambda_p^2 = \sum_{i=1}^p \lambda_i^2 - \lambda_p^2 = \sum_{i=1}^{p-1} \lambda_i^2.$$

6 Ainsi $m(f) = N^2(f) - \lambda_p^2 = \sum_{i=1}^{p-1} \lambda_i^2$ et $\forall x \in E, F(x) = m(f) \Leftrightarrow \begin{cases} x \in SEP(f, \lambda_p) \\ \text{et} \\ \|x\| = \sqrt{\lambda_p} \end{cases}$

Q6 a) Posons $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_p \end{pmatrix} = \pi X$.

$$\forall i \in \{1, \dots, p\}, y_i = \sum_{j=1}^p m_{ij} x_j \neq 1 = \sum_{j=1}^p m_{ij} = 1. \quad \pi X = X \text{ et } X \neq 0_{\pi, m(\pi)}.$$

2 donc λ est une valeur propre de π et $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre associé.

b) $\pi X = \lambda X$ donne: $\sum_{j=1}^p m_{ij} x_j = \lambda x_i$.

$$|\lambda| \|x\| = |\lambda x_i| = \left| \sum_{j=1}^p m_{ij} x_j \right| \leq \sum_{j=1}^p |m_{ij}| |x_j| \leq \|x\| \sum_{j=1}^p |m_{ij}| \stackrel{m_{ij} > 0}{=} \|x\| \sum_{j=1}^p m_{ij} = \|x\| \quad (*)$$

$\|x\| = \max(|x_1|, |x_2|, \dots, |x_p|) \neq 0$ car $X \neq 0$

Ainsi $|\lambda| \|x\| \leq \|x\|$ avec $\|x\| = \max(|x_1|, |x_2|, \dots, |x_p|) \neq 0$ car $X \neq 0$.

3 donc $|\lambda| \leq 1$.

Supposons $|\lambda| = 1$ et reprenons la ligne (*)

$$\|x\| = 1 \wedge \|x\| = |\lambda| \|x\| = \left| \sum_{j=1}^p m_{ij} x_j \right| \leq \sum_{j=1}^p |m_{ij}| |x_j| \leq \|x\| \sum_{j=1}^p |m_{ij}| = \|x\| \sum_{j=1}^p m_{ij} = \|x\|$$

Ainsi: $\|x\| = \left| \sum_{j=1}^p m_{ij} x_j \right| = \sum_{j=1}^p |m_{ij}| |x_j| = \sum_{j=1}^p |m_{ij} x_j|$

donc $\|x\| = \left| \sum_{j=1}^p m_{ij} x_j \right| = \sum_{j=1}^p |m_{ij} x_j|$.

En particulier pour tout j dans $\{1, \dots, p\}$, $m_{i1} x_1, m_{i2} x_2, \dots, m_{ip} x_p$ ont même signe; donc $x_1, x_2, \dots, x_p$ ont même signe ($\forall j \in \{1, \dots, p\}, m_{ij} > 0$).

Posons $\varepsilon = 1$ si $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_p \geq 0$ et $\varepsilon = -1$ si $x_1 \leq 0, x_2 \leq 0, \dots, x_p \leq 0$

Ainsi $\|x\| = \left| \sum_{j=1}^p m_{ij} x_j \right| = \left| \sum_{j=1}^p m_{ij} \varepsilon |x_j| \right| = |\varepsilon| \sum_{j=1}^p m_{ij} |x_j| = \sum_{j=1}^p m_{ij} |x_j|$

donc $\|x\| = \sum_{j=1}^p m_{ij} |x_j|$ $|\varepsilon| = 1$ et $\sum_{j=1}^p m_{ij} |x_j| \geq 0$

$$\text{Ainsi } 0 = \sum_{j=1}^p m_{ij} |x_j| - |x_i| = \sum_{j=1}^p m_{ij} |x_j| - \underbrace{\left(\sum_{j=1}^p m_{ij} \right) |x_i|}_{=1} = \sum_{j=1}^p m_{ij} (|x_j| - |x_i|)$$

$$\text{On a encore : } \sum_{j=1}^p m_{ij} (|x_i| - |x_j|) = 0 \text{ et } \forall j \in \llbracket 1, p \rrbracket, m_{ij} (|x_i| - |x_j|) \geq 0.$$

$$\text{Donc } \forall j \in \llbracket 1, p \rrbracket, m_{ij} (|x_i| - |x_j|) = 0 \text{ et } m_{ij} > 0.$$

$$\text{Ainsi } \forall j \in \llbracket 1, p \rrbracket, |x_i| - |x_j| = 0. \quad \forall j \in \llbracket 1, p \rrbracket, |x_j| = |x_i|.$$

$$\forall j \in \llbracket 1, p \rrbracket, \exists x_j = \varepsilon x_i. \quad \forall j \in \llbracket 1, p \rrbracket, x_j = x_i$$

$$\text{Ainsi } X = x_i \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Donc } \lambda X = \pi X = x_i \pi \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = x_i \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = X; \quad (\lambda - 1) X = 0 \text{ et } X \neq 0. \quad \underline{\underline{\lambda = 1.}}$$

$$\text{Nous avons aussi montré que } \forall X \in \pi_{p,1}(\mathbb{R}), X \neq 0 \text{ et } \pi X = X \Rightarrow X \in \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

$$\text{Donc } \text{SEP}(\pi, 1) \subset \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right). \quad \text{Ceci donne aussi dim SEP}(\pi, 1) \leq 1.$$

$$\text{Comme dim SEP}(\pi, 1) \geq 1 \quad (\text{SEP}(\pi, 1) \neq \{0\}) \quad \underline{\underline{\text{dim SEP}(\pi, 1) = 1.}}$$

$$\text{Nous avons : } \underline{\underline{\text{SEP}(\pi, 1) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right).}}$$

c) ce qui précède montre que $\lambda_p = 1$; en effet 1 est valeur propre de f et toute valeur propre de f a une valeur absolue inférieure ou égale à 1.

Nous avons $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_{p-1} < \lambda_p = 1$ car le sous-espace propre associé à la valeur propre 1 est de dimension 1.

$$\text{Ainsi } \forall x \in \mathbb{R}^p, F(x) = m(f) \Leftrightarrow \begin{cases} \|x\| = \sqrt{\lambda_p} = 1 \\ x \in \text{SEP}(f, \lambda_p) = \text{SEP}(f, 1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \|x\| = 1 \\ x \in \text{SEP}(f, 1) \end{cases}.$$

$$\text{Notons que } \|(1, 1, \dots, 1)\| = \sqrt{\sum_{i=1}^p 1^2} = \sqrt{p}.$$

$$\text{Ainsi les vecteurs unitaires de SEP}(f, 1) \text{ sont } \frac{1}{\sqrt{p}} (1, 1, \dots, 1) \text{ et } -\frac{1}{\sqrt{p}} (1, 1, \dots, 1).$$

$$\underline{\underline{\forall x \in \mathbb{R}^p, F(x) = m(f) \Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt{p}} (1, 1, \dots, 1) \text{ ou } x = -\frac{1}{\sqrt{p}} (1, 1, \dots, 1).}}$$

doit être un élément de $T(E)$. $\exists x \in E$, $u = u_x$.

$$m(f) = N^2(f \cdot u) \Leftrightarrow m(f) = N^2(f \cdot u_x) \Leftrightarrow F(x) = m(f) \Leftrightarrow x = \pm \frac{1}{\sqrt{p}} (1, 1, \dots, 1).$$

Posons : $a = \frac{1}{\sqrt{p}} (1, 1, \dots, 1)$ et notons que : $x = \pm \frac{1}{\sqrt{p}} (1, 1, \dots, 1) \Leftrightarrow u_x = u_a$, c'est

à dire que $x = a$ ou $x = -a \Leftrightarrow u_x = u_0$

C.N. $\Rightarrow$ c'est clair car $u_a = u_{-a}$

C.S. $\Leftarrow$ Supposons $u_x = u_a$. $\forall y \in E$, $\langle x, y \rangle_x = \langle a, y \rangle_a$. En faisant $y = a$ on obtient :

$$\langle x, a \rangle_x = \langle a, a \rangle_a = \|a\|^2_a = 1.$$

Comme a n'est pas nul, $\langle x, a \rangle$ est différent de 0 et : $x = \alpha a$ avec $\alpha = \frac{1}{\langle x, a \rangle}$.

$$[\langle x, a \rangle = 0 \Rightarrow \langle x, a \rangle_x = 0 \Rightarrow a = 0_E]$$

Alors $\forall y \in E$, $\langle \alpha a, y \rangle_{\alpha a} = \langle a, y \rangle_a$.

$$\forall y \in E, \alpha^2 \langle a, y \rangle_a = \langle a, y \rangle_a. \quad \alpha^2 \langle a, a \rangle_a = \langle a, a \rangle_a. \quad \alpha^2 \|a\|^2_a = \|a\|^2_a$$

Donc $\alpha^2 = 1$ car $\|a\|^2_a \neq 0_E$. $\alpha = \pm 1$. $x = \pm a$.

Ainsi $m(f) = N^2(f \cdot u) \Leftrightarrow x = a$ ou $x = -a \Leftrightarrow u_x = u_a \Leftrightarrow u = u_a$.

L'unique automorphisme u appartenant à $T(E)$ tel que $m(f) = N^2(f \cdot u)$ est $u_{\frac{1}{\sqrt{p}}(1, 1, \dots, 1)}$.

Soit $y = (y_1, y_2, \dots, y_p)$ un élément de $\mathbb{R}^p$. Rappelons que l'on a posé $a = \frac{1}{\sqrt{p}} (1, 1, \dots, 1)$.

$$u_{\frac{1}{\sqrt{p}}(1, 1, \dots, 1)}(y_1, y_2, \dots, y_p) = \langle y, a \rangle_a = \frac{1}{\sqrt{p}} (y_1 + y_2 + \dots + y_p) \times \frac{1}{\sqrt{p}} (1, 1, \dots, 1)$$

$$u_{\frac{1}{\sqrt{p}}(1, 1, \dots, 1)}(y_1, y_2, \dots, y_p) = \frac{1}{p} (y_1 + y_2 + \dots + y_p, y_1 + y_2 + \dots + y_p, \dots, y_1 + y_2 + \dots + y_p)$$

Ainsi la matrice de u_a dans la base canonique est $\frac{1}{p} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$.

Posons $D = \text{Vect}(a)$.

$E = D \oplus D^\perp$. Soit $y \in E$. $y = y_1 + y_2$ avec $y_1 \in D$ et $y_2 \in D^\perp$. $\exists \alpha_y \in \mathbb{R}$, $y_1 = \alpha_y a$.

$$u_a(y) = u_a(y_1) + u_a(y_2) = \underbrace{\langle a, y_1 \rangle_a}_{=0} a + \langle a, y_2 \rangle_a y_2 = \langle a, y_1 \rangle_a = \langle a, \alpha_y a \rangle_a = \alpha_y \|a\|^2_a = \alpha_y a = y_1.$$

$$\|a\| = 1$$

Ainsi u_a est la projection orthogonale de E sur $D = \text{Vect}(a)$.

La matrice précédente est donc la matrice dans la base canonique de $E = \mathbb{R}^p$ de la projection orthogonale de E sur $D = \text{Vect}(a)$.