PARTIE I

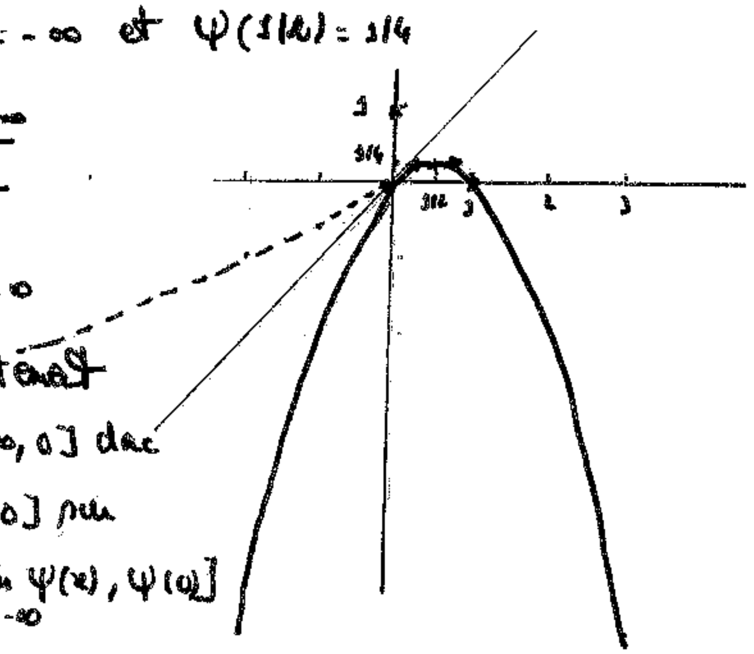
Q1 Etude d'une fonction auxiliaire..

a) φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $\varphi'(x) = 1 - 2x$.

φ est strictement croissante (resp. strictement décroissante) sur $]-\infty, \frac{1}{2}]$ (resp. $[\frac{1}{2}, +\infty[$).

$\lim\limits_{x \to +\infty} \varphi(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \varphi(x) = -\infty$ et $\varphi(1/2) = 1/4$

x	$-\infty$		$1/2$		$+\infty$
$\varphi'(x)$		$+$	0	$-$	
$\varphi(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$1/4$	$\searrow$	$-\infty$



b) φ est continue et strictement croissante sur l'intervalle $]-\infty, 0]$ donc φ induit une bijection de $]-\infty, 0]$ sur l'intervalle $\varphi(]-\infty, 0]) =]\lim\limits_{x \to -\infty} \varphi(x), \varphi(0)]$

$\lim\limits_{x \to -\infty} \varphi(x) = -\infty$ et $\varphi(0) = 0$

Ainsi φ induit une bijection de $]-\infty, 0]$ sur $]-\infty, 0]$.

c) Notons ψ la bijection réciproque correspondante. ψ est strictement croissante sur $]-\infty, 0]$

Remarque.. ψ est continue et même dérivable sur $]-\infty, 0]$ ($\forall x \in]-\infty, 0]$, $\varphi'(x) \neq 0$)

Notons aussi que: $\forall x \in]-\infty, 0]$, $\psi(x) = \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - x}$.

Q2 Etude d'une suite définie par récurrence.

a) • $x_1 < 0$ et $x_1 - x_1^2 = -2$ donc $x_1 < 0$ et $2 = x_1^2 - x_1 = (x_1 - \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4}$

$x_1 < 0$ et $(x_1 - \frac{1}{2})^2 = \frac{9}{4}$. $x_1 < 0$ et $x_1 - \frac{1}{2} = \pm \frac{3}{2}$.

$x_1 < 0$ et $x_1 = 2$ ou -1. $x_1 = -1$.

• $x_2 < 0$ et $x_2 - x_2^2 = -1$ donc $x_2 < 0$ et $(x_2 - \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4} = 1$

$x_2 < 0$ et $x_2 - \frac{1}{2} = \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$. $x_2 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}$.

Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$ x_n est défini et strictement négatif.

- C'est clair pour $n=0$
- Supposons la propriété vraie pour $n-1$ ($n \in \mathbb{N}^*$) et montrons la pour n.

Il s'agit de montrer qu'il existe un réel strictement négatif x_n et un seul tel que $x_n - x_n^2 = x_{n-1}$ ou $\varphi(x_n) = x_{n-1}$.

L'hypothèse de récurrence indique que : $x_{n-1} < 0$, donc $x_{n-1} \in]-\infty, 0]$.

Ainsi $\exists!\, x_n \in]-\infty, 0]$, $\varphi(x_n) = x_{n-1}$ d'après Q1.

En fait $\exists!\, x_n \in]-\infty, 0[$, $\varphi(x_n) = x_{n-1}$ car $\varphi(0) = 0$.

Ceci achève la récurrence.

<u>Pour tout entier naturel n le nombre réel x_n est bien (sic) défini de manière unique à partir de x_{n-1} ... si $n \geq 1$!!</u>

<u>Remarque</u>.. $x_0 = -2$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $x_n = \varphi(x_{n-1}) = \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - x_{n-1}}$

<u>b)</u> Montrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n \leq x_{n+1}$.

- C'est clair pour $n=0$ car $x_0 = -2$ et $x_1 = -1$.
- Supposons la propriété vraie pour n ($n \in \mathbb{N}$) et montrons la pour $n+1$.

$x_n \leq x_{n+1}$ (≤ 0) et φ est croissante sur $]-\infty, 0]$ donc

$x_{n+1} = \varphi(x_n) \leq \varphi(x_{n+1}) = x_{n+2}$ ce qui achève la récurrence.

$(x_n)_{n \geq 0}$ est croissante et majorée par 0 donc $(x_n)_{n \geq 0}$ converge.

Notons ℓ sa limite. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $x_n - x_n^2 = x_{n-1}$ donc $\ell - \ell^2 = \ell$; $\ell^2 = 0$; $\ell = 0$

<u>$(x_n)_{n \geq 0}$ est croissante et converge vers 0.</u>

$\forall n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n} (x_{k+1} - x_k) = x_{n+1} - x_0 = x_{n+1} + 2$. $\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k = \lim_{n \to +\infty} (x_{n+1} + 2) = 2$.

Ainsi la série de terme général u_n converge et $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = 2$.

$\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = x_{n+1} - x_n \geq 0$. $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = \ln(1 + u_n) \geq 0$.

$\lim_{n \to +\infty} u_n = \lim (x_{n+1} - x_n) = 0 - 0 = 0$ donc $v_n \underset{n \to +\infty}{\sim} u_n$.

La convergence de la série de terme général u_n et les règles de comparaison des séries à termes positifs montre que la série de terme général v_n converge.

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\ln x \leq x-1$. Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = \ln(1+u_n) \leq (1+u_n)-1 = u_n$.

Ainsi $\sum_{n=0}^{+\infty} v_n \leq \sum_{n=0}^{+\infty} u_n = 2$.

La série de terme général v_n converge et $\sum_{n=0}^{+\infty} v_n \leq 2$.

$\forall n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^{n} v_k = \sum_{k=0}^{n} \ln(1+u_k) = \ln\left(\prod_{k=0}^{n}(1+u_k)\right) = \ln \omega_n$. $\forall n \in \mathbb{N}$, $\omega_n = e^{\sum_{k=0}^{n} v_k}$

Ainsi $\lim\limits_{n \to +\infty} \omega_n = e^{\sum_{k=0}^{+\infty} v_k}$.

$\forall n \in \mathbb{N}$, $\omega_n > 0$ et $\frac{\omega_{n+1}}{\omega_n} = 1+u_{n+1} \geq 1$; la suite $(\omega_n)_{n\geq 0}$ est croissante

Ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} \omega_n \geq \omega_0 = 1+u_0 = 1+x_1-x_0 = 1+(-1)-(-2) = 2$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} \omega_n = e^{\sum_{n=0}^{+\infty} v_n} \leq e^2 \leq 9$

Par conséquent la $(\omega_n)_{n\geq 0}$ converge et $2 \leq \lim\limits_{n\to+\infty} \omega_n \leq 9$

PARTIE II

(Q1) a) Soit $t \in [x_n, x_{n+1}]$ avec $n \in \mathbb{N}^*$.

$t \in [\varphi(x_{n-1}), \varphi(x_n)]$ donc par croissance de ψ sur $]-\infty, 0]$ on obtient

$t - t^2 = \psi(t) \in [\psi(\varphi(x_{n-1})), \psi(\varphi(x_n))] = [x_{n-1}, x_n]$.

Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall t \in [x_n, x_{n+1}]$, $t - t^2 \in [x_{n-1}, x_n]$.

b) Soit $t \in [x_1, x_2]$. $t \in [-1, 0]$ car $x_1 = -1$.

Ainsi $F'(t) = F(t-t^2)$. Or si $t \in [x_1, x_2]$, $t - t^2 \in [x_0, x_1] = [-2, -1]$

Donc $F'(t) = F(t-t^2) = f(t-t^2)$.

Par conséquent : $\forall t \in [x_1, x_2]$, $F'(t) = f(t-t^2)$.

$\forall x \in [x_1, x_2]$, $F(x) - F(x_1) = \int_{x_1}^{x} F'(t)\,dt = \int_{x_1}^{x} f(t-t^2)\,dt$. Or $F(x_1) = F(-1) = f(-1) = f(x_1)$

$\forall x \in [x_1, x_2]$, $F(x) = f(x_1) + \int_{x_1}^{x} f(t-t^2)\,dt$.

c) Soit $n\in\mathbb{N}^*-\{1\}$. Soit $t\in[x_n,x_{n+1}]$, $t\in[-1,0]$ et $F'(t)=F(t-t^2)$.

Ainsi $\forall x\in[x_n,x_{n+1}]$, $F(x)-F(x_n)=\int_{x_n}^{x}F'(t)\,dt=\int_{x_n}^{x}F(t-t^2)\,dt$

$\forall x\in[x_n,x_{n+1}]$, $F(x)=F(x_n)+\int_{x_n}^{x}F(t-t^2)\,dt$ pour $n\in[\![2,+\infty[\![$ et même pour $n\in[\![1,+\infty[\![$.

Rappelons que si $t\in[x_n,x_{n+1}]$, $t-t^2\in[x_{n-1},x_n]$.

Ainsi si l'on connaît F sur $[x_{n-1},x_n]$, on connaît $t\mapsto F(t-t^2)$ sur $[x_n,x_{n+1}]$ ce qui suffit à calculer $F(x)$ pour tout $x\in[x_n,x_{n+1}]$ d'après la formule précédente (puisque $F(x_n)$ est connu).

Ainsi si $n\in[\![2,+\infty[\![$ (et même $[\![1,+\infty[\![$) la connaissance de F sur $[x_{n-1},x_n]$ détermine F sur $[x_n,x_{n+1}]$.

d) $\forall n\in\mathbb{N}$, $x_0=-2\le x_n<0$ donc $\forall n\in\mathbb{N}$, $[x_n,x_{n+1}]\subset[-2,0[$.

Ainsi $I=\bigcup_{n=0}^{+\infty}[x_n,x_{n+1}]\subset[-2,0[$.

Soit $\lambda\in[-2,0[$ comme $\lim_{n\to+\infty}x_n=0$, $\exists p\in\mathbb{N},\forall n\in[\![p,+\infty[\![$, $|x_n|<|\lambda|=-\lambda$

Soit $n\in[\![p,+\infty[\![$. $-x_n\le|x_n|<-\lambda$; $\lambda<x_n$; $\lambda\in[-2,x_n\ \subset[x_0,x_n]\subset I$

$\forall\lambda\in[-2,0[$, $\lambda\in I$. $[-2,0[\subset I$

Finalement $I=[-2,0[$.

Soient F et G deux fonctions solutions du problème P_0.

Montrons que $F=G$. Montrons tout d'abord que $\forall x\in I$, $F(x)=G(x)$.

Pour cela montrons que $\forall n\in\mathbb{N}$, $\forall x\in[x_n,x_{n+1}]$, $F(x)=G(x)$... par récurrence.

- C'est clair pour $n=0$ car $\forall x\in[x_0,x_1]=[-2,-1]$, $F(x)=f(x)=G(x)$.
- Supposons la propriété vraie pour $n-1$ ($n\in\mathbb{N}^*$) et montrons-la pour $n+1$.

Si $t\in[x_n,x_{n+1}]$, $t-t^2\in[x_{n-1},x_n]$ et alors $F(t-t^2)=G(t-t^2)$.

Ainsi $F(x)=F(x_n)+\int_{x_n}^{x}F(t-t^2)\,dt=G(x_n)+\int_{x_n}^{x}G(t-t^2)\,dt=G(x)$ pour tout $x\in[x_n,x_{n+1}]$

Ceci achève la récurrence.

Par conséquent $\forall n\in\mathbb{N}$, $\forall x\in[x_n,x_{n+1}]$, $F(x)=G(x)$ donc $\forall x\in I=[-2,0[$, $F(x)=G(x)$.

de plus F et G sont continues en 0.

Ainsi $F(0) = \lim\limits_{x \to 0^-} F(x) \underset{\substack{\uparrow \\ \forall x \in [-1,0[,\ F(x)=G(x)}}{=} \lim\limits_{x \to 0^-} G(x) = G(0)$.

Finalement : $\forall x \in [-1,0]$, $F(x) = G(x)$; $F = G$. P_0 admet au plus une solution.

(Q2) Existence d'une solution F.

a) Montrons par récurrence que pour tout n dans $\mathbb{N}$, F est de classe C^1 sur $[x_n, x_{n+1}]$.

* C'est clair pour $n=0$ car $\forall x \in [x_0, x_1] = [-2,-1]$, $F(x) = f(x)$ et f est de classe C^1 sur $[-2,-1]$.

* Supposons que F est de classe C^1 sur $[x_{n-1}, x_n]$ pour n dans $\mathbb{N}^*$ et montrons que F est de classe C^1 sur $[x_n, x_{n+1}]$.

Notons F_n la restriction de F à $[x_n, x_{n+1}]$. F_n est une application de $[x_n, x_{n+1}]$ et $\forall x \in [x_n, x_{n+1}]$, $F_n(x) = F(x_n) + \int_{x_n}^{x} F(t-t^2)\,dt$.

Posons encore $\forall t \in [x_n, x_{n+1}]$, $u(t) = \varphi(t) = t - t^2$. u est continue sur $[x_n, x_{n+1}]$ et prend ses valeurs dans $[x_{n-1}, x_n]$ ($\varphi([x_n, x_{n+1}]) = [\varphi(x_n), \varphi(x_{n+1})] = [x_{n-1}, x_n]$).

L'hypothèse de récurrence indique que F est continue sur $[x_{n-1}, x_n]$. Ainsi $F \circ u$ est continue sur $[x_n, x_{n+1}]$ donc $x \mapsto \int_{x_n}^{x} F(u(t))\,dt$ est dérivable sur $[x_n, x_{n+1}]$.

Par conséquent F_n est dérivable sur $[x_n, x_{n+1}]$ et $\forall x \in [x_n, x_{n+1}]$, $F_n'(x) = F(x - x^2) = F(u(x))$.

Nous avons dit plus haut que $F \circ u$ est continue sur $[x_n, x_{n+1}]$ donc F_n' aussi.

Finalement F_n est de classe C^1 sur $[x_n, x_{n+1}]$ et $\forall x \in [x_n, x_{n+1}]$, $F_n'(x) = F(x - x^2)$.

Ceci permet alors de dire que F est de classe C^1 sur $[x_n, x_{n+1}]$.

mieux on a :
- F continue et dérivable en tout point de $]x_n, x_{n+1}[$
- F continue et dérivable à droite (resp. à gauche) en x_n (resp. x_{n+1})
- $\forall x \in]x_n, x_{n+1}[$, $F'(x) = F(x - x^2)$; $F'_d(x_n) = F(x_n - x_n^2) = F(x_{n-1})$; $F'_g(x_{n+1}) = F(x_{n+1} - x_{n+1}^2) = F(x_n)$.
- F' continue en tout point de $]x_n, x_{n+1}[$
- $F'_d(x_n) = \lim\limits_{x \to x_n^+} F'(x)$ et $F'_g(x_{n+1}) = \lim\limits_{x \to x_{n+1}^-} F'(x)$

ceci achève très élégamment la récurrence.

Pour tout n dans $\mathbb{N}$, F est de classe C^1 sur $[x_n,x_{n+1}]$.

$\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\forall x\in]x_n,x_{n+1}[$, $F'(x)=F(x-x^2)$. $\forall x\in]x_0,x_1[$, $F'(x)=f(x)$.

$\forall n\in\mathbb{N}^*$, $F'_d(x_n)=F(x_n-x_n^2)=F(x_{n-1})$ et $F'_g(x_{n+1})=F(x_{n+1}-x_{n+1}^2)=F(x_n)$.

$F'_d(x_0)=f'(x_0)=f'(-2)$ et $F'_g(x_1)=f'(x_1)=f'(-1)$.

Démontrons que F est de classe C^1 sur $I=[-2,0[=\bigcup_{n=0}^{+\infty}[x_n,x_{n+1}]$

Soit x un élément de I

1er cas.. $\exists n\in\mathbb{N}$, $x\in]x_n,x_{n+1}[$. comme F est de classe C^1 sur $[x_n,x_{n+1}]$, F est dérivable et de dérivée continue en x.

2e cas.. $\exists n\in\mathbb{N}$, $x=x_n$.

a) $n=0$. $x=-2$. $\forall t\in[-2,-1]$, $F(t)=f(t)$; ainsi F est dérivable et de dérivée continue en -2.

b) $n\in\mathbb{N}^*$. F est de classe C^1 sur $[x_{n-1},x_n]$ et $[x_n,x_{n+1}]$

Donc F est dérivable à droite et à gauche en x_n.

$F'_d(x_n)=F(x_n-x_n^2)=F(x_{n-1})$

Si $n-1\geq 1$ $F'_g(x_n)=F'_g(x_{(n-1)+1})=F(x_n-x_n^2)=F(x_{n-1})=F'_d(x_n)$ et F est dérivable en x_n

Si $n-1=0$ alors $x_n=x_1=-1$. $F'_d(x_n)=F(x_{n-1})=F(x_0)=f(-2)$.

$\forall t\in[-2,-1]$, $F(t)=f(t)$ donc $F'_g(x_n)=F'_g(-1)=f'(-1)\underset{\uparrow}{=}f(-2)=F'_d(x_n)$

F est donc encore dérivable en x_n. hypothèse sur f

Il ne reste plus qu'à prouver que F' est continue en x_n.

F est C^1 sur $[x_n,x_{n+1}]$ donc $F'(x_n)=F'_d(x_n)=\lim_{x\to x_n^+}F'(x)$; F' est continue à droite en x_n.

F est C^1 sur $[x_{n-1},x_n]$ donc $F'(x_n)=F'_g(x_n)=\lim_{x\to x_n^-}F'(x)$; F' est continue à gauche en x_n.

Finalement F est dérivable et de dérivée continue en x_n.

Ainsi F est dérivable en tout point de I et F' est continue en tout point de I.

F est de classe C^1 sur I.

b) $\forall x\in[x_1,x_2]$, $F'(x)=F(x-x^2)=f(x-x^2)$ car $\forall x\in[x_1,x_2]$, $x-x^2\in[x_0,x_1]=[-2,-1]$.

De plus f est positive sur $[-2,-1]$. Donc $\forall x\in[x_1,x_2]$, $F'(x)\geq 0$.

<u>F est croissante sur $[x_1, x_2]$.</u>

Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in [x_n, x_{n+1}]$, $F(x) \geq 0$.

- C'est clair pour $n=0$ car $\forall x \in [x_0, x_1] = [-2,-1]$, $F(x) = f(x) \geq 0$.
- Supposons la propriété vraie pour $n-1$ $(n \in \mathbb{N}^*)$ et montrons-la pour n

$\forall x \in [x_n, x_{n+1}]$, $F'(x) = F(x-x^2)$ et $\forall x \in [x_n, x_{n+1}]$, $x - x^2 \in [x_{n-1}, x_n]$.

Comme F est positive sur $[x_{n-1}, x_n]$, F' est positive sur $[x_n, x_{n+1}]$.

Ainsi F est croissante sur $[x_n, x_{n+1}]$. $\forall x \in [x_n, x_{n+1}]$, $F(x) \geq F(x_n) \geq 0$.

$\uparrow x_n \in [x_{n-1}, x_n]$

Ceci achève alors la récurrence.

Soit $x \in [-1, 0[$. $\exists n \in \mathbb{N}^*$, $x \in [x_n, x_{n+1}]$. $F'(x) = F(x - x^2) \geq 0$

$\uparrow x - x^2 \in [x_{n-1}, x_n]$

Donc $\forall x \in [-1, 0[$, $F'(x) \geq 0$.

<u>F est croissante sur $[-1, 0[$.</u>

c) Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in [-2, x_{n+1}]$, $0 \leq F(x) \leq M\omega_n/2$.

- C'est clair pour $n=0$ car $\forall x \in [-2, x_{0+1}] = [-2,-1]$, $0 \leq f(x) = F(x) \leq M = \frac{M\omega_0}{2}$

$\omega_0 = 1 + u_0 = 1+1 = 2$

- Supposons la propriété vraie pour $n-1$ $(n \in \mathbb{N}^*)$ et montrons-la pour n. Ainsi $\forall x \in [-2, x_n]$, $0 \leq F(x) \leq M\omega_{n-1}/2$.

A fortiori $\forall x \in [-2, x_n]$, $0 \leq F(x) \leq M\omega_n/2$ car $M \geq 0$ et $\omega_{n-1} \leq \omega_n$

$(\omega_n = \omega_{n-1}(1+u_n)$, $\omega_{n-1} \geq 0$ et $1 + u_n \geq 1)$

Il reste plus qu'à montrer que : $\forall x \in [x_n, x_{n+1}]$, $0 \leq F(x) \leq M\omega_n/2$.

Soit $x \in [x_n, x_{n+1}]$. Par croissance $F(x) \geq F(x_n) \geq 0$.

$$F(x) = F(x_n) + \int_{x_n}^{x} F(t-t^2)\,dt \leq F(x_n) + \int_{x_n}^{x} M\omega_{n-1}/2 \, dt = F(x_n) + \frac{M\omega_{n-1}(x-x_n)}{2}$$

$$F(x) \leq F(x_n) + \frac{M\omega_{n-1}(x_{n+1}-x_n)}{2} \leq \frac{M\omega_{n-1}}{2} + \frac{M\omega_{n-1}u_n}{2} = \frac{M\omega_{n-1}(1+u_n)}{2} = \frac{M\omega_n}{2}$$

Ainsi s'achève la récurrence.

<u>$\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in [-2, x_{n+1}]$, $0 \leq F(x) \leq M\omega_n/2$.</u>

$(\omega_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite croissante qui converge et dont la limite est inférieure à 9.
Ainsi $\forall n\in\mathbb{N}$, $\forall x\in[-1,x_{n+1}]$, $0\leq F(x)\leq \frac{9\pi}{2}$.

F est majorée par $\frac{9\pi}{2}$ sur $[-1,x_{n+1}]$ pour tout n dans $\mathbb{N}$ donc F est majorée par $\frac{9\pi}{2}$ sur I.

Ainsi <u>F est majorée sur $I=[-1,0[$.</u>

<u>d)</u> F est croissante sur $[-1,0[$ et majorée sur $[-1,0[$ donc sur $[-1,0[$, <u>F admet donc une limite finie L quand x tend vers 0.</u>

Ainsi (la nouvelle fonction) F est continue sur $[-1,0]$ et de classe C^1 sur $[-1,0[$.
Le théorème de la limite de la dérivée nous permet de dire alors que si F' admet une limite finie en 0 alors F est de classe C^1 sur $[-1,0]$.
Montrons qu'il en est ainsi.
$\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\forall x\in[x_n,x_{n+1}]$, $F'(x)=F(x-x^2)$.
donc $\forall x\in[-1,0[$, $F'(x)=F(x-x^2)=F(\psi(x))$.
$\lim\limits_{x\to 0}\psi(x)=0$ et $\lim\limits_{x\to 0}F(x)=L=F(0)$; donc $\lim\limits_{x\to 0}F'(x)=L$.

F est continue sur $[-1,0]$, F de classe C^1 sur $[-1,0[$ et F' admet une limite finie (L) en 0, <u>F est donc de classe C^1 sur $[-1,0]$</u> (et <u>$F'(0)=L$</u>)

- F est de classe C^1 sur $[-1,0]$;
- $\forall x\in[-2,-1]$, $F(x)=f(x)$;
- $\forall x\in[-1,0[$, $F'(x)=F(x-x^2)$ et $F'(0)=F(0)=F(0-0^2)$.

donc <u>F est solution de P_0.</u>

(93) <u>a)</u> F est croissante sur $[-1,0[$. $\forall x\in[-1,0[$, $F(x)\geqslant F(-1)=f(-1)\geqslant 0$
donc $\lim\limits_{x\to 0}F(x)\geqslant 0$. <u>$L\geqslant 0$.</u>

<u>b)</u> Supposons $L=0$. Alors $\forall x\in[-1,0]$, $F(x)=0$ (F est croissante sur $[-1,0[$, positive et de limite nulle en 0).
En particulier $F(x_2)=F(x_1)=0$. $f(x_1)=F(x_1)=0$.
Or $F(x_2)=f(x_1)+\int_{x_1}^{x_2}f(t-t^2)dt=0$ donc $\int_{x_1}^{x_2}f(t-t^2)dt=0$

$\forall t\in[x_1,x_2]$, $t-t^2\in[x_0,x_1]$ et f est positive et continue sur $[x_0,x_1]$.
donc $t\mapsto f(t-t^2)$ est continue, positive et d'intégrale nulle sur $[x_1,x_2]$.
Alors $\forall t\in[x_1,x_2]$, $f(t-t^2)=0$. Ce qui s'écrit encore $\forall u\in[x_0,x_1]$, $f(u)=0$.
f est donc nulle.

Réciproquement si f est nulle une récurrence simple montre que pour tout $n\in\mathbb{N}$, F est nulle sur $[x_n,x_{n+1}]$. Ainsi si f est nulle F est nulle sur $[-2,0[$ et par continuité $L=F(0)=0$.

<u>L est nul si et seulement si f est nulle sur $[-2,-1]$.</u>

PARTIE III

(Q1) Propriétés de l'application ϕ.

Remarquons que si l'on pose $\forall x\in[0,1]$, $t(x)=x-x^2$, t admet pour tableau de variation :

x	0		$1/2$		1
$t'(x)$		$+$	0	$-$	
$t(x)$	0	$\nearrow$	$1/4$	$\searrow$	0

. Notons alors que : $\forall x\in[0,1]$, $t(x)=x-x^2\in[0,1/4]\subset[0,1]$.

<u>a)</u> Notons que E est un espace vectoriel. Il suffit de prouver que E est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ des applications de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$.

* E est sans doute contenu dans $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$!
* Posons $\forall x\in[0,1]$, $\hat{g}_0(x)=0$. Clairement $\hat{g}_0$ est de classe C^1 sur $[0,1]$ et $\forall x\in[0,1]$, $\hat{g}_0'(x)=0=\hat{g}_0(x-x^2)$.
  Ainsi $\hat{g}_0$ est un élément de E et <u>E est non vide.</u>
* Soient g_1 et g_2 deux éléments de E et λ un réel.
  λg_1+g_2 est de classe C^1 sur $[0,1]$ car g_1 et g_2 ont déjà cette qualité.
  $\forall x\in[0,1]$, $(\lambda g_1+g_2)'(x)=\lambda g_1'(x)+g_2'(x)=\lambda g_1(x-x^2)+g_2(x-x^2)=(\lambda g_1+g_2)(x-x^2)$.
  Ainsi λg_1+g_2 est un élément de E.

E est donc un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ donc E est un espace vectoriel.

Notons que ϕ est linéaire.
$\forall (g_1,g_2)\in E^2$, $\forall\lambda\in\mathbb{R}$, $\phi(\lambda g_1+g_2)=(\lambda g_1+g_2)(0)=\lambda g_1(0)+g_2(0)=\lambda\,\phi(g_1)+\phi(g_2)$.
<u>ϕ est linéaire.</u>

<u>b)</u> Soit g un élément de $\mathrm{Ker}\,\phi$. $g(0)=0$.

Nous avons vu que l'image de $[0,1]$ par $x \mapsto x-x^2$ est $[0,\frac{1}{4}]$.

Par conséquent : $M = \max_{x\in[0,\frac14]} |g(x)| = \max_{x\in[0,1]} |g(x-x^2)| \underset{g\in E}{=} \max_{x\in[0,1]} |g'(x)|$.

g est de classe C^1 sur $[0,1]$ et $\forall x \in [0,1]$, $|g'(x)| \leq M$. L'inégalité des accroissements finis donne alors : $\forall x\in[0,1]$, $|g(x)| \underset{g\in \ker\phi}{=} |g(x)-g(0)| \leq |x-0|M$; $\underline{\underline{\forall x\in[0,1],\ |g(x)|\leq Mx.}}$

En particulier $\forall x\in[0,\frac14]$, $|g(x)| \leq Mx \leq \frac{M}{4}$. Donc $M = \max_{x\in[0,\frac14]} |g(x)| \leq \frac{M}{4}$; $\underline{\underline{M=0}}$.

Alors $\forall x\in[0,1]$, $|g(x)| \leq Mx = 0$; $\forall x \in [0,1]$, $g(x)=0$. $\underline{\underline{g \text{ est nulle}}}$.

$\underline{\underline{\ker \phi = \{0\} \text{ donc } \phi \text{ est injective.}}}$

<u>Remarque</u>.. $\operatorname{Im}\phi \subset \mathbb{R}$ donc $\dim \operatorname{Im}\phi \leq 1$.

Ainsi $\dim E = \dim \operatorname{Im}\phi + \dim \ker\phi = \dim \operatorname{Im}\phi \leq 1$. Donc $\dim E = 0$ ou 1.

Ne reste plus qu'à exhiber un élément non nul de E pour pouvoir dire que $\dim E = 1$

C'est l'objet de Q2 et Q3.

(Q2) Etude d'une suite de fonctions (g_n).

<u>a)</u> $\forall x\in[0,1]$, $g_1(x) = 1 + \int_0^x g_0(t-t^2)\,dt = 1 + \int_0^x dt = 1+x$.

$\forall x\in[0,1]$, $g_2(x) = 1 + \int_0^x g_1(t-t^2)\,dt = 1 + \int_0^x (1+t-t^2)\,dt = 1 + \left[t + \frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{3}\right]_0^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}$

$\underline{\underline{\forall x\in[0,1],\ g_1(x) = 1+x \text{ et } g_2(x) = 1+x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}.}}$

<u>Remarque</u>.. $\forall x\in[0,1]$, $g_3(x) = \dots$!!!

<u>b)</u> Montrons par récurrence que g_n est une fonction polynôme non nulle pour tout $n\in\mathbb{N}$.

* C'est clair pour $n=0$ car $\forall x\in[0,1]$, $g_0(x)=1$. Le degré de g_0 est $d_0 = 1$.
* Supposons la propriété vraie pour n appartenant à $\mathbb{N}$ et montrons-la pour $n+1$. g_n est une fonction polynôme non nulle. Notons d_n son degré.

  Posons $\forall t\in[0,1]$, $\hat{g}_n(t) = g_n(t-t^2)$. $\hat{g}_n$ est une fonction polynôme de degré $2d_n$ comme composée d'une fonction polynôme de degré 2 et d'une fonction polynôme de degré d_n.

  Posons $\forall x\in[0,1]$, $\hat{\hat{g}}_n(x) = \int_0^x g_n(t-t^2)\,dt = \int_0^x \hat{g}_n(t)\,dt$

$\hat{\hat{q}}_n$ est la primitive de $\hat{q}_n$ sur $[0,1]$ qui prend la valeur 0 en 0 donc $\hat{\hat{q}}_n$ est une fonction polynôme de degré $2d_n+1$.
Par conséquent : $q_{n+1} = \hat{\hat{q}}_n + 1$ est une fonction polynôme de degré $d_{n+1} = 2d_n+1$.
Ceci achève la récurrence.
<u>Pour tout $n\in\mathbb{N}$, q_n est une fonction polynôme.</u> <u>$d_0 = 0$ et $\forall n\in\mathbb{N}$, $d_{n+1} = 2d_n+1$.</u>

$(d_n)_{n\geq 0}$ est une suite arithmético géométrique. $x\in\mathbb{R}$ et $x = 2x+1 \Leftrightarrow x = -1$.
$\forall n\in\mathbb{N}$, $d_{n+1} - (-1) = 2d_n + 1 - (-1) = 2(d_n+1)$. $\forall n\in\mathbb{N}$, $d_{n+1}+1 = 2(d_n+1)$.
$(d_n+1)_{n\geq 0}$ est une suite géométrique de premier terme 1 et de raison 2.
$\forall n\in\mathbb{N}$, $d_n+1 = 2^n$. <u>$\forall n\in\mathbb{N}$, $d_n = 2^n - 1$.</u>

<u>c)</u> * $\forall x\in[0,1]$, $q_1(x) - q_0(x) = x$. $\forall x\in[0,1]$, $0 \leq q_1(x) - q_0(x) = x \overset{!}{\leq} \dfrac{x^{0+1}}{(0+1)!}$
La propriété est vraie pour $n=0$.

* Supposons la propriété vraie pour n dans $\mathbb{N}$ et montrons-la pour $n+1$.
$\forall x\in[0,1]$, $0\leq q_{n+1}(x) - q_n(x) \leq \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}$. Rappelons que : $\forall t\in[0,1]$, $t-t^2\in[0,\frac{1}{4}]$.

$\forall t\in[0,1]$, $0\leq q_{n+1}(t-t^2) - q_n(t-t^2) \leq \dfrac{(t-t^2)^{n+1}}{(n+1)!} = \dfrac{t^{n+1}}{(n+1)!}(1-t)^{n+1} \underset{\uparrow}{\leq} \dfrac{t^{n+1}}{(n+1)!}$
En intégrant il vient : $0\leq 1-t\leq 1$ et $t\geq 0$

$\forall x\in[0,1]$, $0\leq \displaystyle\int_0^x q_{n+1}(t-t^2)\,dt - \int_0^x q_n(t-t^2)\,dt \leq \int_0^x \frac{t^{n+1}}{(n+1)!}\,dt = \frac{x^{n+2}}{(n+2)!}$.

$\forall x\in[0,1]$, $0\leq q_{n+2}(x) - 1 - (q_{n+1}(x)-1) \leq \dfrac{x^{n+2}}{(n+2)!}$.
$\forall x\in[0,1]$, $0\leq q_{n+2}(x) - q_{n+1}(x) \leq \dfrac{x^{n+2}}{(n+2)!}$. Ceci achève la récurrence.

$\forall n\in\mathbb{N}$, $\forall x\in[0,1]$, $0\leq q_{n+1}(x) - q_n(x) \leq \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}$.

<u>d)</u> $x\in[0,1]$. $\forall n\in\mathbb{N}$, $q_{n+1}(x) - q_n(x)\geq 0$. La suite $(q_n(x))_{n\geq 0}$ est croissante.

$\forall n\in\mathbb{N}^*$, $q_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\left(q_{k+1}(x) - q_k(x)\right) + q_0(x) \leq \sum_{k=0}^{n-1}\frac{x^{k+1}}{(k+1)!} + 1 = \sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}$

Comme $x\in[0,1]$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!} \leq \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{x^k}{k!} = e^x$ donc $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $q_n(x)\leq e^x$

Notons que : $g_0(x) = 1 \leq e^x$ donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $g_n(x) \leq e^x$.

$(g_n(x))_{n\geq 0}$ est croissante et majorée par e^x donc converge.

Pour tout $x \in [0,1]$, $(g_n(x))_{n\geq 0}$ converge.

(Q3) Etude de la fonction g définie par $g(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} g_n(x)$

a) Soit x un élément de [0,1].

$\forall n \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{N}^*$, $g_{n+p}(x) = \sum\limits_{k=n}^{n+p-1} (g_{k+1}(x) - g_k(x)) + g_n(x) \leq \sum\limits_{k=n}^{n+p-1} \frac{x^{k+1}}{(k+1)!} + g_n(x)$

$\forall n \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{N}^*$, $g_{n+p}(x) - g_n(x) \leq \sum\limits_{k=n}^{n+p-1} \frac{x^{k+1}}{(k+1)!} = \sum\limits_{k=n+1}^{n+p} \frac{x^k}{k!}$

Par croissance on a aussi $\forall n \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{N}^*$, $g_{n+p}(x) - g_n(x) \geq 0$

Ainsi $\forall x \in [0,1], \forall n \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq g_{n+p}(x) - g_n(x) \leq \sum\limits_{k=n+1}^{n+p} \frac{x^k}{k!}$

Remarque.. Au choix près ceci vaut encore pour p=0.

Soit x dans [0,1] et n dans $\mathbb{N}$. $\forall p \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq g_{n+p}(x) - g_n(x) \leq \sum\limits_{k=n+1}^{n+p} \frac{x^k}{k!} \leq \sum\limits_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{k!} = \sum\limits_{k=0}^{n+p} \frac{1}{k!} - \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$

En faisant tendre p vers $+\infty$ il vient : $0 \leq g(x) - g_n(x) \leq e - \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$

$\forall x \in [0,1], \forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq g(x) - g_n(x) \leq e - \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$.

b) Soit $x \in [0,1]$ et h un réel tel que $x+h \in [0,1]$. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$|g(x+h) - g(x)| = |(g(x+h) - g_n(x+h)) + (g_n(x+h) - g_n(x)) + (g_n(x) - g(x))|$

$|g(x+h) - g(x)| \leq |g(x+h) - g_n(x+h)| + |g_n(x+h) - g_n(x)| + |g_n(x) - g(x)|$

$|g(x+h) - g(x)| \leq e - \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + |g_n(x+h) - g_n(x)| + e - \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$

Donc $|g(x+h) - g(x)| \leq 2\left(e - \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\right) + |g_n(x+h) - g_n(x)|$.

Fixons x dans [0,1]. Montrons alors que g est continue en x.

Soit à prouver que : $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists \eta \in \mathbb{R}_+^*, \forall y \in [0,1], |x-y| < \eta \Rightarrow |g(y) - g(x)| < \varepsilon$

Ou encore que : $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists \eta \in \mathbb{R}_+^*, \forall h \in \mathbb{R}$, $x+h \in [0,1]$ et $|h| < \eta \Rightarrow |g(x+h) - g(x)| < \varepsilon$.

Soit ε dans $\mathbb{R}_+^*$. $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha\left(e-\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\right)=0$, ainsi :

$$\exists n_0\in\mathbb{N},\ \forall n\in\mathbb{N},\ n\geq n_0 \Rightarrow \left|\alpha\left(e-\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\right)\right|<\frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow \alpha\left(e-\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\right)<\frac{\varepsilon}{2}$$

<u>Fixons</u> alors n dans $\mathbb{N}$ tel que : $n\geq n_0$.

Si h est un réel tel que $x+h\in[0,1]$: $|g(x+h)-g(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + |g_n(x+h)-g_n(x)|$.

Or g_n est continue en x (g_n est une fonction polynôme) donc :

$\exists \eta\in\mathbb{R}_+^*,\ \forall h\in\mathbb{R},\ x+h\in[0,1]$ et $|h|<\eta \Rightarrow |g_n(x+h)-g_n(x)|<\frac{\varepsilon}{2}$.

Ainsi $\forall h\in\mathbb{R},\ x+h\in[0,1]$ et $|h|<\eta \Rightarrow |g(x+h)-g(x)| < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$.

Nous avons donc prouvé que :

$\forall\varepsilon\in\mathbb{R}_+^*,\ \exists\eta\in\mathbb{R}_+^*,\ \forall h\in\mathbb{R},\ x+h\in[0,1]$ et $|h|<\eta\Rightarrow|g(x+h)-g(x)|<\varepsilon$; g est continue en x.

<u>g est continue sur $[0,1]$.</u>

Remarque... Ceci n'est pas une surprise car la série de fonctions de terme général $g_{n+1}-g_n$ converge normalement sur $[0,1]$ ($\forall x\in[0,1],\ 0\leq g_{n+1}(x)-g_n(x)\leq\frac{1}{(n+1)!}$) et sa somme est $g-1$ ...

<u>c)</u> Soit $x\in[0,1]$. Soit $n\in\mathbb{N}$. $\forall t\in[0,1],\ 0\leq g(t)-g_n(t)\leq e-\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}$

$\forall t\in[0,1],\ 0\leq g(t-t^2)-g_n(t-t^2)\leq e-\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}$

En intégrant il vient : $0\leq\int_0^x g(t-t^2)\,dt-\int_0^x g_n(t-t^2)\,dt\leq\left(e-\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\right)x \leq e-\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(e-\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\right)=0$; par encadrement on a $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\int_0^x g(t-t^2)\,dt-\int_0^x g_n(t-t^2)\,dt\right)=0$.

Ainsi pour tout $x\in[0,1]$: $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^x g_n(t-t^2)\,dt=\int_0^x g(t-t^2)\,dt$.

Or $\forall x\in[0,1],\ \forall n\in\mathbb{N}$, $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^x g_n(t-t^2)\,dt=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(g_{n+1}(x)-1\right)=g(x)-1$.

donc $\int_0^x g(t-t^2)\,dt=g(x)-1$ pour tout x dans $[0,1]$.

$\forall x\in[0,1],\quad g(x)=1+\int_0^x g(t-t^2)\,dt$.

d) $t\mapsto t-t^2$ est continue sur $\mathbb{R}$, $\forall t\in[0,1]$, $t-t^2\in[0,1]$ et g est continue sur $[0,1]$.
Par conséquent $t\mapsto g(t-t^2)$ est continue sur $[0,1]$.
Ainsi $x\mapsto \int_0^x g(t-t^2)\,dt$ est dérivable sur $[0,1]$ et de dérivée $x\mapsto g(x-x^2)$.
Comme $\forall x\in[0,1]$, $g(x)=1+\int_0^x g(t-t^2)\,dt$:

1) g est dérivable sur $[0,1]$

2) $\forall x\in[0,1]$, $g'(x)=g(x-x^2)$

3) g' est continue sur $[0,1]$.

Le tout suffit pour dire que g appartient à E. Notons que $\phi(g)=g(0)=1$.
<u>g est un élément de E tel que $\phi(g)=1$</u>. Mieux <u>g est l'élément de E tel que $\phi(g)=1$.</u>

<u>Résolution du problème P_1</u>

Q4) a) Rappelons que ϕ est injective et donc que $\dim E=\dim \operatorname{Im}\phi \underset{\uparrow}{\leq} 1=\dim\mathbb{R}$.
$\operatorname{Im}\phi\subset\mathbb{R}$

Or $\operatorname{Im}\phi\neq\{0_{\mathbb{R}}\}$ car $1\in\operatorname{Im}\phi$ d'après Q3 <u>d)</u>

Par conséquent $\dim\operatorname{Im}\phi=1$. Mieux $\operatorname{Im}\phi=\mathbb{R}$; ϕ est surjective.
Finalement <u>ϕ est un isomorphisme de E sur $\mathbb{R}$.</u> <u>$\dim E=1$.</u>

<u>b)</u> <u>Unicité</u>.. Soient F_1 et F_2 deux solutions du problème P_1.

Les restrictions $F_1|_{[-1,0]}$ et $F_2|_{[-1,0]}$ de F_1 et F_2 au segment $[-1,0]$ sont solutions du problème P_0 ; par conséquent elles sont égales. Ainsi F_1 et F_2 coïncident sur $[-1,0]$. En particulier $F_1(0)=F_2(0)$

Les restrictions $F_1|_{[0,1]}$ et $F_2|_{[0,1]}$ de F_1 et F_2 au segment $[0,1]$ sont deux éléments de E tels que : $\varphi(F_1|_{[0,1]})=F_1(0)=F_2(0)=\varphi(F_2|_{[0,1]})$. φ étant injective : $F_1|_{[0,1]}=F_2|_{[0,1]}$.
F_1 et F_2 coïncident aussi sur $[0,1]$.
Finalement : $\forall x\in[-1,1]$, $F_1(x)=F_2(x)$. $F_1=F_2$.
<u>Le problème P_1 admet au plus une solution.</u>

<u>Existence</u>.. Notons ici H la solution du problème P_0. Notons alors L l'élément de E dont l'image par φ est $H(0)$ (φ est bijective).

Posons alors $\forall x\in[-1,0]$, $F(x)=H(x)$ et $\forall x\in[0,1]$, $F(x)=L(x)$ (ceci est cohérent car $H(0)=L(0)$) et montrons que F est solution du problème P_1.

- F est une application de $[-2,1]$ dans $\mathbb{R}$.
- $\forall x \in [-2,-1]$, $F(x) = H(x) = f(x)$. H2] est vérifiée.
- F est continue sur $[-2,0]$ et sur $[0,1]$ donc F est continue sur $[-2,0]$ (H est continue sur $[-2,0]$ et L est continue sur $[0,1]$).
- F est de classe C^1 sur $[-2,0[$ et sur $]0,1]$ car H est de classe C^1 sur $[-2,0]$ et L est de classe C^1 sur $[0,1]$.

  De plus $\forall x \in [-1,0[$, $F'(x) = H'(x) = H(x-x^2) \underset{x-x^2\in[-2,0]}{=} F(x-x^2)$ et

  $\forall x \in]0,1]$, $F'(x) = L'(x) = L(x-x^2) \underset{x-x^2\in[0,1/4]}{=} F(x-x^2)$

  $\lim\limits_{x\mapsto 0^-} F'(x) = \lim\limits_{x\mapsto 0^-} F(x-x^2) = F(0)$ car F est continue en 0.

  $\lim\limits_{x\mapsto 0^+} F'(x) = \lim\limits_{x\mapsto 0^+} F(x-x^2) = F(0)$ pour les mêmes raisons.

  On a alors F continue sur $[-2,1]$, de classe C^1 sur $[-2,0[\cup]0,1]$ et

  $\lim\limits_{x\mapsto 0^-} F'(x) = \lim\limits_{x\mapsto 0^+} F'(x) = F(0)$.

Le théorème de la limite de la dérivée montre alors que F est de classe C^1 sur $[-2,1]$ et que $F'(0) = F(0)$.

F est de classe C^1 sur $[-2,1]$ donc vérifie H1]

$\forall x \in [-1,0[\cup]0,1]$, $F'(x) = F(x-x^2)$ et $F'(0) = F(0) = F(0-0^2)$. F vérifie H2]

Finalement F est solution de P_1. P_1 admet au moins une solution.

c) P_1 admet une solution et une seule.

Q5) Résolution du problème P2.

a) Notons que $\forall x \in [-1,2]$, $1-x \in [-1,2]$.

F est solution du problème P2 donc f est de classe C^1 sur $[-2\ \ ]$ donc sur $[-1,2]$.

Ainsi $h : x \mapsto F(x)+F(1-x)$ est dérivable sur $[-1,2]$.

$\forall x \in [-1,2]$, $h'(x) = F'(x) - F'(1-x) \underset{x\in[-1,2] \text{ et } 1-x\in[-1,2]}{=} F(x-x^2) - F(1-x-(1-x)^2) = F(x-x^2) - F(x-x^2) = 0$.

h' est nulle sur $[-1,2]$ donc $h : x \mapsto F(x)+F(1-x)$ est constante sur $[-1,2]$.

b) Unicité.. Soient F_1 et F_2 deux solutions de P2

$F_1|_{[-2,1]}$ et $F_2|_{[-2,1]}$ sont deux solutions de P_1.. Ainsi $\forall x\in[-2,1],\ F_1(x)=F_2(x)$.

$x\mapsto F_1(x)+F_1(1-x)$ et $x\mapsto F_2(x)+F_2(1-x)$ sont constantes sur $[-1,2]$

$\forall x\in[-1,2],\ F_1(x)+F_1(1-x)=F_1(0)+F_1(1-0)=F_1(0)+F_1(1)$

$\forall x\in[-1,2],\ F_1(x)=F_1(0)+F_1(1)-F_1(1-x)$. De même

$\forall x\in[-1,2],\ F_2(x)=F_2(0)+F_2(1)-F_2(1-x)$.

Montrons alors que F_1 et F_2 coïncident sur $[1,2]$.

Soit $x\in[1,2]$. $1-x\in[-1,0]$ donc $F_1(1-x)=F_2(1-x)$. De plus $F_1(0)=F_2(0)$ et $F_1(1)=F_2(1)$.

Ainsi $F_1(x)=F_1(0)+F_1(1)-F_1(1-x)=F_2(0)+F_2(1)-F_2(1-x)=F_2(x)$.

$\forall x\in[1,2],\ F_1(x)=F_2(x)$.

Finalement : $\forall x\in[-2,2],\ F_1(x)=F_2(x)$; $F_1=F_2$. P2 a au plus une solution.

Existence Notons ici G la solution de P1.

Posons $\forall x\in[-2,1],\ F(x)=G(x)$ et $\forall x\in[1,2],\ F(x)=G(0)+G(1)-G(1-x)$.

Ceci est cohérent car 1°.. $\forall x\in[1,2],\ 1-x\in[-1,0]$

2°.. $G(1)=G(0)+G(1)-G(1-1)$

Montrons que F est solution de P2.

- F est une application de $[-2,2]$ dans $\mathbb{R}$.
- $\forall x\in[-2,-1],\ F(x)=G(x)=f(x)$. H2] est vérifiée.
- $\forall x\in[-1,1],\ F(x)=G(x)$; F est donc de classe C^1 sur $[-2,1]$

$\forall x\in[1,2],\ F(x)=G(0)+G(1)-G(1-x)$ donc F est de classe C^1 sur $[1,2]$ (... composition banale)

En particulier, F est continue sur $[-2,1]$ et $[1,2]$ donc sur $[-2,2]$ et F est de classe C^1 sur $[-2,1[\cup]1,2]$.

$\to \forall x\in[-1,1[,\ F'(x)=G'(x)=G(x-x^2)\underset{\uparrow\ x-x^2\in}{=}F(x-x^2)$; $\lim\limits_{x\mapsto 1^-}F'(x)=F(0)$.

$\to \forall x\in]1,2],\ F'(x)=-(-G'(1-x))=G'(1-x)\underset{\uparrow\ 1-x\in[-1,0[}{=}G(1-x-(1-x)^2)=G(x-x^2)\underset{\uparrow\ x-x^2\in[-2,0[}{=}F(x-x^2)$

$\lim\limits_{x\mapsto 1^+}F'(x)=\lim\limits_{x\mapsto 1^+}F(x-x^2)=F(0)$

F est continue sur $[-1,2]$, de classe C^1 sur $[-1,1[\cup]1,2]$ et $\lim\limits_{x \to 1^-} F'(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} F'(x) = F(0)$.
Le théorème de la limite de la dérivée montre alors que
F est de classe C^1 sur $[-1,2]$ et que $F'(1) = F(0)$. F vérifie alors H1]
Nous avons vu plus haut que : $\forall x \in [-1,1[\cup]1,2]$, $F'(x) = F(x-x^2)$.
De plus $F'(1) = F(0) = F(1-1^2)$; ainsi $\forall x \in [-1,2]$, $F'(x) = F(x-x^2)$. F vérifie H2]
Par conséquent F est solution de P. <u>P admet au moins une solution.</u>

Pour finir <u>P admet une solution et une seule.</u>