

Q1) Etude de suites récurrentes linéaires.

2) L'équation caractéristique associée à cette récurrence linéaire d'ordre 2 et $z \in \mathbb{C}$ et $z^2 - 2\cos\theta z + 1 = 0$. Le discriminant est $\Delta = 4(\cos^2\theta - 1) = 4(-\sin^2\theta)$
4 $1^{\text{er}} \cos\theta \dots \theta \in]0, \pi[$. $\Delta < 0$. L'équation admet deux solutions complexes et conjuguées :

$$z_1 = \frac{2\cos\theta + i2\sin\theta}{2} = e^{i\theta} \text{ et } z_2 = e^{-i\theta}.$$

Alors le couple indique que : $((\cos\theta)_{k \geq 0}, (\sin\theta)_{k \geq 0})$ est une base de $E(\theta)$.

3 $2^{\text{es}} \cos\theta \dots \theta = 0$. $\Delta = 0$. L'équation admet une solution double : $-\frac{(-2\cos\theta)}{2 \times 1} = \cos\theta = 1$.

Alors $((1)_{k \geq 0}, (k)_{k \geq 0})$ est une base de $E(0)$.

3 $3^{\text{es}} \cos\theta \dots \theta = \pi$. $\Delta = 0$. L'équation admet une solution double : $\cos\theta = -1$.

Alors $(((-1)^k)_{k \geq 0}, (k(-1)^k)_{k \geq 0})$ est une base de $E(\pi)$.

Remarque : Notons que dans tous les cas $E(\theta)$ est un espace vectoriel pur de dimension 2.
 Notons aussi qu'une suite de $E(\theta)$ est entièrement déterminée par ses deux premiers termes ; $\varphi: E(\theta) \rightarrow \mathbb{R}^2$ est un isomorphisme de $E(\theta)$ sur $\mathbb{R}^2$.
 $(u_k)_{k \geq 0} \rightarrow (u_0, u_1)$

$\theta \in]0, \pi[$. Soit $(s_k(\theta))_{k \geq 0}$ un élément de $E(\theta)$. $\exists \lambda, \gamma \in \mathbb{R}^2, \forall k \in \mathbb{N}, s_k(\theta) = \lambda \cos k\theta + \gamma \sin k\theta$.
 $s_0(\theta) = 0$ et $s_1(\theta) = \sin\theta \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda + \gamma \times 0 = 0 \\ \lambda \cos\theta + \gamma \sin\theta = \sin\theta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 0 \\ (\gamma - 1)\sin\theta = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 0 \\ \gamma = 1 \end{cases}$
 $\sin\theta \neq 0$

Ainsi il existe une suite $(s_k(\theta))_{k \geq 0}$ et une suite de $E(\theta)$ telle que : $s_0(\theta) = 0$ et $s_1(\theta) = \sin\theta$

1 $\forall k \in \mathbb{N}, s_k(\theta) = \sin(k\theta)$.

b) Par définition : $F(\theta) \subset E(\theta)$.

- La suite nulle appartient à $F(\theta)$ donc $F(\theta)$ n'est pas vide.
- Soit λ un réel et soient $(u_k)_{k \geq 0}$ et $(v_k)_{k \geq 0}$ deux éléments de $F(\theta)$.

$\lambda(u_k) + (v_k)_{k_0} = (\lambda u_k + v_k)_{k_0}$ est un élément de $E(\theta)$ ou $E(\theta)$ et une opération n'aide.

De plus $\lambda u_0 + v_0 = \lambda x_0 + 0 = 0$ et $\lambda u_{n+1} + v_{n+1} = \lambda x_0 + 0 = 0$; ainsi $\lambda(u_k)_{k_0} + (v_k)_{k_0} \in F(\theta)$.

2. $F(\theta)$ est un sous-espace vectoriel de $E(\theta)$.

$\theta = 0$. Soit $(u_k)_{k_0} \in E(0)$. $\exists (\lambda, \gamma) \in \mathbb{R}^2$, $\forall k \in \mathbb{N}$, $u_k = \lambda + \gamma k = \lambda + k\gamma$.

$$(u_k)_{k_0} \in F(0) \Leftrightarrow u_0 = u_{n+1} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 0 \\ \lambda + (n+1)\gamma = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \lambda = \gamma = 0.$$

Ainsi $F(0) = \{0_{E(0)}\}$.

$\theta = \pi$. Soit $(u_k)_{k_0} \in E(\pi)$. $\exists (\lambda, \gamma) \in \mathbb{R}^2$, $\forall k \in \mathbb{N}$, $u_k = \lambda(-1)^k + \gamma k(-1)^k$.

$$(u_k)_{k_0} \in F(\pi) \Leftrightarrow u_0 = u_{n+1} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 0 \\ (-1)^{n+1}[\lambda + \gamma(n+1)] = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \lambda = \gamma = 0.$$

Ainsi $F(\pi) = \{0_{E(\pi)}\}$.

1. Finalment: $F(\theta) = \{0_{E(\theta)}\}$ et $F(\pi) = \{0_{E(\pi)}\}$.

c) Soit $\theta \in]0, \pi[- \{ \frac{p\pi}{n+1}; p \in \overline{0, n} \}$.

Soit $(u_k)_{k_0}$ un élément de $F(\theta)$. $\exists (\lambda, \gamma) \in \mathbb{R}^2$, $\forall k \in \mathbb{N}$, $u_k = \lambda \cos(k\theta) + \gamma k \cos(k\theta)$.

$u_0 = u_{n+1} = 0$ donc $\lambda = 0$ et $\gamma \sin((n+1)\theta) = 0$. $\theta \in]0, \pi[$

Or $\sin((n+1)\theta) = 0 \Leftrightarrow (n+1)\theta = 0 \text{ ou } \pi \Leftrightarrow \exists p \in \mathbb{Z}$, $\theta = \frac{p\pi}{n+1} \Leftrightarrow \exists p \in \overline{0, n}$, $\theta = \frac{p\pi}{n+1}$.

Comme $\theta \in]0, \pi[- \{ \frac{p\pi}{n+1}; p \in \overline{0, n} \}$, $\sin((n+1)\theta) \neq 0$; ainsi $\lambda = \gamma = 0$. $(u_k)_{k_0}$ est alors la suite nulle.

1. Pour $\theta \in]0, \pi[- \{ \frac{p\pi}{n+1}; p \in \overline{0, n} \}$ alors $F(\theta) = \{0_{E(\theta)}\}$.

d) Supposons que $\exists p \in \overline{0, n}$, $\theta = \frac{p\pi}{n+1}$. $(s_k(\theta))$ est un élément de $E(\theta)$; de

2. plus $s_0(\theta) = \cos(0 \cdot \theta) = 1$ et $s_{n+1}(\theta) = \cos((n+1)\theta) = \cos(p\pi) = (-1)^p$. $(s_k(\theta))_{k_0} \in F(\theta)$.

$s_1(\theta) = \cos(\theta) \neq 0$ car $\theta \in]0, \pi[$; donc $(s_k(\theta))_{k_0}$ n'est pas la suite nulle.

Ainsi d'un $F(\theta) \geq 1$ et d'un $F(\theta) \leq 1$ car $F(\theta) \subset E(\theta)$ et d'un $E(\theta) = 1$.

Ainsi d'un $F(\theta) \in \{1, 2\}$. La suite $(s_k(\theta))_{k_0}$ appartient à $E(\theta)$ mais n'appartient

pas à $F(\theta)$ car $\cos(0 \cdot \theta) = 1 \neq 0$; donc $F(\theta) \neq E(\theta)$; d'un $F(\theta) = 1$.

4. d'un $F(\theta) = 1$ et $(s_k(\theta))_{k_0}$ est une base de $F(\theta)$.

Résumons : si $\theta \in [0, \pi] - \{ \frac{\pi}{n+1} ; p \in \mathbb{I}, n \mathbb{I} \}$, $F(\theta) = (e_{10}, 1)$.

si $\theta \in \{ \frac{\pi}{n+1} ; p \in \mathbb{I}, n \mathbb{I} \}$, $F(\theta) = \text{Vect}((s_k(\theta))_{k \geq 0})$.

Q.L. "Noyau" de $A(\theta)$.

$\underline{=}$ - doit $\lambda = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ (?) au écart de $\pi_{n,1}(\mathbb{K})$.

$$A(\theta)\lambda = 0_{\pi_{n,1}(\mathbb{K})} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \cos \theta - 1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & \cos \theta & & \\ 0 & & \ddots & \\ 0 & & & \cos \theta - 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0_{\pi_{n,1}(\mathbb{K})}.$$

$$A(\theta)\lambda = 0_{\pi_{n,1}(\mathbb{K})} \Leftrightarrow \begin{cases} (\cos \theta)x_1 - x_2 = 0 \\ -x_2 + (\cos \theta)x_2 = x_3 = 0 \\ \dots \\ -x_{k-1} + (\cos \theta)x_k - x_{k+1} = 0 \\ \dots \\ -x_{n-2} + (\cos \theta)x_{n-1} - x_n = 0 \\ -x_{n-1} + (\cos \theta)x_n = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 - (\cos \theta)x_1 = 0 \\ \forall k \in \mathbb{I}, n-1 \mathbb{I}, x_{k+1} - (\cos \theta)x_k + x_{k-1} = 0 \\ \dots \\ -x_{n-1} + (\cos \theta)x_n = 0 \end{cases} \quad (C)$$

$\underline{=}$ - (C.S.) $\lambda = \begin{pmatrix} x_1 \\ 1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \pi_{n,1}(\mathbb{K})$ et on suppose qu'il existe une suite $(u_k)_{k \geq 0}$ de $F(\theta)$

telle que $u_2 = x_2, u_3 = x_3, \dots, u_n = x_n$. Montrons que $A(\theta)\lambda = 0_{\pi_{n,1}(\mathbb{K})}$.

$\forall k \in \mathbb{I}, u_{k+1} - (\cos \theta)u_k + u_{k-1} = 0, u_0 = u_{n+1} = 0$. Vérifions alors (C)

$$\begin{cases} x_2 - (\cos \theta)x_1 = u_2 - (\cos \theta)u_1 \stackrel{u_0=0}{=} u_2 - (\cos \theta)u_1 + u_0 = 0 \\ \forall k \in \mathbb{I}, n-1 \mathbb{I}, x_{k+1} - (\cos \theta)x_k + x_{k-1} = u_{k+1} - (\cos \theta)u_k + u_{k-1} = 0 \\ -x_{n-1} + (\cos \theta)x_n = -(\cos \theta)u_n + u_{n-1} \stackrel{u_{n+1}=0}{=} u_{n+1} - (\cos \theta)u_n + u_{n-1} = 0. \end{cases}$$

Ainsi $A(\theta)\lambda = 0_{\pi_{n,1}(\mathbb{K})}$.

$\underline{=}$ (C.N) Supposons que $\lambda = \begin{pmatrix} x_1 \\ 1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \pi_{n,1}(\mathbb{K})$ et que $A(\theta)\lambda = 0_{\pi_{n,1}(\mathbb{K})}$. Montrons (C) et vérifions (C).

Soit $(u_k)_{k \geq 0}$ l'élément de $E(\theta)$ qui vérifie $u_0 = 0$ et $u_2 = x_2$ (l'existence et l'unicité d'un telle suite résultent de l'hypothèse $\varphi: E(\theta) \rightarrow \mathbb{R}^2, (u_k)_{k \geq 0} \mapsto (u_0, u_2)$).
On remarque que : $\forall k \in \mathbb{I}, n \mathbb{I}, u_k = x_k$ et que $(u_k) \in F(\theta)$.

• $\Delta u_0 = 0$ Δ nait par une récurrence d'ordre 2 que: $\forall k \in \overline{1, n-1}$, $u_k = \kappa_k$.

$\rightarrow u_1 = \kappa_1$ par définition.

$$u_2 = \text{cas } \Theta u_1 - u_0 = \text{cas } \Theta \kappa_1 \stackrel{(c)}{=} \kappa_2$$

$\rightarrow$ supposons que $u_{k-1} = \kappa_{k-1}$ et $u_k = \kappa_k$ pour $k \in \overline{2, n-1}$.

Alors $u_{k+1} = \text{cas } \Theta u_k - u_{k-1} = \text{cas } \Theta \kappa_k - \kappa_{k-1} = \kappa_{k+1}$. Ceci achève la récurrence. (c)

Δ nait par fait que $u_{n+1} = 0$. $u_{n+1} = \text{cas } \Theta u_n - u_{n-1} = \text{cas } \Theta \kappa_n - \kappa_{n-1} \stackrel{(c)}{=} 0$; ainsi $(u_k)_{k \geq 0} \in F(\Theta)$ et $\forall k \in \overline{1, n-1}$, $u_k = \kappa_k$.

Si $\lambda = \begin{pmatrix} \kappa_1 \\ 1 \\ u_n \end{pmatrix} \in \pi_{n+1}(u)$, $A(\Theta)X = 0_{\pi_{n+1}(u)}$ est équivalente à une suite $(u_k)_{k \geq 0}$ de $F(\Theta)$ telle que: $\forall k \in \overline{1, n-1}$, $u_k = \kappa_k$.

b) Soit $\{X \in \pi_{n+1}(u) \mid A(\Theta)X = 0_{\pi_{n+1}(u)}\}$.

2° $\text{cas } \Theta \in [\frac{\pi}{n+1}] = \{\frac{p\pi}{n+1}; p \in \overline{1, n-1}\}$. Alors $F(\Theta) = \{0_{E(\Theta)}\}$.

Soit $\lambda = \begin{pmatrix} \kappa_1 \\ 1 \\ u_n \end{pmatrix} \in \pi_{n+1}(u)$ tel que $A(\Theta)\lambda = 0_{\pi_{n+1}(u)}$. Équivalente à une suite $(u_k)_{k \geq 0}$ de $F(\Theta)$ telle que: $\forall k \in \overline{1, n-1}$, $u_k = \kappa_k$. Or $F(\Theta) = \{0_{E(\Theta)}\}$ donc $(u_k)_{k \geq 0}$ est la suite nulle; $\forall k \in \overline{1, n-1}$, $\kappa_k = 0$. $\lambda = 0_{\pi_{n+1}(u)}$. Réciproquement $A(\Theta)0_{\pi_{n+1}(u)} = 0_{\pi_{n+1}(u)}$!

2° Si $\Theta \in [\frac{\pi}{n+1}] = \{\frac{p\pi}{n+1}; p \in \overline{1, n-1}\}$, $\{X \in \pi_{n+1}(u) \mid A(\Theta)X = 0_{\pi_{n+1}(u)}\} = \{0_{\pi_{n+1}(u)}\}$ et $A(\Theta)$ est inversible.

2° $\text{cas } \Theta = \frac{p\pi}{n+1}$, $p \in \overline{1, n-1}$. Alors $F(\Theta) = \text{Vect}((S_k(\Theta))_{k \geq 0})$.

PROPOS $H = \{X \in \pi_{n+1}(u) \mid AX = 0_{\pi_{n+1}(u)}\}$ et $X_p = \begin{pmatrix} \kappa_1 \Theta \\ \kappa_1(\Theta) \\ \vdots \\ \kappa_n(\Theta) \end{pmatrix}$. Notons que $H = \text{Vect}(X_p)$.

Soit $\lambda = \begin{pmatrix} \kappa_1 \\ 1 \\ u_n \end{pmatrix} \in H$.

Équivalente à une suite $(u_k)_{k \geq 0} \in F(\Theta)$ telle que: $\forall k \in \overline{1, n-1}$, $u_k = \kappa_k$.

$(u_k)_{k \geq 0} \in F(\Theta) = \text{Vect}(S_k(\Theta))$. $\exists \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall k \in \mathbb{N}$, $u_k = \lambda S_k(\Theta)$. $\lambda \neq 0$

$\forall k \in \overline{1, n-1}$, $\kappa_k = \lambda \kappa_k(\Theta)$; $\lambda = \lambda \kappa_p$; $\lambda \in \text{Vect}(\kappa_p)$. Ainsi $H \subset \text{Vect}(\kappa_p)$.

Réciproquement soit $\lambda = \begin{pmatrix} \kappa_1 \\ 1 \\ u_n \end{pmatrix} \in \text{Vect}(\kappa_p)$. $\exists \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall k \in \overline{1, n-1}$, $\kappa_k = \lambda \kappa_k(\Theta)$.

Considérons alors la suite $(u_k)_{k \geq 0} = \lambda (S_k(\Theta))$.

$(u_k)_{k \geq 0} \in \text{Vect}(S_k(\Theta)) = F(\Theta)$ et $\forall k \in \overline{1, n-1}$, $u_k = \lambda S_k(\Theta) = \lambda \kappa_k(\Theta) = \kappa_k$; ainsi $A(\Theta)\lambda = 0_{\pi_{n+1}(u)}$.

3 si $\exists p \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}, \theta = \frac{p\pi}{n+1}$ alors 1° $(\lambda \in \pi_{n,n}(\mathbb{R}) / A(\theta) \neq 0) = \text{Vect} \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}$.
 2° $A(\theta)$ est pas inversible.

93 Valeurs propres de la matrice A.

3.1.0 $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & & & \\ 0 & -1 & & & \\ \vdots & & \ddots & & \\ 0 & & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

A est une matrice symétrique et réelle donc les valeurs propres de A sont réelles (et A est diagonalisable avec le "nouveau" programme).

1) Soit $\lambda \in \text{Sp}(A)$. Soit $\lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$ un vecteur propre de A associé à cette valeur propre.

$(A - \lambda I_n) \lambda = 0$ donc

$$\begin{cases} (2-\lambda_1)\lambda_1 - \lambda_2 = 0 \\ \forall i \in \mathbb{Z}, n-1, -\lambda_{i-1} + (2-\lambda_i)\lambda_i - \lambda_{i+1} = 0 \\ -\lambda_{n-1} + (2-\lambda_n)\lambda_n = 0 \end{cases}$$

Soit un élément de $\mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$ tel que: $|\lambda_i| = \max_{1 \leq j \leq n} |\lambda_j|$. Notons que $\lambda_i \neq 0$ ($\lambda \neq 0_{n,n}(\mathbb{R})$).

1° cas: $i \in \mathbb{Z}, n-1$. $(2-\lambda_i)\lambda_i = \lambda_{i-1} + \lambda_{i+1}$; $|2-\lambda_i||\lambda_i| = |\lambda_{i-1} + \lambda_{i+1}| \leq |\lambda_{i-1}| + |\lambda_{i+1}| \leq |\lambda_i|$

En divisant par $|\lambda_i|$ qui est un réel non nul on obtient $|2-\lambda_i| \leq 1$; $1-\lambda_i \leq 2$.

2° cas: $i=1$. $|(2-\lambda_1)\lambda_1| = |\lambda_2| \leq |\lambda_1|$; $|2-\lambda_1||\lambda_1| \leq |\lambda_2|$; $|2-\lambda_1| \leq 2$ car $|\lambda_2| \neq 0$.

En divisant: $1-\lambda_1 \leq 1$; donc $1-\lambda_1 \leq 2$.

3° cas: $i=n$. $|(2-\lambda_n)\lambda_n| = |\lambda_{n-1}| \leq |\lambda_n|$; $|2-\lambda_n||\lambda_n| \leq |\lambda_{n-1}|$; $|2-\lambda_n| \leq 2$ car $|\lambda_{n-1}| \neq 0$.

En divisant: $1-\lambda_n \leq 2$ et donc $1-\lambda_n \leq 2$.

7. Ainsi $\forall \lambda \in \text{Sp}(A)$, $1-\lambda \leq 2$.

Pour $\lambda = \lambda(\theta) \in \text{Sp}(A)$, $\lambda(\theta) = 2 \cos \theta$. En utilisant une bijection de $[0, \pi]$ sur $[-2, 2]$.

Ainsi $\forall \theta \in [0, \pi]$, $\exists ! \theta \in [0, \pi]$, $y = 2 \cos \theta$.

Soit $\lambda \in \text{Sp}(A)$. $1-\lambda \leq 2$; $\lambda - 1 \in [-2, 2]$; $\lambda - 1 \in [-2, 2]$.

Ainsi $\exists ! \theta \in [0, \pi]$, $\lambda - 1 = 2 \cos \theta$; $\exists ! \theta \in [0, \pi]$, $\lambda = 2(1 + \cos \theta)$.

2. $\forall \lambda \in \text{Sp}(A)$, $\exists ! \theta \in [0, \pi]$, $\lambda = 2(1 + \cos \theta)$.

c) soit $\lambda \in S_1(A)$. $\exists \theta \in [0, \pi]$, $\lambda = 2(1 - \cos \theta)$

Alors $A - \lambda I_n = A - 2(1 - \cos \theta)I_n = A(\theta)$ n'est pas inversible donc
 $\exists r \in \mathbb{N}, r \geq 0$, $\theta = \frac{r\pi}{n+1}$.

Réciproquement soit $r \in \mathbb{N}, r \geq 0$. Posons $\theta = \frac{r\pi}{n+1}$ et $\lambda = 2(1 - \cos \theta)$.

$A - \lambda I_n = A(\theta)$ et $A(\theta)$ n'est pas inversible car $\theta = \frac{r\pi}{n+1}$ avec $r \in \mathbb{N}, r \geq 0$ donc
 λ est une valeur propre de A .

Finalement $S_1(A) = \{ 2(1 - \cos \theta); \theta \in \{ \frac{r\pi}{n+1}; r \in \mathbb{N}, r \leq n \} \}$.

Pour $r \in \mathbb{N}, r \leq n$, $\theta_r = \frac{r\pi}{n+1}$ et $\lambda_r = 2(1 - \cos \theta_r)$.

Alors $S_1(A) = \{ \lambda_r; r \in \mathbb{N}, r \leq n \}$

$0 < \theta_1 < \theta_2 < \dots < \theta_n < \pi$ et $\cos$ est strictement décroissant sur $[0, \pi]$.

Ainsi $1 > \cos \theta_1 > \cos \theta_2 > \dots > \cos \theta_n > -1$, $0 < 1 - \cos \theta_1 < 1 - \cos \theta_2 < \dots < 1 - \cos \theta_n < 2$

Donc $0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_n < 2$.

En posant $r \in \mathbb{N}, r \leq n$, $\theta_r = \frac{r\pi}{n+1}$ et $\lambda_r = 2(1 - \cos \theta_r)$ on a :

$$S_1(A) = \{ \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \}$$

et

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n$$

En particulier A admet n valeurs propres distinctes.

Q4 Vecteurs propres de la matrice A .

a) $r \in \mathbb{N}, r \leq n$. $\theta_r = \frac{r\pi}{n+1}$. $\lambda_r = 2(1 - \cos \theta_r)$.

Soit $X \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. $\lambda \in S_1(A, \lambda_r) \Leftrightarrow AX = \lambda_r X \Leftrightarrow (A - 2(1 - \cos \theta_r)I_n)X = 0$

$\lambda \in S_1(A, \lambda_r) \Leftrightarrow A(\theta_r)X = 0 \Leftrightarrow X \in \text{Ker} \begin{pmatrix} \sin(\theta_r) \\ \cos(\theta_r) \\ \vdots \\ \sin(\theta_r) \end{pmatrix}$

dim

En posant $\lambda_r = \begin{pmatrix} \sin(\theta_r) \\ \cos(\theta_r) \\ \vdots \\ \sin(\theta_r) \end{pmatrix}$, X_r est le (unique) vecteur propre de A associé à la valeur propre λ_r dont la première composante est $\frac{1}{n+1}$.

Noter que $S_1(A, \lambda_r) = \text{Ker}(X_r)$ avec $\lambda_r = \begin{pmatrix} \sin(\theta_r) \\ \cos(\theta_r) \\ \vdots \\ \sin(\theta_r) \end{pmatrix}$.

b) $p, q \in \mathbb{N}^*$ tel que : $3 \leq p < q \leq n$.

$t\lambda_p A X_q \in \Pi_2(\mathbb{R})$ donc $t\lambda_p A X_q$ est symétrique n.s. !

3 Mais $t\lambda_p A X_q = t(t\lambda_p A X_q) = t\lambda_q A^t(t\lambda_p) = t\lambda_q A X_p$. $t\lambda_p A X_q = t\lambda_q A X_p$
A est symétrique

$A X_q = \lambda_q X_q$ et $A X_p = \lambda_p X_p$.

Donc $t\lambda_p A X_q = t\lambda_q A X_p$ donc : $t\lambda_p (\lambda_q X_q) = t\lambda_q \lambda_p X_p$, $\lambda_q t\lambda_p X_q = \lambda_p t\lambda_q X_p$.

Si aussi $t\lambda_p X_q \in \Pi_2(\mathbb{R})$ donc $t\lambda_p X_q$ est symétrique ; $t\lambda_p X_q = t(t\lambda_p X_q) = t\lambda_q X_p$.

3 donc $\lambda_q t\lambda_p X_q = \lambda_p t\lambda_p X_p$; $(\lambda_q - \lambda_p) t\lambda_p X_q = 0$; $t\lambda_p X_q = 0$ car $\lambda_p \neq \lambda_q$.

1 c) Soit $\theta \in]0, \pi[$. $z + e^{i\omega_1} + \dots + e^{i\omega_n} = \sum_{k=0}^n (e^{i\omega})^k = \frac{1 - (e^{i\omega})^{n+1}}{1 - e^{i\omega}}$; $\sum_{k=0}^n e^{i\omega k} = \frac{1 - e^{i\omega(n+1)}}{1 - e^{i\omega}}$.

Soit $p \in \mathbb{N}$, $\theta_p = \frac{\pi p}{n+1}$.

La somme des cosinus des composantes de λ_p est $t\lambda_p X_p$ d'où $\sum_{k=0}^n \cos(k\theta_p)$.

Mais $t\lambda_p X_p = \sum_{k=0}^n \frac{1 - \cos((k+1)\theta_p)}{2} = \sum_{k=0}^n \frac{1 - \cos((k+1)\theta_p)}{2} = \frac{n+1}{2} - \frac{1}{2} \sum_{k=0}^n \cos((k+1)\theta_p)$.

$t\lambda_p X_p = \frac{n+1}{2} - \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left(\sum_{k=0}^n e^{i(k+1)\theta_p} \right) = \frac{n+1}{2} - \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left[\frac{1 - (e^{i\theta_p})^{n+1}}{1 - e^{i\theta_p}} \right]$
 $\theta_p \in]0, \pi[$!

$e^{i(k+1)\theta_p} = e^{i(k+1)\frac{\pi p}{n+1}} = 1$; $\frac{1 - (e^{i\theta_p})^{n+1}}{1 - e^{i\theta_p}} = 0$

3 Ainsi la somme des cosinus des composantes de λ_p est : $t\lambda_p X_p = \frac{n+1}{2}$.

d) $P = (p_{k\ell})$ avec $p_{k\ell} = \sin(k\theta_\ell)$ pour tout $(k, \ell) \in \mathbb{N}, n+1^2$.

$\forall (k, \ell) \in \mathbb{N}, n+1^2$, $p_{k\ell} = \sin(k\theta_\ell) = \sin\left(k, \frac{\pi}{n+1}\right) = \sin\left(k, \frac{\ell\pi}{n+1}\right) = \sin(\ell\theta_k) = p_{\ell k}$.

1 Ainsi P est symétrique.

$P^t = {}^t P P = (\alpha_{ee})$. α_{ee} est l'élément à gauche le produit de la e^{ie} ligne de ${}^t P$ avec la e^{ie} colonne de P . donc $\alpha_{ee} = (\lambda_e)_{ee} \lambda_e$.

Ainsi $P^t = {}^t P P = ({}^t \lambda_e \lambda_e)$. $\lambda_e \lambda_e = \begin{cases} 0 & \text{si } e \neq e' \\ \frac{n+1}{2} & \text{si } e = e' \end{cases}$

5 Ainsi $\underline{P = \frac{n+1}{2} I_n}$. $(\frac{2}{n+1} P) P = I_n$.

2 P est inversible et $P^{-1} = \frac{2}{n+1} P$.

Rappelons que pour tout $P \in GL_n(\mathbb{R})$, λ_P est un scalaire propre de A associé à la valeur propre λ_P . $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ est une suite de n valeurs propres distinctes, $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ est une suite de n valeurs propres de A qui est de dimension n .
 Or $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ est une base de $\Pi_{n,n}(\mathbb{R})$ constituée de valeurs propres de A appartenant associées aux valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$.

comme P est la matrice de passage de la base canonique de $\Pi_{n,n}(\mathbb{R})$ à la base $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ on a : $\underline{P^{-1} A P = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix}}$.

95 a) 0 n'est pas valeur propre de A ($0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_n < \dots$) donc A est inversible. $\underline{2 \in \Pi_{n,n}(\mathbb{R})}$ d $AZ = B$ admet une solution et une seule : X .

b) pour $w_k = \begin{pmatrix} \omega_k \\ 1 \\ \omega_k \end{pmatrix}$. $A w_k = V = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ donne : $\begin{cases} 2\omega_k - \omega_k = 1 \\ \forall k \in \mathbb{Z}, n \leq k \leq 1, -\omega_{k-1} + (2\omega_k - \omega_{k+1}) = 1 \\ -\omega_{n-1} + 2\omega_n = 1 \end{cases}$

comme w_k est l'unique élément de $\Pi_{n,n}(\mathbb{R})$ qui vérifie $A w_k = V$, pour $\forall k \in \mathbb{Z}, n \leq k \leq 1$, $\omega_k = \frac{1}{2}(k+1-k-1) = 0$ et vérifie que $A \begin{pmatrix} \omega_k \\ 1 \\ \omega_k \end{pmatrix} = V$ nous amène à la preuve de l'équation.

$(\omega_k - \omega_{k-1}) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(k+1-k-1) = 1$.

$\forall k \in \mathbb{Z}, n \leq k \leq 1, -\omega_{k-1} + 2\omega_k - \omega_{k+1} = -\frac{(k-1)(k+1-k-1)}{2} + \frac{2(k+1-k-1)}{2} - \frac{(k+1)(k+1-k-1)}{2} =$

$\frac{n+1}{2} [-(k-1) + 2k - (k+1)] + \frac{1}{2} [-(k-1)(k+1) + 2k(k+1-k-1) - (k+1)(k+1-k-1)] = 0 + \frac{1}{2} [k^2 - 2k + 1 - k^2 + k^2 + k - 1] = 1$.

Ex: $-w_{n-1} + w_n = -\frac{(n-1)(n-1-1)}{2} + \frac{n(n-1-1)}{2} = \frac{1}{2}(-i(i-1) + i) = 1$. Pour $w = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$AW' = V$ et donc: $W' = W$.

3. Ainsi $\forall k \in \overline{1, n-1}$, $w_k = \frac{k(n+1-k)}{2}$. Voir ci-dessus à la p. de 3... si j'ai de la place.

Pour $\forall k \in [0, n]$, $\hat{f}(k) = x(a-x)$. Définissable en $(0,0)$ et $\forall k \in [0, n]$, $\hat{f}'(k) = 0 - 1 = -1$.

x	0	$a/2$	a
$\hat{f}(x)$	0	+	-
$\hat{f}'(x)$	0	↗	↘

$\max_{x \in [0, a]} \hat{f}(x) = \max_{x \in [0, a]} |\hat{f}(x)| = \hat{f}\left(\frac{a}{2}\right) = \frac{a^2}{4}$.
 $\max_{x \in [a, 0]} |\hat{f}(x)| = \frac{a^2}{4}$.
 $\max_{x \in [0, a]} \hat{f}(x) = \max_{x \in [a, 0]} |\hat{f}(x)| = \frac{a^2}{4}$

$N(W) = \max(|w_1|, |w_2|, \dots, |w_n|)$

3. $\forall k \in \overline{1, n-1}$, $|w_k| = \left| \frac{k(n+1-k)}{2} \right| \leq \left\lfloor \frac{(n+1)^2}{4} \right\rfloor = \frac{(n+1)^2}{8}$; $N(W) \leq \frac{(n+1)^2}{8}$.

1. Soit i le plus grand indice tel que $x_i = \min(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Alors comme $AX = B$ en considérant la i^{e} ligne de ce système on obtient:

$-x_{i-1} + 2x_i - x_{i+1} = b_i$; $b_i \geq 0$ donc $2x_i \geq x_{i-1} + x_{i+1} > x_i$; $x_i \geq x_{i-1}$ et $x_i \geq x_{i+1}$!!

4. Donc nécessairement $\exists x_i = \min(x_1, x_2, \dots, x_n)$ avec $i = 1$ ou n .
 Supposons que $i = 1$. $2x_1 - x_2 = b_1$; $x_1 = \frac{b_1}{2} + \frac{(x_2 - x_1)}{2} \geq 0$
 Mais $\min(x_1, \dots, x_n) = x_1 \geq 0$
 $\forall k \in \overline{1, n-1}$, $x_k \geq 0$

Supposons que $i = n$. $-x_{n-1} + 2x_n = b_n$; $x_n = \frac{b_n}{2} + \frac{(x_{n-1} - x_n)}{2} \geq 0$.

Alors $\min(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq 0$; $\forall k \in \overline{1, n-1}$, $x_k \geq 0$.

3. Soient les deux cas: $\forall k \in \overline{1, n-1}$, $x_k \geq 0$.

d) Pour $\gamma = \begin{pmatrix} b_1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ b_n \end{pmatrix}$ et $z = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$. $\forall k \in \overline{1, n-1}$, $\gamma_k = N(b_1) - b_k$ et $\gamma_k = N(b_1) + b_k$.

$\forall k \in \overline{1, n-1}$, $|b_k| \leq N(b_1)$; $\forall k \in \overline{1, n-1}$, $-N(b_1) \leq b_k \leq N(b_1)$

$\forall k \in \overline{1, n-1}$, $0 \leq N(b_1) - b_k$ et $0 \leq N(b_1) + b_k$; $\forall k \in \overline{1, n-1}$, $\gamma_k \geq 0$ et $z_k \geq 0$.

La composition de $\gamma = N(b_1)V - B$ et $z = N(b_1)V + B$ est positive.

D'après c) l'unique solution T_1 (resp. T_2) de l'équation $U \in \Pi_{n,n}(\mathbb{K})$ d' $AV = Y$ (resp. $U \in \Pi_{n,n}(\mathbb{K})$ et $AV = Z$) a des composantes partielles.

$$AT_1 = Y = N(B)V - B = N(B)AW - AX = A(N(B)W - X) ; N(B)W - X = T_1.$$

$$AT_2 = Z = N(B)V + B = N(B)AW + AX = A(N(B)W + X) ; N(B)W + X = T_2.$$

Les composantes de $N(B)W - X$ et $N(B)W + X$ sont partielles.

Ainsi $\forall k \in \overline{1, n}$, $N(B)w_k - x_k \geq 0$ et $N(B)w_k + x_k \geq 0$. $\forall k \in \overline{1, n}$, $-N(B)w_k \leq x_k \leq N(B)w_k$.

$$\underline{\underline{5}} \quad \underline{\underline{\forall k \in \overline{1, n}, |x_k| \leq N(B)w_k = N(B)|w_k| \leq N(B)N(W) \leq N(B)\frac{(n+1)^2}{8}}}.$$

$$\underline{\underline{1}} \quad \underline{\underline{\text{Ainsi } \|x\| \leq N(B)\frac{(n+1)^2}{8} \quad N(K) \leq N(B)\frac{(n+1)^2}{8}}}.$$

Pour finir l'étape suivante $w_k = \frac{k(n+1)}{2}$ nous utilisons la récurrence !

$$2w_1 - w_2 = 1 ; \forall k \in \overline{2, n-1}, -w_k + 2w_k - w_{k+1} = 1 \text{ et } -w_{n-1} + 2w_n = 1.$$

$$\text{Pour } \forall k \in \overline{2, n-1}, y_k = w_k - w_{k-1}$$

$$\forall k \in \overline{2, n-1}, y_{k+1} - y_k = w_{k+1} - w_k - w_k + w_{k-1} = -1. (y_k)_{k \in \overline{2, n-1}} \text{ est arithmétique de raison } -1.$$

$$\forall k \in \overline{2, n-1}, y_k = -(k-2) + y_2 ; \forall k \in \overline{2, n-1}, w_k - w_{k-1} = -(k-1) + w_2 - w_1.$$

$$\sum_{k=2}^n (w_k - w_{k-1}) = - \sum_{k=2}^n (k-1) + (n-1) \underbrace{[w_2 - w_1]}_{w_2} = - \sum_{k=0}^{n-2} k - (n-1) + (n-1)w_2.$$

$$w_n - w_1 = - \sum_{k=0}^{n-2} k + (n-1)w_2 - w_1 ; w_n = - \frac{n(n-1)}{2} + n w_2$$

$$\text{Or } 1 = w_n + w_n - w_{n-1} = w_n + y_n = w_n - (n-1) + y_2 = w_n - (n-1) + w_2 - w_1$$

$$w_n = 1 + (n-1) - (w_2 - w_1) = 1 + (n-1) + 1 - w_2 = n - w_2.$$

$$\text{Alors } - \frac{n(n-1)}{2} + n w_2 = n - w_2 ; (n+1)w_2 = n + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2} ; w_2 = \frac{n}{2}.$$

$$\text{Soit } k \in \overline{2, n-1}. w_k = w_k - w_1 + w_1 = \sum_{i=2}^k (w_i - w_{i-1}) + w_1 = \sum_{i=2}^k y_i + \frac{n}{2}.$$

$$w_k = \sum_{i=2}^k (-(i-1) + y_2) + \frac{n}{2} = - \sum_{i=0}^{k-2} i + (k-1)y_2 + \frac{n}{2} = - \sum_{i=0}^{k-2} i + (k-1)(w_2 - 1) + \frac{n}{2}.$$

$$w_k = - \sum_{i=0}^{k-2} i + k \times \frac{n}{2} = - \frac{k(k-1)}{2} + \frac{k n}{2} = \frac{k}{2} (n - (k-1)) = \frac{k(n+1-k)}{2}.$$

$$w_k = \frac{k(n+1-k)}{2}. \text{ Ceci vaut aussi pour } k=1. \text{ Donc } \forall k \in \overline{1, n}, w_k = \frac{k(n+1-k)}{2}.$$

91) a) Posons $\forall x \in [0,1], u(x) = \int_1^x (t-1)g(t)dt$ et $v(x) = \int_0^x t g(t)dt$.

u (resp. v) est la primitive sur $[0,1]$ de la fonction $x \mapsto (x-1)g(x)$ (resp. $x \mapsto xg(x)$), qui est continue sur $[0,1]$, qui prend la valeur 0 à 1 (resp. 0). Ainsi u et v sont dérivables sur $[0,1]$; $x \mapsto -xu(x)$ et $x \mapsto (x-1)v(x)$ également. Or :

$$\forall x \in [0,1], L(x) = -xu(x) + (x-1)v(x).$$

Ainsi L est dérivable sur $[0,1]$ comme somme de deux fonctions dérivables sur $[0,1]$.

$$\forall x \in [0,1], L'(x) = -u(x) - xu'(x) + v(x) + (x-1)v'(x).$$

$$\forall x \in [0,1], L'(x) = -u(x) - x(x-1)g(x) + v(x) + (x-1)xg(x) = -u(x) + v(x). L' = v - u.$$

L' est dérivable sur $[0,1]$ comme différence de deux fonctions dérivables sur $[0,1]$.

$$\forall x \in [0,1], L''(x) = v'(x) - u'(x) = xg(x) - (x-1)g(x) = g(x).$$

4 $\forall x \in [0,1], L''(x) = g(x)$. Notons que L est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0,1]$.

b) Analyse / unicité. Supposons que f soit solution.

$$f'' = g = L''. \exists \alpha \in \mathbb{R}, f' = L' + \alpha; \exists \beta \in \mathbb{R}, \forall x \in [0,1], f(x) = L(x) + \alpha x + \beta.$$

$$a = f(0) = L(0) + \alpha \cdot 0 + \beta = 0 + 0 + \beta; b = f(1) = 0 + \alpha + \beta. \beta = a \text{ et } \alpha = b - a.$$

$$\forall x \in [0,1], f(x) = L(x) + (b-a)x + a. \text{ D'où l'unicité.}$$

Synthèse / existence. Posons $\forall x \in [0,1], f(x) = L(x) + (b-a)x + a$.

$$f(0) = L(0) + (b-a) \cdot 0 + a = a \text{ et } f(1) = L(1) + b - a + a = b.$$

$x \mapsto L(x)$ et $x \mapsto (b-a)x + a$ sont de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0,1]$ donc f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0,1]$.

$$\forall x \in [0,1], f''(x) = L''(x) + 0 = L''(x) = g.$$

f est solution. D'où l'existence.

5 Il existe une fonction f de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0,1]$ et une seule telle que :

$$f(0) = a, f(1) = b \text{ et } \forall x \in [0,1], f''(x) = g(x). \forall x \in [0,1], f(x) = L(x) + (b-a)x + a.$$

92) a) f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0,1]$ et $f'' = g$. g est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0,1]$,

f' aussi. Ainsi f est de classe $\mathcal{C}^4$ sur $[0,1]$.

b) Je te demande de montrer que :

$$\forall (a, h) \in [0, 1]^2, \left| f(b) - f(a) - (b-a)f'(a) - \frac{(b-a)^2}{2!} f''(a) - \frac{(b-a)^3}{3!} f'''(a) \right| \leq \frac{(b-a)^4}{4!} \max_{t \in [a, b]} |f^{(4)}(t)|$$

Remarque : $\forall t \in [a, b] \in [0, 1]^2, \max_{t \in [a, b]} |f^{(4)}(t)| \leq \max_{t \in [0, 1]} |f^{(4)}(t)| = \max_{t \in [0, 1]} |g^{(4)}(t)| = \pi_2$

Soit $x \in [0, 1]$ et soit $h \in \mathbb{R}^+$ tel que : $0 \leq x-h < x+h \leq 1$.

En posant $b = x+h$ et $a = x-h$ puis $b = x+h$ et $a = x$ on obtient :

$$\underbrace{|f(x+h) - f(x-h) - 2f(x) - \frac{h^2}{2} f''(x) - \frac{h^3}{6} f'''(x)|}_{A(x)} \leq \frac{h^4}{4!} \pi_2 \quad \text{et}$$

$$\underbrace{|f(x-h) - f(x+h) - 2f(x) - \frac{h^2}{2} f''(x) + \frac{h^3}{6} f'''(x)|}_{B(x)} \leq \frac{h^4}{4!} \pi_2.$$

$$|f(x+h) - 2f(x) + f(x-h) - h^2 f''(x)| = |A(x) + B(x)| \leq |A(x)| + |B(x)| \leq 2 \frac{h^4}{4!} \pi_2 = \frac{\pi_2 h^4}{12}.$$

$x-h < x+h$ donc $h > 0$ donc $h^2 > 0$.

7 Ainsi $\left| \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} - f''(x) \right| \leq \frac{\pi_2 h^2}{12}$ lorsque $x \in [0, 1]$, $h \in \mathbb{R}^+$ et $0 \leq x-h < x+h \leq 1$.

Q3 Discrétisation de l'équation $f'' = g$ avec $f(0) = a$ et $f(1) = b$.

a) $\forall h \in [1/n, 1]$, $\frac{y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1}}{h^2} = g(x_k)$. $\forall h \in [1/n, 1]$, $-y_{k+1} + 2y_k - y_{k-1} = -h^2 g(x_k)$.

Donc : $-y_1 + 2y_0 = y_0 - h^2 g(x_0) = a - h^2 g(x_0)$.

$\forall h \in [1/n, 1]$, $-y_{k+1} + 2y_k - y_{k-1} = -h^2 g(x_k) = -h^2 g(kh)$.

$-y_{n-1} + 2y_n = y_n - h^2 g(x_n) = b - h^2 g(x_n)$.

4 Posons $B = \begin{pmatrix} a - h^2 g(x_0) \\ -h^2 g(x_1) \\ -h^2 g(x_2) \\ \vdots \\ -h^2 g(x_{n-1}) \\ b - h^2 g(x_n) \end{pmatrix}$. Alors $AY = B$. Notamment : $B = \begin{pmatrix} a - h^2 g(x_0) \\ -h^2 g(x_1) \\ \vdots \\ -h^2 g(x_{n-1}) \\ b - h^2 g(x_n) \end{pmatrix}$.

b) Posons $G = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = A(F \cdot Y) = AF - AY = AF - B$ $a = f(0) = f(x_0)$ $y(k) = g(x_k) = f'(x_k)$.

$$y_2 = 2f(x_1) - f(x_0) - a + h^2 g(x_1) = -h^2 \left[\frac{f(x_1) - 2f(x_0) + f(x_2)}{h^2} - f''(x_1) \right]$$

$$|g_1| = h \left| \frac{f(x_1) - f(x_0)}{h} - f'(x_0) \right| = h \left| \frac{f(x_1) - f(x_0)}{h} - f'(x_0) \right| \leq \frac{\pi_2 h^2}{12}$$

$$\forall k \in \overline{0, n-1}, g_k = -f(x_{k+1}) + 2f(x_k) - f(x_{k-1}) + h^2 g(x_k).$$

$$\forall k \in \overline{0, n-1}, |g_k| = h^2 \left| \frac{f(x_{k+1}) - f(x_k) + f(x_{k-1})}{h^2} - g(x_k) \right| \leq h^2 \times \frac{\pi_2 h^2}{12} = \frac{\pi_2 h^4}{12}$$

$$\begin{cases} x_{k+1} = x_k + h \\ x_{k-1} = x_k - h \end{cases}$$

$$g_k = -f(x_{k+1}) + 2f(x_k) - f(x_{k-1}) + h^2 g(x_k) = -f(x_{k+1}) + 2f(x_k) - f(x_{k-1}) + h^2 g''(x_k)$$

$$|g_k| = h^2 \left| \frac{f(x_{k+1}) - f(x_k) + f(x_{k-1}))}{h^2} - g''(x_k) \right| \leq h^2 \frac{\pi_2 h^2}{12} = \frac{\pi_2 h^4}{12}$$

$$\begin{cases} x_{k+1} = x_k + h \\ x_{k-1} = x_k - h \end{cases}$$

$$\text{Finalement: } \forall k \in \overline{0, n-1}, |g_k| \leq \frac{\pi_2 h^4}{12}; \quad \max_{1 \leq k \leq n} |g_k| \leq \frac{\pi_2 h^4}{12}$$

$$\underline{\underline{7}} \quad \text{Ainsi } N(A(F-Y)) \leq \frac{\pi_2 h^4}{12}$$

$$c) \text{ Soit } I \text{ QS nous avons ce que } "AX=B \Rightarrow N(X) \leq N(B) \times \frac{(n+1)^2}{8}"$$

$$\text{Ainsi } N(F-Y) \leq N(A(F-Y)) \times \frac{(n+1)^2}{8} \leq \frac{\pi_2 h^4}{12} \times \frac{(n+1)^2}{8} = \frac{\pi_2 (1/n)^4}{12} \times \frac{(n+1)^2}{8}$$

$$\underline{\underline{2}} \quad \text{Donc } N(F-Y) \leq \frac{\pi_2}{96(n+1)^2} \dots \text{Routique mais efficace}$$

$$\underline{\underline{2}} \quad \textcircled{Q4} \text{ Application.. a) Si } g''=0: \pi_2=0. \quad 0 \leq N(F-Y) \leq 0. \quad N(F-Y)=0$$

$$\max_{1 \leq k \leq n} |f(x_k) - g_k| = 0. \quad \underline{\underline{\forall k \in \overline{0, n-1}, g_k = f(x_k).}} \quad a=b=0$$

$$b) \text{ On suppose que: } \forall k \in \overline{0, n-1}, g_k(u) = s. \quad \forall k \in \overline{0, n-1}, f(x_k) = L(x_k) = \alpha \int_0^k (t-1) dt + (u-1) \int_0^k t dt$$

$$\forall k \in \overline{0, n-1}, f(x_k) = \alpha \left[\frac{(t-1)^2}{2} \right]_0^k + (u-1) \left[\frac{t^2}{2} \right]_0^k = -\frac{\alpha(u-1)^2}{2} + (u-1) \frac{\alpha^2}{2} = \frac{\alpha(u-1)}{2} [u - (u-1)] = \frac{1}{2} \alpha(u-1)$$

$$\underline{\underline{1}} \quad \forall k \in \overline{0, n-1}, f(x_k) = \frac{1}{2} \alpha(u-1)$$

$$AF = AY = \begin{pmatrix} -k^2 \\ 1 \\ -k \end{pmatrix}; A\left(-\frac{1}{k^2}\right)F = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi $-\frac{1}{k^2}F$ est la W de ISb). Donc $\forall k \in \mathbb{U}, n\mathbb{D}$, $\omega_k = -\frac{1}{k^2}f(x_k) = -(n+1)^2 \frac{1}{k} x_k (x_k - 1)$.

$$\forall k \in \mathbb{U}, n\mathbb{D}, \omega_k = -(n+1)^2 \frac{1}{k} \times \frac{1}{n+1} \left(k \times \frac{1}{n+1} - 1\right) = -(n+1)^2 \times \frac{1}{k(n+1)} k(k - (n+1))$$

4 $\forall k \in \mathbb{U}, n\mathbb{D}$, $\omega_k = -\frac{1}{k} k(k - (n+1)) = \frac{k(n+1-k)}{k}$; on retrouve alors le résultat de ISb).

c) 1, 2, ..., n sont les valeurs de $x \mapsto x$ en 1, 2, ..., n... on peut s'en douter pour :

$a=0, b=0$ et $\forall k \in \mathbb{U}, n\mathbb{D}$, $g(x_k) = x_k$. g est de classe $\mathcal{C}^4$ sur $(0,1)$.

Requête une application f de $(0,1)$ dans $\mathbb{R}$ et une valeur, de classe $\mathcal{C}^4$ sur $(0,1)$ et

telle que: $f'' = g$, $f(0) = a$ et $f(1) = b$.

Pour $\hat{B} = \begin{pmatrix} a - \frac{1}{6}g(x_1) \\ -\frac{1}{3}g(x_2) \\ \frac{1}{6}g(x_3) \\ b - \frac{1}{6}g(x_4) \end{pmatrix}$ et $F = \begin{pmatrix} f(x_1) \\ f(x_2) \\ f(x_3) \\ f(x_4) \end{pmatrix}$. Trouver l'élément γ de $\Pi_{n+1}(12)$ tel que $A\gamma = \hat{B}$.

$g'' = 0$ donc $F = \gamma$. Ainsi $AF = \hat{B} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{6}g(x_1) \\ \frac{1}{3}g(x_2) \\ -\frac{1}{6}g(x_3) \\ \frac{1}{6}g(x_4) \end{pmatrix}$; $A\left(-\frac{1}{k^2}\right)F = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Ainsi $-\frac{1}{k^2}F$ est l'unique solution de l'équation $x \in \Pi_{n+1}(12)$ et $AX = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Posez $Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ 1 \\ 1 \\ z_4 \end{pmatrix} = -\frac{1}{k^2}F$. $\forall k \in \mathbb{U}, n\mathbb{D}$, $z_k = -\frac{1}{k^2}f(x_k) = -\frac{1}{k^2}f(k/n) = -(n+1)^3 f\left(\frac{k}{n+1}\right)$.

Soit par calculer f . Soit $x \in (0,1)$.

$$f(x) = x \int_x^1 (t-1)t dt + (x-1) \int_0^x t^2 dt = x \left[\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} \right]_x^1 + (x-1) \left[\frac{t^3}{3} \right]_0^x = x \left(-\frac{1}{6} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} \right) + (x-1) \frac{x^3}{3}$$

$$f(x) = \frac{x}{6} [-1 - 2x^3 + 3x^2 + 2(x-1)x^3] = \frac{x}{6} [-1 - 2x^3 + 3x^2 + 2x^3 - 2x^2] = \frac{x}{6} (x^2 - 1).$$

$$\forall x \in (0,1), f(x) = \frac{x(x^2 - 1)}{6}.$$

$$\forall k \in \mathbb{U}, n\mathbb{D}, z_k = -(n+1)^3 f\left(\frac{k}{n+1}\right) = -(n+1)^3 \frac{1}{6} \frac{k}{n+1} \left[\frac{k^2}{(n+1)^2} - 1 \right] = -\frac{1}{6} k (k^2 - (n+1)^2).$$

$$\forall k \in \mathbb{U}, n\mathbb{D}, z_k = -\frac{1}{6} k (k + n+1)(k - (n+1)). \quad \forall k \in \mathbb{U}, n\mathbb{D}, z_k = \frac{1}{6} k (n+1+k)(n+1-k).$$