PARTIE I

(Q1) Etude des polynômes T_n.

Nous utiliserons dans cette correction le plus possible "les notations polynomiales"

a) $T_0 = 1$

$T_1 = X$

$T_2 = 2XT_1 - T_0 = 2X^2 - 1$

$T_3 = 2XT_2 - T_1 = 2X(2X^2-1) - X = 4X^3 - 3X$

$T_4 = 2XT_3 - T_2 = 2X(4X^3-3X) - 2X^2 + 1 = 8X^4 - 8X^2 + 1$

$T_0 = 1$, $T_1 = X$, $T_2 = 2X^2 - 1$, $T_3 = 4X^3 - 3X$ et $T_4 = 8X^4 - 8X^2 + 1$.

b) Montrons à l'aide d'une récurrence ⟶ d'ordre 2 que pour tout n dans $\mathbb{N}$, T_n est un polynôme de degré n à coefficients entiers tel que : $T_n(-X) = (-1)^n T_n(X)$.

→ C'est clair pour $n=0$ et $n=1$.

→ Supposons la propriété vraie pour $n-1$ et n ($n \in \mathbb{N}^*$) et montrons la pour $n+1$.

. T_n est un polynôme à coefficients entiers donc $2XT_n$ aussi ; T_{n-1} étant un polynôme à coefficients entiers, par différence $T_{n+1} = 2XT_n - T_{n-1}$ est un polynôme à coefficients entiers.

. $\deg(2XT_n) = n+1$ et $\deg T_{n-1} = n-1$; par conséquent T_{n+1} est de degré $n+1$.

. $T_{n+1}(-X) = 2(-X)T_n(-X) - T_{n-1}(-X) = -2X(-1)^n T_n(X) - (-1)^{n-1} T_{n-1}(X) = (-1)^{n+1}\left(2XT_n - T_{n-1}\right) = (-1)^{n+1} T_{n+1}(X)$;

$(-1)^{n-1} = (-1)^{n+1}$

ceci achève la récurrence.

▼ $\forall n \in \mathbb{N}$, $T_n(-X) = (-1)^n T_n(X)$ signifie que T_n a la parité de n. ▼

c) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $T_{n+1}(1) = 2T_n(1) - T_{n-1}(1)$; $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $T_{n+1}(1) - T_n(1) = T_n(1) - T_{n-1}(1)$, donc $\left(T_{n+1}(1) - T_n(1)\right)_{n \geq 0}$ est une suite constante.

Par conséquent $\forall n \in \mathbb{N}$, $T_{n+1}(1) - T_n(1) = T_1(1) - T_0(1) = 0$.

$(T_n(1))_{n \geq 0}$ est alors une suite constante. Or $T_0(1) = 1$.

Finalement : $\forall n \in \mathbb{N}$, $T_n(1) = 1$.

Il vient aussi : $\forall n \in \mathbb{N}$, $T_n(-1) = (-1)^n T_n(1) = (-1)^n$. $\forall n \in \mathbb{N}$, $T_n(-1) = (-1)^n$.

d) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $T_{n+1} = 2XT_n - T_{n-1}$. $\deg T_{n+1} = n+1$, $\deg T_n = n$ et $\deg T_{n-1} = n-1$.

Le coefficient λ_{n+1} de X^{n+1} dans T_{n+1} est donc deux fois le coefficient λ_n de X^n dans T_n.

Par conséquent : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\lambda_{n+1} = 2\lambda_n$.
$(\lambda_n)_{n\geq 1}$ est une suite géométrique de raison 2 et de premier terme $\lambda_1 = 1$.

Par conséquent : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\lambda_n = 2^{n-1}\lambda_1 = 2^{n-1}$.

cl.. $\lambda_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\lambda_n = 2^{n-1}$.

L'écriture de T_n proposée se justifie car T_n est ou pair ou impair ...

$T_{n+1} = 2XT_n - T_{n-1}$ sachant que $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $n \in [\![2,+\infty[\![$.

$\lambda_{n+1} b_{n+1}$ est le coefficient de X^{n-1} dans T_{n+1}.
Le coefficient de X^{n-1} dans $2XT_n$ est $2\lambda_n b_n$
Le coefficient de X^{n-1} dans T_{n-1} est λ_{n-1}
Il vient alors : $\lambda_{n+1} b_{n+1} = 2\lambda_n b_n - \lambda_{n-1}$

Ou encore : $2^n b_{n+1} = 2\times 2^{n-1} b_n - 2^{n-2}$; pour $n \geq 2$: $b_{n+1} = b_n - \frac{1}{4}$.

$(b_n)_{n\geq 2}$ est une suite arithmétique de premier terme $b_2 = -\frac{1}{2}$ ($T_2 = 2(X^2 - \frac{1}{2})$) et de raison $\frac{-1}{4}$.

$\forall n \in [\![2,+\infty[\![$, $b_n = -\frac{1}{2} + (n-2)\left(\frac{-1}{4}\right)$.

$\forall n \in [\![2,+\infty[\![$, $b_n = -\frac{n}{4}$.

Q2) Etude de la fonction T_n sur $]1,+\infty[$ pour $n \geq 1$.

a) Posons pour tout u dans $]1,+\infty[$, $\varphi(u) = \frac{1}{2}\left(u + \frac{1}{u}\right)$.
φ est dérivable sur $]1,+\infty[$. $\forall u \in]1,+\infty[$ $\varphi'(u) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{u^2}\right) > 0$.
De plus $\lim_{u\to 1} \varphi(u) = 1$ et $\lim_{u\to+\infty} \varphi(u) = +\infty$

φ est continue et strictement croissante sur l'intervalle $]1,+\infty[$. φ réalise une bijection de $]1,+\infty[$ sur l'intervalle $\varphi(]1,+\infty[) =]1,+\infty[$.

♥ Remarque .. $\forall u \in]1,+\infty[$, $\varphi^{-1}(u) = u + \sqrt{u^2-1}$ ♥

Soit $u \in]1,+\infty[$ et $x = \frac{1}{2}\left(u + \frac{1}{u}\right)$. Montrons à l'aide d'une récurrence d'ordre 2 que :

$\forall n \in \mathbb{N}$, $T_n(x) = \frac{1}{2}\left(u^n + \frac{1}{u^n}\right)$ (A fortiori on aura $\forall x \in]1,+\infty[$, $T_n(x) = \frac{1}{2}\left(u^n + \frac{1}{u^n}\right)$).

→ C'est vrai pour $n=0$ et $n=1$.

→ Supposons la propriété vraie pour $n-1$ et n ($n\in\mathbb{N}^*$) et montrons la pour $n+1$.

$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x) = 2\times\frac{1}{2}(u+\frac{1}{u})\frac{1}{2}(u^n+\frac{1}{u^n}) - \frac{1}{2}(u^{n-1}+\frac{1}{u^{n-1}})$

$T_{n+1}(x) = \frac{1}{2}(u^{n+1}+\frac{1}{u^{n-1}}+u^{n-1}+\frac{1}{u^{n+1}} - u^{n-1} - \frac{1}{u^{n-1}}) = \frac{1}{2}(u^{n+1}+\frac{1}{u^{n+1}})$. Ceci achève la récurrence.

b) Soit $x\in]1,+\infty[$ et $n\in\mathbb{N}^*$.

$\exists!\, u\in]1,+\infty[,\ x=\frac{1}{2}(u+\frac{1}{u}) = \varphi(u)$.

$T_n(x) = \frac{1}{2}(u^n+\frac{1}{u^n}) = \varphi(u^n)$. Or $u^n\in]1,+\infty[$ ($n\geq 1$) donc $\varphi(u^n)\in]1,+\infty[$.

Par conséquent si $n\in\mathbb{N}^*$: $\underline{\forall x\in]1,+\infty[,\ T_n(x)\in]1,+\infty[}$.

Soit $x\in[1,+\infty[$. Montrons à l'aide d'une récurrence d'ordre 2 que : $T_n(x)\leq 2^{n-1}x^n$ pour tout n dans $\mathbb{N}^*$

→ $T_1(x) = x \leq 2^{1-1}x^1$

$T_2(x) = 2x^2-1 \leq 2x^2 = 2^{2-1}x^2$

c'est donc vrai pour $n=1$ et $n=2$.

→ Supposons la propriété vraie pour $n-1$ et n ($n\in\mathbb{N}^*$).

Si $x>1$: $T_{n-1}(x) \overset{\text{égalité si } n=1\,!}{\geq} 1$; si $x=1$: $T_{n-1}(x)=1$. Dans les deux cas $T_{n-1}(x)\geq 0$!

donc $T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x) \leq 2xT_n(x) \underset{HR}{\leq} 2x\,2^{n-1}x^n = 2^n x^{n+1} = 2^{n+1-1}x^{n+1}$

Ceci achève la récurrence.

$\underline{\forall x\in[1,+\infty[,\ \forall n\in\mathbb{N}^*,\ T_n(x)\leq 2^{n-1}x^n.}$

Q3) Etude de la fonction T_n sur $[-1,1]$ pour $n\geq 1$.

a) Soit $\theta\in\mathbb{R}$. Montrons à l'aide d'une récurrence d'ordre 2 que : $\forall n\in\mathbb{N},\ T_n(\cos\theta) = \cos n\theta$

→ C'est évident pour $n=0$ et $n=1$.

→ Supposons la propriété vraie pour n et $n-1$ ($n\in\mathbb{N}^*$) et montrons la pour $n+1$.

$T_{n+1}(\cos\theta) = 2\cos\theta\, T_n(\cos\theta) - T_{n-1}(\cos\theta) = 2\cos\theta\cos n\theta - \cos(n-1)\theta$

$T_{n+1}(\cos\theta) = \cos(\theta+n\theta) + \cos(\theta-n\theta) - \cos(n-1)\theta = \cos(n+1)\theta + \cos(-(n-1)\theta) - \cos(n-1)\theta$

Donc $T_{n+1}(\cos\theta) = \cos(n+1)\theta$ ce qui achève la récurrence.

(2) $\underline{\forall n\in\mathbb{N}^{(*)},\ T_n(\cos\theta) = \cos n\theta}$ et ceci pour tout réel θ.

Soit $n\in\mathbb{N}$. Soit $x\in[-1,1]$

$\exists\theta\in\mathbb{R},\ x=\cos\theta$. $|T_n(x)|=|T_n(\cos\theta)|=|\cos n\theta|\leq 1$

Donc $\forall x\in[-1,1],\ |T_n(x)|\leq 1=|T_n(1)|$

Finalement, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\underline{\Pi(T_n)=1}$.

ou $\rightarrow$ $\Pi(T_n)=\max\limits_{x\in[-1,1]}|T_n(x)|$

$\Pi(T_n)=\max\limits_{\theta\in\mathbb{R}}|T_n(\cos\theta)|$

$\Pi(T_n)=\max\limits_{\theta\in\mathbb{R}}|\cos(n\theta)|$

$\Pi(T_n)=1$

b) Soit $n\in\mathbb{N}^*$.

Soit $k\in[\![0,n]\!]$. $T_n(\alpha_k)=T_n\left(\cos\frac{(n-k)\pi}{n}\right)=\cos((n-k)\pi)=(-1)^{n-k}$

$\underline{\forall k\in[\![0,n]\!],\ T_n(\alpha_k)=(-1)^{n-k}}$.

Soit $x\in$ un réel tel que : $|T_n(x)|=\Pi(T_n)$; c'est-à-dire tel que $\underline{|T_n(x)|=1}$.

Si $x>1$: $T_n(x)>1$!

Si $x<-1$: $-x>1$ donc $|T_n(x)|=|T_n(-x)|=T_n(-x)>1$!

Par conséquent : $x\in[-1,1]$. Donc $\exists\theta\in[0,\pi],\ x=\cos\theta$

$1=|T_n(x)|=|T_n(\cos\theta)|=|\cos n\theta|$; $\cos n\theta=1$ ou $\cos(n\theta)=-1$.

Donc $n\theta\equiv 0\,[\pi]$; $\exists\hat{k}\in\mathbb{Z},\ n\theta=\hat{k}\pi$. $\theta=\frac{\hat{k}\pi}{n}$. Comme $\theta\in[0,\pi]$: $\hat{k}\in[\![0,n]\!]$.

Posons $k=n-\hat{k}$.

Alors $k\in[\![0,n]\!]$ et $\theta=\frac{(n-k)\pi}{n}$; donc $x=\cos\frac{(n-k)\pi}{n}=\alpha_k$ avec $k\in[\![0,n]\!]$.

Par conséquent : $\forall x\in\mathbb{R},\ |T_n(x)|=\Pi(T_n)\Rightarrow x\in\{\alpha_0,\alpha_1,\dots,\alpha_n\}$

Réciproquement soit x un élément de $\{\alpha_0,\alpha_1,\dots,\alpha_n\}$. $\exists k\in[\![0,n]\!],\ x=\alpha_k$.

$|T_n(x)|=|T_n(\alpha_k)|=|(-1)^{n-k}|=1=\Pi(T_n)$.

Finalement : $\underline{\forall x\in\mathbb{R},\ |T_n(x)|=\Pi(T_n)\Leftrightarrow x\in\{\alpha_0,\alpha_1,\dots,\alpha_n\}}$ ceci pour $n\in\mathbb{N}^*$.

Q4 Equation différentielle vérifiée par T_n.

a) $n\in\mathbb{N}^*$. $\forall\theta\in\mathbb{R},\ T_n(\cos\theta)=\cos n\theta$

$\forall\theta\in\mathbb{R},\ -\sin\theta\, T_n'(\cos\theta)=-n\sin n\theta$

$$\forall\theta\in]0,\pi[,\ T_n'(\cos\theta)=\frac{n\sin n\theta}{\sin\theta}.$$

Soit $n \in [\![2,+\infty[\![$ et $k \in [\![1,n-1]\!]$.

$T'_n(\alpha_k) = T'_n\left(\cos\left((n-k)\frac{\pi}{n}\right)\right) = \dfrac{n \sin((n-k)\pi)}{\sin\left((n-k)\frac{\pi}{n}\right)} = 0.$

$\underline{\forall n \in [\![2,+\infty[\![,\ \forall k \in [\![1,n-1]\!],\ T'_n(\alpha_k) = 0.}$

Normal $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}$ sont intérieurs à $[-1,1]$ et en ces points T_n admet un extremum local.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $\forall \theta \in]0,\pi[,\ T'_n(\cos\theta) = \dfrac{n \sin n\theta}{\sin\theta}$

$T'_n(1) = \lim\limits_{\theta \mapsto 0^+} T'_n(\cos\theta) = \lim\limits_{\theta \mapsto 0^+} \dfrac{n \sin n\theta}{\sin\theta} = n^2 \quad \left(\dfrac{\sin(n\theta)}{\sin\theta} \underset{0}{\sim} \dfrac{n\theta}{\theta} = n\right).$

$\forall x \in \mathbb{R},\ T_n(-x) = (-1)^n T_n(x).$

$\forall x \in \mathbb{R},\ -T'_n(-x) = (-1)^n T'_n(x).$ Donc $-T'_n(-1) = (-1)^n T'_n(1)$, $T'_n(-1) = (-1)^{n+1} n^2$

$\underline{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ T'_n(1) = n^2 \text{ et } T'_n(-1) = (-1)^{n+1} n^2}$ (ceci vaut encore pour $n=0$).

__b)__ $n \in \mathbb{N}^{(*)}$. $\forall \theta \in \mathbb{R},\ T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta)$; $\forall \theta \in \mathbb{R},\ \cos(n\theta) = T_n(\cos\theta)$!

$\forall \theta \in \mathbb{R},\ -n\sin(n\theta) = -\sin\theta\, T'_n(\cos\theta)$

$\forall \theta \in \mathbb{R},\ -n^2 \cos n\theta = -\cos\theta\, T'_n(\cos\theta) - \sin\theta(-\sin\theta)\, T''_n(\cos\theta)$

$\forall \theta \in \mathbb{R},\ -n^2 T_n(\cos\theta) = -\cos\theta\, T'_n(\cos\theta) + (1-\cos^2\theta)\, T''_n(\cos\theta)$

Ce qui s'écrit encore : $\forall x \in [-1,1],\ (x^2-1)T''_n(x) + xT'_n(x) - n^2 T_n(x) = 0.$

Le polynôme $(X^2-1)T''_n + XT'_n - n^2T_n$ admet donc une infinité de zéros ; il est nul.

Finalement : $\underline{\forall n \in \mathbb{N}^{(*)},\ \forall x \in \mathbb{R},\ (x^2-1)T''_n(x) + xT'_n(x) - n^2T_n(x) = 0.}$

__c)__ Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $j \in [\![0,n-1]\!]$.

Leibniz donne : $((X^2-1)T''_n)^{(j)} = \sum\limits_{k=0}^{j} C_j^k (X^2-1)^{(k)} (T''_n)^{(j-k)} = \sum\limits_{k=0}^{j} C_j^k (X^2-1)^{(k)} T_n^{(j-k+2)}$.

$((X^2-1)T''_n)^{(j)} = C_j^0 (X^2-1)T_n^{(j+2)} + C_j^1 (2X)\, T_n^{(j+1)} + C_j^2\, 2\, T_n^{(j)} + \underline{0}.$

De même $(XT'_n)^{(j)} = \sum\limits_{k=0}^{j} C_j^k X^{(k)} (T'_n)^{(j-k)} = C_j^0 X T_n^{(j+1)} + C_j^1 T_n^{(j)}$

$X^{(0)} = X,\ X^{(1)} = 1$ et $X^{(k)} = 0$ pour $k \geq 2$.

(Tout cela à quelques abus près ... $j=0$ ... $j=1$)

Par conséquent en dérivant j fois $0=(X^2-1)T_n''+XT_n'-n^2T_n$ on obtient :

$0=C_j^0(X^2-1)T_n^{(j+2)}+C_j^1\,2XT_n^{(j+1)}+C_j^2\,2\,T_n^{(j)}+C_j^0\,X\,T_n^{(j+1)}+C_j^1\,T_n^{(j)}-n^2\,T_n^{(j)}$; ou :

$0=(X^2-1)T_n^{(j+2)}+2jXT_n^{(j+1)}+j(j-1)T_n^{(j)}+X\,T_n^{(j+1)}+j\,T_n^{(j)}-n^2\,T_n^{(j)}$.

En prenant la valeur en 1 on obtient :

$0=0+2j\,T_n^{(j+1)}(1)+j(j-1)T_n^{(j)}(1)+T_n^{(j+1)}(1)+jT_n^{(j)}(1)-n^2\,T_n^{(j)}(1)$

Par conséquent : $T_n^{(j+1)}(1)=\dfrac{1}{2j+1}\left[n^2-j-j^2+j\right]T_n^{(j)}(1)$.

$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \forall j\in[\![0,n-1]\!],\ T_n^{(j+1)}(1)=\dfrac{n^2-j^2}{2j+1}\,T_n^{(j)}(1)$.

Ceci vaut encore pour $j=n$ ($0=0$!).

Donc $\forall n\in\mathbb{N}^*, \forall j\in[\![0,n]\!],\ T_n^{(j+1)}(1)=\dfrac{n^2-j^2}{2j+1}\,T_n^{(j)}(1)$

Et même $\forall n\in\mathbb{N}, \forall j\in[\![0,n]\!],\ T_n^{(j+1)}(1)=\dfrac{n^2-j^2}{2j+1}\,T_n^{(j)}(1)$ ... et même $\forall n\in\mathbb{N}, \forall j\in\mathbb{N}$! ok?!

d) La relation du c) donne sans difficulté, pour $n\in\mathbb{N}^*$:

$$\forall j\in[\![1,n]\!],\ T_n^{(j)}(1)=\frac{n^2-(j-1)^2}{2j-1}\times\frac{n^2-(j-2)^2}{2j-3}\times\cdots\times\frac{n^2-1}{2\times1+1}\times\frac{n^2-0}{2\times0+1}\underbrace{T_n^{(0)}(1)}_{=1}$$

$$\text{Donc } \forall j\in[\![1,n]\!],\ T_n^{(j)}(1)=\frac{\prod_{k=0}^{j-1}(n^2-k^2)}{\prod_{k=0}^{j-1}(2k+1)}=\frac{\prod_{k=0}^{j-1}(n-k)\prod_{k=0}^{j-1}(n+k)}{\prod_{k=0}^{j-1}(2k+1)}$$

Soit $j\in[\![1,n]\!]$. $\prod_{k=0}^{j-1}(n-k)=n(n-1)\cdots(n-j+1)=\dfrac{n!}{(n-j)!}$. $\prod_{k=0}^{j-1}(n+k)=n(n+1)\cdots(n+j-1)=\dfrac{(n+j-1)!}{(n-1)!}$

$$\prod_{k=0}^{j-1}(2k+1)=(2j-1)(2j-3)\cdots3\times1=\frac{(2j)!}{(2j)(2j-2)\cdots4\times2}=\frac{(2j)!}{2^j\times j!}=\frac{(2j-1)!}{2^{j-1}(j-1)!}$$

$$T_n^{(j)}(1)=\frac{(n+j-1)!}{(n-1)!}\ \frac{n!}{(n-j)!}\ \frac{2^{j-1}(j-1)!}{(2j-1)!}=n\cdot2^{j-1}\frac{(j-1)!\,(n+j-1)!}{(2j-1)!\,(n-j)!}$$

Finalement : $\forall n\in\mathbb{N}^*, \forall j\in[\![1,n]\!], T_n^{(j)}(1)=p_n\,2^{j-1}\dfrac{(j-1)!\,(n+j-1)!}{(2j-1)!\,(n-j)!}$ avec $p_n=n$.

PARTIE 2 — Ici $n \in \mathbb{N}^*$

Après Tchebychev, Lagrange !

Q1.- Etude d'une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

a) Soit $k \in [\![0,n]\!]$. Pour tout $j \in [\![0,n]\!]-\{k\}$, α_j est un zéro de L_k donc :

$\forall j \in [\![0,n]\!]-\{k\}$, $L_k(\alpha_j)=0$.

$$L_k(\alpha_k)=\prod_{\substack{j=0\\ j\neq k}}^{n} \frac{\alpha_k-\alpha_j}{\alpha_k-\alpha_j}=1 \quad ; \quad L_k(\alpha_k)=1.$$

b) $(L_0,L_1,\dots,L_n)$ est une famille de $n+1$ vecteurs de $\mathbb{R}_n[X]$ ($\forall k \in [\![0,n]\!]$, $\deg L_k = n$) qui est un espace vectoriel de dimension $n+1$; pour montrer que cette famille est une base de $\mathbb{R}_n[X]$ il suffit de prouver que c'est une famille libre.

Soit $(a_0,a_1,\dots,a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k L_k = 0$

$$\forall j \in [\![0,n]\!],\ 0=\sum_{k=0}^{n} a_k L_k(\alpha_j) = a_j \underbrace{L_j(\alpha_j)}_{=1} + \sum_{\substack{k=0\\ k\neq j}}^{n} a_k \underbrace{L_k(\alpha_j)}_{=0} = a_j.$$

Donc $\forall j \in [\![0,n]\!]$, $a_j=0$. La famille est bien libre.

Cl.. $(L_0,L_1,\dots,L_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

c) Soit P un élément de $\mathbb{R}_n[X]$ et $(a_0,a_1,\dots,a_n)$ ses coordonnées dans la base $(L_0,L_1,\dots,L_n)$.

$$\forall j \in [\![0,n]\!],\ P(\alpha_j)=\sum_{k=0}^{n} a_k L_k(\alpha_j) = a_j \qquad (L_k(\alpha_j)=0 \text{ si } k\neq j \text{ et } 1 \text{ si } k=j)$$

donc les coordonnées de P dans la base $(L_0,L_1,\dots,L_n)$ sont $(P(\alpha_0),P(\alpha_1),\dots,P(\alpha_n))$

Les coordonnées de T_n dans la base $(L_0,L_1,\dots,L_n)$ sont $((-1)^n,(-1)^{n-1},\dots,(-1)^0)$ car pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, $T_n(\alpha_k)=(-1)^{n-k}$

Cl.. $T_n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}L_k$.

Q2 Majoration de $|P(x)|$ sur $[1,+\infty[$ pour $d^\circ P \leq n$.

$(-1)^{n-k}=1/(-1)^{n-k}$.

a) Soit $x \in [1,+\infty[$ et $k \in [\![0,n]\!]$.

$$L_k(x)=\prod_{\substack{j=0\\ j\neq k}}^{n}(x-\alpha_j) \Big/ \prod_{\substack{j=0\\ j\neq k}}^{n}(\alpha_k-\alpha_j) \quad ; \quad (-1)^{n-k}L_k(x)=\prod_{\substack{j=0\\ j\neq k}}^{n}(x-\alpha_j) \Big/ (-1)^{n-k}\prod_{\substack{j=0\\ j\neq k}}^{n}(\alpha_k-\alpha_j)$$

Rappelons que $-1=\alpha_0<\alpha_1<\dots<\alpha_{n-1}<\alpha_n=1$.

Par conséquent: $\prod_{\substack{j=0\\j\neq k}}^{n}(x-\alpha_j)\geq 0$ car $x\geq 1$.

$$(-1)^{n-k}\prod_{\substack{j=0\\j\neq k}}^{n}(\alpha_k-\alpha_j)=(\alpha_k-\alpha_0)(\alpha_k-\alpha_1)\cdots(\alpha_k-\alpha_{k-1})(-1)^{n-k}(\alpha_k-\alpha_{k+1})(\alpha_k-\alpha_{k+2})\cdots(\alpha_k-\alpha_n)$$

$$=(\alpha_k-\alpha_0)(\alpha_k-\alpha_1)\cdots(\alpha_k-\alpha_{k-1})(-1)(\alpha_k-\alpha_{k+1})(-1)(\alpha_k-\alpha_{k+2})\cdots(-1)(\alpha_k-\alpha_n)$$

$$=\underbrace{(\alpha_k-\alpha_0)}_{\geq 0}\underbrace{(\alpha_k-\alpha_1)}_{\geq 0}\cdots\underbrace{(\alpha_k-\alpha_{k-1})}_{\geq 0}\underbrace{(\alpha_{k+1}-\alpha_k)}_{\geq 0}\underbrace{(\alpha_{k+2}-\alpha_k)}_{\geq 0}\cdots\underbrace{(\alpha_n-\alpha_k)}_{\geq 0}\geq 0.$$

Finalement si $x\in[1,+\infty[$ et si $k\in[\![0,n]\!]$, $(-1)^{n-k}L_k(x)\geq 0$.

Soit $x\in[1,+\infty[$, $T_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\underbrace{(-1)^{n-k}L_k(x)}_{\geq 0}=\sum_{k=0}^{n}|(-1)^{n-k}L_k(x)|=\sum_{k=0}^{n}|L_k(x)|$

$\forall x\in[1,+\infty[$, $T_n(x)=\sum_{k=0}^{n}|L_k(x)|$.

b) $x\in[1,+\infty[$ et $P\in\mathbb{R}_n[X]$.

$$|P(x)|=\left|\sum_{k=0}^{n}P(\alpha_k)L_k(x)\right|\leq\sum_{k=0}^{n}|P(\alpha_k)|\,|L_k(x)|\overset{\alpha_k\in[-1,1]}{\leq}\sum_{k=0}^{n}\Pi(P)\,|L_k(x)|=\Pi(P)\underbrace{\sum_{k=0}^{n}|L_k(x)|}_{T_n(x)}$$

Par conséquent: $\forall P\in\mathbb{R}_n[X]$, $\forall x\in[1,+\infty[$, $|P(x)|\leq\Pi(P)\,T_n(x)$. (4)

c) Soit P un polynôme unitaire de degré n.

Soit $x\in[1,+\infty[$. $T_n(x)\leq\ell^{n-1}x^n$; $|P(x)|\leq\Pi(P)\ell^{n-1}x^n$; $\Pi(P)\geq\dfrac{|P(x)|}{\ell^{n-1}x^n}$.

$P(x)=x^n+\sum_{k=0}^{n-1}a_kx^k$; $\dfrac{P(x)}{x^n}=1+\sum_{k=0}^{n-1}a_k\dfrac{1}{x^{n-k}}$

or $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x^{n-k}}=0$ pour tout $k\in[\![0,n-1]\!]$, donc $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{P(x)}{x^n}=1$, $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{|P(x)|}{x^n}=1$

$\forall x\in[1,+\infty[$, $\Pi(P)\geq\dfrac{1}{\ell^{n-1}}\dfrac{|P(x)|}{x^n}$; en faisant tendre x vers $+\infty$ il vient: $\Pi(P)\geq\dfrac{1}{\ell^{n-1}}$.

$\Pi(T_n)=1$; $\Pi\left(\dfrac{1}{\ell^{n-1}}T_n\right)=\dfrac{1}{\ell^{n-1}}$. De plus T_n est de degré n et le coefficient de X^n dans T_n est ℓ^{n-1}!

Donc $\dfrac{1}{\ell^{n-1}}T_n$ est un polynôme unitaire de degré n et $\Pi\left(\dfrac{1}{\ell^{n-1}}T_n\right)=\dfrac{1}{\ell^{n-1}}$.

▼ Nous venons ainsi de prouver que : $\frac{1}{2^{n-1}} = \min\{N(P) \,;\, P \in \mathbb{R}_n[X], \deg P = n \text{ et } P \text{ unitaire}\}$. Ceci est très intéressant dans le choix des points d'interpolation dans l'interpolation de Lagrange ▼

↳ voir p. 34.

Q3) Majoration de $|P'(x)|$ sur $[1,+\infty[$ pour $d^\circ P \leq n$.

Soit $k \in [\![0,n]\!]$. Sur chacun des intervalles $[\alpha_0,\alpha_1], [\alpha_1,\alpha_2], \dots, [\alpha_{k-2},\alpha_{k-1}], [\alpha_{k-1},\alpha_{k+1}], [\alpha_{k+1},\alpha_{k+2}], \dots, [\alpha_{n-1},\alpha_n]$, L_k est continue, dérivable et s'annule aux deux bornes de l'intervalle. Rolle prouve alors que L'_k s'annule à l'intérieur de chacun de ces $n-1$ intervalles. Rappelons que $\deg L'_k = n-1$ et concluons

ce... L'_k possède $n-1$ racines réelles appartenant à $]-1,1[$ et ceci pour tout $k \in [\![0,n]\!]$.

Le terme de plus haut degré de L_k est $x^n / \prod\limits_{\substack{j=0\\j\neq k}}^{n}(\alpha_k-\alpha_j)$; celui de L'_k est alors :

$n x^{n-1} / \prod\limits_{\substack{j=0\\j\neq k}}^{n}(\alpha_k-\alpha_j)$. Le "coefficient dominant" de L'_k est $n / \prod\limits_{\substack{j=0\\j\neq k}}^{n}(\alpha_k-\alpha_j)$.

Comme nous l'avons déjà prouvé : $(-1)^{n-k}\prod\limits_{\substack{j=0\\j\neq k}}^{n}(\alpha_k-\alpha_j) \geq 0$

Par conséquent le "coefficient dominant" de $(-1)^{n-k} L'_k$ est strictement positif $\left((-1)^{n-k} = \frac{1}{(-1)^{n-k}}\right)$

L'_k ne s'annulant pas et étant continue sur $[1,+\infty[$ y garde un signe constant.

Donc $(-1)^{n-k} L'_k$ garde un signe constant sur $[1,+\infty[$. "Le coefficient dominant" de ce polynôme étant strictement positif sa limite en $+\infty$ est un élément de $]0,+\infty]$!

Par conséquent $(-1)^{n-k} L'_k$ est positif (strictement) sur $[1,+\infty[$.

. $\forall k \in [\![0,n]\!], \forall x \in [1,+\infty[, (-1)^{n-k} L'_k(x) \geq 0$.

b) Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. $P = \sum\limits_{k=0}^{n} P(\alpha_k) L_k$; $P' = \sum\limits_{k=0}^{n} P(\alpha_k) L'_k$.

$\forall x \in [1,+\infty[,\ T'_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} T_n(\alpha_k) L'_k(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \underbrace{(-1)^{n-k} L'_k(x)}_{\geq 0} = \sum\limits_{k=0}^{n} |L'_k(x)|$

$\forall x \in [1,+\infty[,\ T'_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} |L'_k(x)|$.

c) Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$.

$\forall x \in [1,+\infty[$, $|P'(x)| = |\sum_{k=0}^{n} P(x_k) L'_k(x)| \leq \sum_{k=0}^{n} |P(x_k)| |L'_k(x)| \leq \sum_{k=0}^{n} \Pi(P) |L'_k(x)| = \Pi(P) T_n(x)$

Donc $\forall x \in [1,+\infty[$, $|P'(x)| \leq \Pi(P) T_n(x)$ (5)

Q4) Majoration de $|P^{(j)}(x)|$ sur $[1,+\infty[$, pour $0 \leq j \leq d^0 P \leq n$.

a) Fixons k dans $[\![0,n]\!]$.

Montrons par récurrence que pour tout $j \in [\![1,n-1]\!]$, $L_k^{(j)}$ possède au moins $n-j$ racines dans $]-1,1[$.

→ C'est vrai pour $j=1$ d'après Q3 a)

→ Supposons la propriété vraie pour $j \in [\![1,n-2]\!]$ et montrons la pour $j+1$.

Soit $t_1, t_2, \dots, t_{n-j}$ $n-j$ racines de $L_k^{(j)}$ appartenant à $]-1,1[$ et telles que : $t_1 < t_2 < \dots < t_{n-j}$

Sur chacun des intervalles $[t_1,t_2], [t_2,t_3], \dots, [t_{n-j-1},t_{n-j}]$, $L_k^{(j)}$ est continue, dérivable et prend la valeur 0 aux deux bornes. La dérivée de $L_k^{(j)}$, d'après Rolle, s'annule au moins une fois sur chacun des $n-j-1$ intervalles $]t_1,t_2[,]t_2,t_3[, \dots,]t_{n-j-1},t_{n-j}[$

Donc $L_k^{(j+1)}$ s'annule au moins $n-(j+1)$ fois sur $]-1,1[$. Ceci achève la récurrence.

Répondons maintenant à la question. Soit $j \in [\![1,n-1]\!]$.

1°. $L_k^{(j)}$ est un polynôme de degré $n-j$ ($\deg L_k = n$)

2°. $L_k^{(j)}$ a au moins $n-j$ zéros dans $]-1,1[$

Alors $L_k^{(j)}$ a donc exactement $n-j$ zéros réels et ces $n-j$ zéros réels sont dans $]-1,1[$.

c) Pour tout k dans $[\![0,n]\!]$ et pour tout j dans $[\![1,n-1]\!]$, le polynôme $L_k^{(j)}$ possède $n-j$ racines réelles appartenant à $]-1,1[$. A un abus près ceci vaut pour $j=n$.

Soit $j \in [\![1,n]\!]$. $L_k^{(j)}$ garde un signe constant sur $[1,+\infty[$ (dans le cas contraire $L_k^{(j)}$ posséderait un zéro dans $[1,+\infty[$ ...). Il en est de même de $(-1)^{n-k} L_k^{(j)}$. Pour obtenir le signe de $(-1)^{n-k} L_k^{(j)}$ il suffit d'avoir une information sur sa limite en $+\infty$; donc de connaître le signe du coefficient du terme de plus haut degré de $(-1)^{n-k} L_k^{(j)}$

Nous avons vu que le coefficient du terme dominant de $(-1)^{n-\ell} L'_\ell$ est strictement positif. $(-1)^{n-\ell} L_\ell^{(j)}$ étant la dérivée $(j-1)^{\text{ème}}$ de $(-1)^{n-\ell} L'_\ell$, il a un "coefficient dominant" strictement positif aussi.
La limite de $(-1)^{n-\ell} L_\ell^{(j)}$ à $+\infty$ est $+\infty$ ou un nombre strictement positif ; par conséquent :

$\forall x \in [1,+\infty[, \ (-1)^{n-\ell} L_\ell^{(j)}(x) \geq 0 \quad (>0 \,!!)$.

Récap : $\forall \ell \in [\![0,n]\!], \ \forall j \in [\![0,n]\!], \ \forall x \in [1,+\infty[, \ (-1)^{n-\ell} L_\ell^{(j)}(x) \geq 0$.

<u>b)</u> Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. $P = \sum_{k=0}^{n} P(\alpha_k) L_k$. Soit $j \in [\![0,n]\!]$.

$P^{(j)} = \sum_{\ell=0}^{n} P(\alpha_\ell) L_\ell^{(j)}$.

$\forall x \in [1,+\infty[, \ |P^{(j)}(x)| \leq \sum_{\ell=0}^{n} |P(\alpha_\ell)|\,|L_\ell^{(j)}(x)| \leq M(P) \sum_{\ell=0}^{n} |L_\ell^{(j)}(x)|$

De plus : $\forall x \in [1,+\infty[, \ T_n(x) = \sum_{\ell=0}^{n} T_n(\alpha_\ell) L_\ell(x) = \sum_{\ell=0}^{n} (-1)^{n-\ell} L_\ell(x)$

$\forall x \in [1,+\infty[, \ T_n^{(j)}(x) = \sum_{\ell=0}^{n} \underbrace{(-1)^{n-\ell} L_\ell^{(j)}(x)}_{\geq 0} = \sum_{\ell=0}^{n} |(-1)^{n-\ell} L_\ell^{(j)}(x)| = \sum_{\ell=0}^{n} |L_\ell^{(j)}(x)|$

Finalement : $\forall x \in [1,+\infty[, \ |P^{(j)}(x)| \leq M(P)\, T_n^{(j)}(x)$ pour $j \in [\![0,n]\!]$ et $P \in \mathbb{R}_n[X]$

PARTIE 3

Q1) Posons $\forall x \in [-1,1], \ \varphi(x) = \frac{\lambda+1}{2}x + \frac{\lambda-1}{2}$. φ est continue et strictement croissante sur $[-1,1]$ donc $\varphi([-1,1]) = [\varphi(-1), \varphi(1)] = [-1,\lambda]$

$$M(P_\lambda) = \max_{x \in [-1,1]} |P_\lambda(x)| = \max_{x \in [-1,1]} \left|P\left(\frac{\lambda+1}{2}x + \frac{\lambda-1}{2}\right)\right| = \max_{y \in [-1,\lambda]} |P(y)| \underset{\lambda \in [0,1]}{\leq} \max_{y \in [-1,1]} |P(y)| = M(P)$$

Donc $M(P_\lambda) \leq M(P)$.

Q2) <u>a)</u> $\forall x \in \mathbb{R}, \ P_\lambda(x) = P\left(\frac{\lambda+1}{2}x + \frac{\lambda-1}{2}\right)$; $\forall x \in \mathbb{R}, \ P'_\lambda(x) = \frac{\lambda+1}{2} P'\left(\frac{\lambda+1}{2}x + \frac{\lambda-1}{2}\right)$.

$P'_\lambda(1) = \frac{\lambda+1}{2} P'(\lambda)$.

P étant un élément de $\mathbb{R}_n[X]$, P_λ aussi. Appliquons (5) à P_λ.

Il vient : $\forall x \in [1,+\infty[$, $|P_\lambda'(x)| \leq \Pi(P_\lambda)\, T_n'(x)$

Donc $|P_\lambda'(1)| \leq \Pi(P_\lambda)\, T_n'(1) = \Pi(P_\lambda)\, n^2 \leq n^2\, \Pi(P)$.

Soit encore : $\left|\frac{\lambda+1}{2} P'(\lambda)\right| \leq n^2\, \Pi(P)$

Finalement : $|P'(\lambda)| \leq \frac{2n^2}{1+\lambda}\Pi(P)$ ... pour tout $\lambda \in [0,1]$.

b) Posons $Q(X) = P(-X)$. Q est encore un polynôme de degré n.

$Q'(X) = -P'(-X)$.

En appliquant ce qui précède à Q on obtient :

$\forall \lambda \in [0,1]$, $|Q'(\lambda)| \leq \frac{2n^2}{1+\lambda}\Pi(Q)$; ou : $\forall \lambda \in [0,1]$, $|-P'(-\lambda)| \leq \frac{2n^2}{1+\lambda}\Pi(Q)$.

Notons que : $\Pi(Q) = \max\limits_{x \in [-1,1]} |P(-x)| = \max\limits_{y \in [-1,1]} |P(y)| = \Pi(P)$

Donc $\forall \lambda \in [0,1]$, $|P'(-\lambda)| \leq \frac{2n^2}{1+\lambda}\Pi(P)$

ce qui peut s'écrire : $\forall \lambda \in [-1,0]$, $|P'(\lambda)| \leq \frac{2n^2}{1-\lambda}\Pi(P) = \frac{2n^2}{1+|\lambda|}\Pi(P)$.

Finalement : $\forall \lambda \in [-1,1]$, $|P'(\lambda)| \leq \frac{2n^2}{1+|\lambda|}\Pi(P) \underset{1+|\lambda|\geq 1}{\leq} 2n^2\,\Pi(P)$.

$\forall \lambda \in [-1,1]$, $|P'(\lambda)| \leq 2n^2\,\Pi(P)$ donc : $\underline{\Pi(P') \leq 2n^2\,\Pi(P)}$. (7).

Q3) Montrons cette relation par récurrence sur j.

- C'est clair pour $j=0$ (et 1)
- Supposons la propriété vraie pour $j \in [\![0,n-1]\!]$ et montrons la pour $j+1$.

$P^{(j)}$ est un polynôme de degré $n-j$ et $n-j \geq 1$. Donc :

$\Pi(P^{(j+1)}) = \Pi((P^{(j)})') \leq 2(n-j)^2\,\Pi(P^{(j)}) \underset{\text{H.R.}}{\leq} 2(n-j)^2 2^j \left[\frac{n!}{(n-j)!}\right]^2 \Pi(P)$

$\Pi(P^{(j+1)}) \leq 2^{j+1}\left[\frac{(n-j)\,n!}{(n-j)!}\right]^2 \Pi(P) = 2^{j+1}\left[\frac{n!}{(n-j-1)!}\right]^2 \Pi(P)$ ce qui achève la récurrence.

$$\forall j \in [\![0,n]\!],\quad \Pi(P^{(j)}) \le 2^j \left[\frac{n!}{(n-j)!}\right]^2 \Pi(P) \qquad (8).$$

b) Améliorons ! Reprenons alors les idées de Q2 et les notations de Q1.

Soit $j \in [\![0,n]\!]$. $P_\lambda^{(j)}(x) = \left(\frac{\lambda+1}{2}\right)^j P^{(j)}\left(\frac{\lambda+1}{2}x + \frac{\lambda-1}{2}\right)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

$P_\lambda^{(j)}(1) = \left(\frac{\lambda+1}{2}\right)^j P^{(j)}(\lambda)$ (6) appliqué à P_λ pour $x=1$

$$|P^{(j)}(\lambda)| = \left(\frac{2}{\lambda+1}\right)^j |P_\lambda^{(j)}(1)| \le \left(\frac{2}{\lambda+1}\right)^j \Pi(P_\lambda)\, T_n^{(j)}(1) \le \left(\frac{2}{\lambda+1}\right)^j \Pi(P)\, T_n^{(j)}(1)$$

$\Pi(P_\lambda) \le \Pi(P)$ ... et $T_n^{(j)}(1) \ge 0$

$$|P^{(j)}(\lambda)| \le \left(\frac{2}{\lambda+1}\right)^j \Pi(P)\, \gamma_n\, 2^{j-1} \frac{(j-1)!\,(n+1-j)!}{(2j-1)!\,(n-j)!} \text{ si } j \ge 1.$$

Supposons désormais $j \in [\![1,n]\!]$.

Donc $\forall \lambda \in [0,1]$, $|P^{(j)}(\lambda)| \underset{\lambda+1\ge 1}{\le} 2^j \Pi(P)\, n\, 2^{j-1} \frac{(j-1)!\,(n+1-j)!}{(2j-1)!\,(n-j)!} = n\, 2^{2j-1} \frac{(j-1)!\,(n+1-j)!}{(2j-1)!\,(n-j)!} \Pi(P)$

Notons que ceci vaut encore pour $\lambda \in [-1,0]$. Posons $Q(x) = P(-x)$.

- Q est un polynôme de degré $n \ge 1$
- $Q^{(j)}(x) = (-1)^j P^{(j)}(-x)$.
- $\Pi(Q) = \Pi(P)$

Donc $\forall \lambda \in [0,1]$, $|P^{(j)}(-\lambda)| = |(-1)^j P^{(j)}(-\lambda)| = |Q^{(j)}(\lambda)| \le n\, 2^{2j-1} \frac{(j-1)!\,(n+1-j)!}{(2j-1)!\,(n-j)!} \Pi(Q)$

$$\forall \lambda \in [0,1],\ |P^{(j)}(-\lambda)| \le n\, 2^{2j-1} \frac{(j-1)!\,(n+1-j)!}{(2j-1)!\,(n-j)!} \Pi(P);$$

ou $\forall \lambda \in [-1,0]$, $|P^{(j)}(\lambda)| \le n\, 2^{2j-1} \frac{(j-1)!\,(n+1-j)!}{(2j-1)!\,(n-j)!} \Pi(P)$;

Finalement : $\forall \lambda \in [-1,1]$, $|P^{(j)}(\lambda)| \le n\, 2^{2j-1} \frac{(j-1)!\,(n+1-j)!}{(2j-1)!\,(n-j)!} \Pi(P)$.

Donc $\Pi(P^{(j)}) \le n\, 2^{2j-1} \frac{(j-1)!\,(n+1-j)!}{(2j-1)!\,(n-j)!} \Pi(P)$. Pour comparer au majorant calculons le

quotient $\rho = \dfrac{n\, 2^{2j-1} \frac{(j-1)!\,(n+1-j)!}{(2j-1)!\,(n-j)!} \Pi(P)}{2^j \left[n!/(n-j)!\right]^2 \Pi(P)} = n\, 2^{j-1} \frac{(j-1)!\,(n+1-j)!}{(2j-1)!\,(n-j)!} \times \left[\frac{(n-j)!}{n!}\right]^2 = \frac{2^{j-1}(j-1)!}{(2j-1)!} \frac{(n+1-j)!}{n!} \frac{(n-j)!}{(n-1)!}$

Notons que $\dfrac{2^{j-1}(j-1)!}{(2j-1)!} = \dfrac{(2j-2)(2j-4)\cdots 2}{(2j-1)(2j-2)\cdots 1} = \dfrac{1}{(2j-1)(2j-3)\cdots 3 \times 1} = \dfrac{1}{\prod_{k=0}^{j-1}(2k+1)} \le 1$

$j \geq 1$ donc $n+1-j \leq n$ et $n-j \leq n-1$

Par conséquent : $(n+1-j)! \leq n!$ et $(n-j)! \leq (n-1)!$

donc $\dfrac{(n+1-j)!}{n!} \leq 1$ et $\dfrac{(n-j)!}{(n-1)!} \leq 1$

Par conséquent $\delta = \dfrac{2^{j-1}(j-1)!}{(2j-1)!} \times \dfrac{(n+1-j)!}{n!} \times \dfrac{(n-j)!}{(n-1)!} \leq 1$.

La dernière majoration est meilleure que celle obtenue en (8).

Remarque.. Considérons une application f de $[-1,1]$ dans $\mathbb{R}$. Pour approximer f sur $[-1,1]$ on choisit n points distincts $x_1, x_2, \dots, x_n$ de $[-1,1]$. On construit alors un polynôme P qui coïncide avec f en $x_1, x_2, \dots, x_n$. $P(x)$ est alors une valeur approchée de $f(x)$ lorsque x appartient à $[-1,1]$. C'est l'interpolation de Lagrange. Précisons.

1°. $\exists! \ P_f \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $P_f(x_i) = f(x_i)$

2°. Supposons f de classe C^n sur $[-1,1]$.

$\forall x \in [-1,1]$, $|P_f(x) - f(x)| \leq \dfrac{1}{n!}\left[\max_{t\in[-1,1]} |f^{(n)}(t)|\right] |(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)|$

donc $\forall x \in [-1,1]$, $|P_f(x) - f(x)| \leq \dfrac{1}{n!} \max_{t\in[-1,1]} |f^{(n)}(t)| \, \Delta_n$ avec $\Delta_n = \max_{x\in[-1,1]} |(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)|$

Notons que si $Q = (X-x_1)(X-x_2)\cdots(X-x_n)$: Q est unitaire, $\Pi(Q) = \Delta_n$ et $\deg Q = n$ ... you see?

3°.. $P_f = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\, \hat{L}_i$ avec $\hat{L}_i = \dfrac{1}{\prod_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n}(x_i - x_k)} \prod_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n} (X - x_k)$ (décidément !)

L'approximation de P_f par f est d'autant meilleure que $\dfrac{1}{n!} \max_{t\in[-1,1]} |f^{(n)}(t)| \, \Delta_n$ est "petit".

On ne peut guère jouer sur $\max_{t\in[-1,1]} |f^{(n)}(t)|$ ... on ne connaît même pas f ! Reste à jouer sur Δ_n.

En clair il convient de choisir $x_1, x_2, \dots, x_n$ pour que Δ_n soit le plus petit possible.

Le problème précédent donne la réponse.

En effet $\Pi\left(\frac{1}{2^{n-1}} T_n\right) = \min \{ \Pi(P) \mid P \in \mathbb{R}_n[X], P \text{ unitaire et } \deg P = n \}$

$T_n(\cos x) = \cos nx$ montre que les n zéros de T_n sont $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ avec $\beta_k = \cos\left(\frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n}\right)$

Or $\frac{1}{2^{n-1}} T_n = (X-\beta_1)(X-\beta_2)\cdots(X-\beta_n)$. Par conséquent Δ_n est minimum lorsque $x_1, x_2, \dots, x_n$ sont les zéros de T_n !