

PARTIE I I : étude d'une intégrale

Q1 a) Soient $p \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{N}^*$. Intégrons par parties $I(p, q) = \int_0^1 t^{2p} (1-t^2)^q dt$

$$I(p, q) = \int_0^1 \underset{u}{t^{2p}} \underset{v}{(1-t^2)^q} dt = \left[\frac{1}{2p+1} t^{2p+1} (1-t^2)^q \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{2p+1} t^{2p+1} q (-2t) (1-t^2)^{q-1} dt$$

$$I(p, q) = \frac{2q}{2p+1} \int_0^1 t^{2p+2} (1-t^2)^{q-1} dt = \frac{2q}{2p+1} I(p+1, q-1).$$

$\forall p \in \mathbb{N}, \forall q \in \mathbb{N}^*, I(p, q) = \frac{2q}{2p+1} I(p+1, q-1).$

b) * Recherche de la formule...

$$I(p, q) = \frac{2q}{2p+1} I(p+1, q-1) = \frac{2q}{2p+1} \times \frac{2(q-1)}{2p+3} \times I(p+2, q-2) = \frac{2q}{2p+1} \times \frac{2(q-1)}{2p+3} \times \dots \times \frac{2 \times 1}{2(p+q)-1} I(p+q, 0)$$

$$I(p, q) = \frac{2^q q!}{\prod_{k=p}^{p+q-1} (2k+1)} I(p+q, 0). \quad I(p+q, 0) = \int_0^1 t^{2(p+q)} dt = \frac{1}{2p+2q+1}$$

$$I(p, q) = \frac{2^q q!}{\prod_{k=p}^{p+q} (2k+1)} \cdot \prod_{k=p}^{p+q} \frac{2k+1}{2k+1} = \frac{(2p+2q+1)!}{(2p)! (2p+2) (2p+4) \dots (2p+2q)} = \frac{(2p+2q+1)!}{(2p)! 2^q (p+1)(p+2) \dots (p+q)} = \frac{(2p+2q+1)!}{(2p)! 2^q (p+q)!} \cdot p!$$

donc $I(p, q) = \frac{2^q q! (2p)! 2^q (p+q)!}{(2p+2q+1)! \cdot p!}$

Soit: $I(p, q) = \frac{2^{2q} q! (p+q)! (2p)!}{(2p+2q+1)! \cdot p!}$

* démonstration de la formule.

montrons par récurrence sur q que pour tout $q \in \mathbb{N}$, la propriété $\forall p \in \mathbb{N}, I(p, q) = \frac{2^{2q} q! (p+q)! (2p)!}{(2p+2q+1)! \cdot p!}$ est vraie.

- Pour $q=0$: $I(p, 0) = \int_0^1 t^{2p} dt = \frac{1}{2p+1}$ pour tout $p \in \mathbb{N}$

$$\frac{2^{2 \times 0} 0! (p+0)! (2p)!}{(2p+2 \times 0+1)! \cdot p!} = \frac{2p!}{(2p+1)!} = \frac{1}{2p+1} \text{ et c'est pour tout } p \in \mathbb{N}$$

La propriété est donc vraie pour $q=0$.

Supposons la propriété vraie pour $q \in \mathbb{N}$ et montrons la pour $q+1$.

Soit $p \in \mathbb{N}$. Montrons que :
$$I(p, q+1) = \frac{2^{2q+2} (q+1)! (p+q+1)! (2p)!}{(2p+2q+3)! p!}.$$

d'après la question a) :
$$I(p, q+1) = \frac{2(q+1)}{2p+1} I(p+1, q)$$

d'après l'hypothèse de récurrence :
$$I(p+1, q) = \frac{2^{2q} q! (p+1+q)! (2p+1)!}{(2p+2+2q+1)! (p+1)!}$$

donc
$$I(p, q+1) = \frac{2^{2q+1} (q+1)! (p+q+1)! (2p+1)!}{(2p+1) (2p+2q+3)! (p+1)!} \quad \text{or} \quad \frac{(2p+1)!}{(2p+1)(p+1)!} = \frac{2(p+1) (2p)!}{(p+1)!} = \frac{2 (2p)!}{p!}$$

donc
$$I(p, q+1) = \frac{2^{2q+2} (q+1)! (p+q+1)! (2p)!}{(2p+2q+3)! p!}, \text{ ceci achève la récurrence.}$$

$$\forall (p, q) \in \mathbb{N}^2, I(p, q) = \frac{2^{2q} q! (p+q)! (2p)!}{(2p+2q+1)! p!} = \frac{2^{2q}}{2p+2q+1} \times \frac{\binom{p}{2p}}{\binom{p+q}{2p+2q} \binom{p}{p+q}}$$

En particulier : $\forall p \in \mathbb{N}, J(p) = I(p, p) = \frac{2^{2p} ((2p)!)^2}{(4p+1)!}$

$$\forall p \in \mathbb{N}, J(p) = \frac{[2^p \times (2p)!]^2}{(4p+1)!} = \frac{2^{2p}}{4p+1} \times \frac{1}{\binom{2p}{4p}}$$

c) Pour $\forall t \in [0, 1]$, $u(t) = t^2(1-t)$. u est dérivable sur $[0, 1]$ et $\forall t \in [0, 1]$, $u'(t) = 2t - 4t^2 = 4t(\frac{1}{2} - t)$

t	0	$\frac{1}{2}$	1
$u'(t)$		+	-
$u(t)$	0	$\nearrow$	$\searrow$ 0

donc $\max_{t \in [0, 1]} u(t) = u(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2} (1 - \frac{1}{2}) = \frac{1}{4}.$

$$\max_{t \in [0, 1]} t^2(1-t) = \frac{1}{4}.$$

soit $p \in \mathbb{N}$. $\forall t \in [0, 1]$, $0 \leq t^{2p}(1-t)^p = [t^2(1-t)]^p \leq (\frac{1}{4})^p$

Intégrons : $0 \leq J(p, p) = J(p) \leq \int_0^1 \frac{1}{4^p} dt = \frac{1}{4^p}.$

Finalement : $\forall p \in \mathbb{N}, 0 \leq J(p) \leq \frac{1}{4^p}.$

Q2 a) Rappel.. Extraît du programme " On définit les fonctions circulaires réciproques mais aucune étude systématique de ces fonctions n'est au programme "

On n'est donc pas obligé de savoir que Arctan est une primitive de $t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$ sur $\mathbb{R}$.

$$f(1) = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = \int_0^{\pi/4} \frac{(1+\tan^2\theta) d\theta}{1+\tan^2\theta} = \frac{\pi}{4}. \quad \underline{\underline{f(1) = \frac{\pi}{4}}}$$

$\begin{cases} t = \tan\theta \\ dt = (1+\tan^2\theta) d\theta \end{cases}$

b) soit $a \in]1, +\infty[$.

$$f\left(\frac{a+1}{a-1}\right) = \int_0^{\frac{a-1}{a+1}} \frac{dt}{1+t^2} = \int_{1/a}^1 \frac{\frac{a^2+1}{(x+1)^2} dx}{1 + \left(\frac{a-1}{x+1}\right)^2} = \int_{1/a}^1 \frac{a^2+1}{x^2+a^2+2ax+a^2x^2+1-2ax} dx = \int_{1/a}^1 \frac{dx}{1+x^2}.$$

$t = \frac{a-1}{x+1}; dt = \frac{-(a^2+1)dx}{(x+1)^2}; x = \frac{a+1}{a-t}$

Remarque.. $t \mapsto \frac{a-1}{a-t}$ est une bijection de classe C^1 de $[0, \frac{a-1}{a+1}]$ sur $[\frac{1}{a}, 1]$.

$$\text{donc } f\left(\frac{a+1}{a-1}\right) = \int_{1/a}^1 \frac{dx}{1+x^2} = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} - \int_0^{1/a} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{4} + f(a) = \frac{\pi}{4} + f(a).$$

$$\text{donc } \forall a \in]1, +\infty[, \quad \underline{\underline{f(a) + f\left(\frac{a+1}{a-1}\right) = f(1) = \frac{\pi}{4}}}. \quad (1)$$

c) soit $a \in [1, +\infty[$

$$f(a) = \int_0^{1/a} \frac{dt}{1+t^2} = \int_0^1 \frac{\frac{1}{a} du}{1 + \frac{u^2}{a^2}} = a \int_0^1 \frac{du}{a^2 + u^2}$$

$$\underline{\underline{\forall a \in [1, +\infty[, \quad f(a) = a \int_0^1 \frac{dt}{a^2+t^2}}}$$

Remarque.. Ne faut pas oublier que: $\forall a \in [1, +\infty[, \quad f(a) = \text{Arctan} \frac{1}{a} = \frac{\pi}{2} - \text{Arctan} a.$

PARTIE II : étude d'une suite de polynômes

Q1) soit $n \in \mathbb{N}$.

$$b = a^2 + 1$$

$$P_n(-a^2) = 0 \Leftrightarrow 1 + \lambda_n (-a^2)^n (1 + a^2)^n \Leftrightarrow \lambda_n = - \frac{1}{(-1)^n a^{2n} (1 + a^2)^n} = \frac{(-1)^{n+1}}{a^{2n} (1 + a^2)^n}$$

$$\text{donc } \forall n \in \mathbb{N}, \lambda_n = \frac{(-1)^{n+1}}{a^{2n} (1 + a^2)^n} = \frac{(-1)^{n+1}}{(a^2 b)^n}$$

Q2) a) $P_0 = 1 + \lambda_0 X^0 (1 - X)^0 = 1 + \lambda_0 = 1 + \frac{(-1)}{1} = 0$

$$\underline{P_0 = Q_0 = 0}$$

$$P_1 = 1 + \lambda_1 X (1 - X) = 1 + \frac{1}{a^2 (1 + a^2)} X (1 - X) = \frac{1}{a^2 (1 + a^2)} [a^2 (1 + a^2) + X - X^2] = \frac{1}{a^2 (1 + a^2)} (X + a^2) (-X + 1 + a^2)$$

$$\text{donc } \underline{Q_1 = \frac{1}{a^2 (1 + a^2)} (-X + 1 + a^2) = \frac{1}{a^2 b} (-X + b)}$$

b) soit $n \in \mathbb{N}$.

$$P_{n+1} - P_n = 1 + \lambda_{n+1} X^{n+1} (1 - X)^{n+1} - 1 - \lambda_n X^n (1 - X)^n = X^n (1 - X)^n [\lambda_{n+1} X (1 - X) - \lambda_n]$$

$$P_{n+1} - P_n = X^n (1 - X)^n \left[\frac{(-1)^{n+2}}{(a^2 b)^{n+1}} X (1 - X) - \frac{(-1)^{n+1}}{(a^2 b)^n} \right] = (-1)^n X^n (1 - X)^n \frac{1}{(a^2 b)^{n+1}} \underbrace{\left[X - X^2 + \overbrace{a^2 (1 + a^2)}^{a^2 b} \right]}_{(X + a^2) (-X + 1 + a^2)}$$

$$\text{donc } P_{n+1} - P_n = \frac{(-1)^n}{(a^2 b)^{n+1}} X^n (1 - X)^n (X + a^2) (-X + 1 + a^2).$$

$$\text{on a donc } (X + a^2) (P_{n+1} - P_n) = \frac{(-1)^n}{(a^2 b)^{n+1}} X^n (1 - X)^n (-X + 1 + a^2) (X + a^2).$$

En divisant par $X + a^2$ il vient : $Q_{n+1} - Q_n = \frac{(-1)^n}{(a^2 b)^{n+1}} (-X + 1 + a^2) X^n (1 - X)^n$, r'écrit :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \underline{Q_{n+1} - Q_n = \frac{(-1)^n}{(a^2 b)^{n+1}} (-X + b) (X (1 - X))^n = Q_1 \left[\frac{X(X-1)}{a^2 b} \right]^n} \quad (2) \quad \dots = Q_1 \left[-\frac{X(1-X)}{a^2 b} \right]^n$$

$$Q_1 - Q_0 = Q_1 \frac{X(X-1)}{a^2 b} = Q_1 \left[1 + \frac{X(X-1)}{a^2 b} \right] = \frac{1}{a^2 b} (-X + b) \frac{1}{a^2 b} (X^2 - X + a^2 b)$$

$$\underline{Q_2 = \frac{1}{(a^2 b)^2} (-X + b) (X^2 - X + a^2 b)}$$

PARTIE III Détermination de valeurs approchées de π ① Une première approximation de π

$b = a^2 + 1$

$\forall n \in \mathbb{N}, u_n(a) = a \int_0^1 \varphi_n(t) dt.$

a) $u_1(a) = a \int_0^1 \frac{1}{a^2 b} (-t^2 + b) dt = \frac{1}{ab} \left[-\frac{t^3}{3} + bt \right]_0^1 = \frac{1}{ab} \left(-\frac{1}{3} + b \right) = \frac{3b-1}{3ab}.$

$u_1(a) = \frac{3b-1}{3ab} = \frac{3a^2+2}{3a(a^2+1)}$

$u_2(a) = a \int_0^1 \varphi_2(t) dt = a \int_0^1 \frac{1}{(a^2 b)^2} (-t^2 + b)(t^4 - t^2 + a^2 b) dt$

$u_2(a) = \frac{a}{(a^2 b)^2} \int_0^1 [-t^6 + (3+b)t^4 - \overbrace{b(3+a^2)}^b t^2 + a^2 b t] dt$

$u_2(a) = \frac{a}{(a^2 b)^2} \left[-\frac{t^7}{7} + (3+b)\frac{t^5}{5} - b^2 \frac{t^3}{3} + a^2 b t \right]_0^1$

$u_2(a) = \frac{a}{(a^2 b)^2} \left[-\frac{1}{7} + \frac{3+b}{5} - \frac{b^2}{3} + a^2 b \right]$

$u_2(a) = \frac{a}{(a^2 b)^2} \left[\frac{3a^2-1}{3} b^2 + \frac{b}{5} + \frac{4}{35} \right] = \frac{a}{(a^2 b)^2} \left[b^3 - \frac{4}{3} b^2 + \frac{b}{5} + \frac{2}{35} \right]$

ou encore: $u_2(a) = \frac{a}{(a^2(a^2+1))^2} \left[a^6 + \frac{5}{3} a^4 + \frac{8}{15} a^2 - \frac{8}{105} \right]$

b) $u_2(a) = a \int_0^1 \varphi_2(t) dt = a \int_0^1 \frac{p_2(t)}{t^2 + a^2} dt = a \int_0^1 \frac{p_2(t)}{a^4 + t^2} dt$ car $p_2 = (x+a^2)\varphi_2.$

$f(a) - u_2(a) = a \int_0^1 \frac{dt}{a^4 + t^2} - a \int_0^1 \varphi_2(t) dt = a \int_0^1 \frac{dt}{a^4 + t^2} - a \int_0^1 \frac{p_2(t)}{a^4 + t^2} dt = a \int_0^1 \frac{1 - p_2(t)}{a^4 + t^2} dt$

$f(a) - u_2(a) = a \int_0^1 \frac{\lambda_2(t^2(1-t^2))^2}{a^4 + t^2} dt = + \frac{a}{(a^2 b)^2} \int_0^1 \frac{t^4(1-t^2)^2}{a^4 + t^2} dt$

$\lambda_2 = -\frac{1}{(a^2 b)^2}$

$\forall t \in [0,1], t^4(1-t^2)^2 \geq 0 \text{ et } \frac{1}{a^2+1} \leq \frac{1}{a^4+t^2} \leq \frac{1}{a^2}.$

$\text{donc } \forall t \in [0,1], \frac{1}{a^4+1} t^4(1-t^2)^2 \leq \frac{t^4(1-t^2)^2}{a^4+t^2} \leq \frac{1}{a^2} t^4(1-t^2)^2. \text{ Par intégration on obtient:}$

$$\frac{1}{a^2+1} J(2) \leq \int_0^1 \frac{t^4(1-t)^2}{a^2+t^2} dt \leq \frac{1}{a^2} J(2) ; \text{ on multiplie par } \frac{a}{(a^2b)^2} \text{ il}$$

$$\text{vient alors: } \frac{a}{b(a^2b)^2} J(2) \leq \frac{a}{(a^2b)^2} \int_0^1 \frac{t^4(1-t)^2}{a^2+t^2} dt \leq \frac{a}{a^2(a^2b)^2} J(2) ; \text{ qui donne:}$$

$$\frac{J(2)}{a^3b^3} \leq f(a) - u_2(a) \leq \frac{J(2)}{a^5b^2}$$

$$\text{Donc } u_2(a) + \frac{J(2)}{a^3b^3} \leq f(a) \leq u_2(a) + \frac{J(2)}{a^5b^2}$$

$$\text{c) * Prenons } a=2, b=a^2+3=5. \quad u_2(a) = \frac{a}{(a^2b)^2} \left[b^3 - \frac{4}{3}b^2 + \frac{b}{5} + \frac{2}{35} \right] = \frac{4868}{10500} = \frac{1217}{2625}$$

$$J(2) = \frac{[2^2(2+1)!]^2}{(4+1)!} = \frac{8}{315} ; \quad \frac{J(2)}{a^3b^3} = \frac{1}{39375} ; \quad \frac{J(2)}{a^5b^2} = \frac{1}{31500}$$

$$u_2(a) + \frac{J(2)}{a^3b^3} = \frac{1217}{2625} + \frac{1}{39375} = \frac{2608}{5625} \approx 0,46364444$$

$$u_2(a) + \frac{J(2)}{a^5b^2} = \frac{1217}{2625} + \frac{1}{31500} = \frac{2921}{6300} \approx 0,463650794$$

$$\text{Donc } \underline{0,463644 \leq f(2) \leq 0,463651} \quad \text{Pour mémoire } f(2) = \text{Auten } \frac{1}{2} \approx 0,463647609$$

$$\text{* Prenons } a=3, b=30. \quad u_2(a) = \frac{a}{(a^2b)^2} \left[b^3 - \frac{4}{3}b^2 + \frac{b}{5} + \frac{2}{35} \right] = \frac{91216}{283500} = \frac{22804}{70875}$$

$$\frac{J(2)}{a^3b^3} = \frac{1}{1063125} ; \quad \frac{J(2)}{a^5b^2} = \frac{2}{1913625}$$

$$u_2(a) + \frac{J(2)}{a^3b^3} = \frac{22804}{70875} + \frac{1}{1063125} = \frac{342061}{1063125} \approx 0,321750300$$

$$u_2(a) + \frac{J(2)}{a^5b^2} = \frac{22804}{70875} + \frac{2}{1913625} = \frac{323142}{382725} \approx 0,321750604$$

$$\text{Donc } \underline{0,321750 \leq f(3) \leq 0,321751} \quad (f(3) = \text{Auten } \frac{1}{3} \approx 0,321750554)$$

(Après les fonctions proposées sont irréductibles !)

d) Nous savons que, pour $a \in]1, +\infty[$, $f(a) + f(\frac{a+1}{a-1}) = f(1) = \frac{\pi}{4}$.

$$\text{Donc } f(2) + f(\frac{3}{1}) = \frac{\pi}{4} ; \text{ soit } \pi = 4(f(2) + f(3)).$$

$$\text{Donc } 4(0,463644 + 0,321750) \leq \pi = 4(f(2) + f(3)) \leq 4(0,463651 + 0,321751)$$

$$\text{Donc } \underline{\underline{3,141576 \leq \pi \leq 3,141608}} \quad (\pi \approx 3,141592654)$$

Prenons le milieu des récents $[3,141576; 3,141608]$, qui a pour longueur 32×10^{-6}
 Le milieu est $3,141592$

Donc $3,141592$ est une valeur approchée de π à $1,6 \times 10^{-5}$

Remarque -- On a aussi: $\frac{834913}{1063125} \leq f(2) + f(3) \leq \frac{1202371}{1330900}$

$$\text{Donc } \frac{3339892}{1063125} \leq \pi \leq \frac{1202371}{382725}$$

$$\frac{3339892}{1063125} \approx 3,141579777 ; \quad \frac{1202371}{382725} \approx 3,141605591$$

$$\text{Le milieu est: } \frac{8588329}{2733750} \approx 3,141592686$$

$$\text{La différence est: } \frac{247}{9.568.125} \approx 0,000025815 \text{ et la différence sur 2: } 0,000012907$$

2. Généralisation...

$$a) \text{ Soit } n \in \mathbb{N}. |u_n(a) - f(a)| = \left| a \int_0^1 \frac{t^n}{a^2 + t^2} dt - a \int_0^1 \frac{dt}{a^2 + t^2} \right| = a \left| \int_0^1 \frac{t^n(t^2 - 1)}{a^2 + t^2} dt \right|$$

$$|u_n(a) - f(a)| \leq a \int_0^1 \frac{|t^n(t^2 - 1)|}{a^2 + t^2} dt = a |\lambda_n| \int_0^1 \frac{t^{2n}(1-t^2)^n}{a^2 + t^2} dt \leq a |\lambda_n| \int_0^1 \frac{t^{2n}(1-t^2)^n}{a^2} dt$$

$\uparrow$ $t^n(t^2 - 1) = \lambda_n t^{2n}(1-t^2)^n$
 $\uparrow$ $a^2 + t^2 \geq a^2 \text{ et } t^{2n}(1-t^2)^n \geq 0$

$$\text{Donc } |u_n(a) - f(a)| \leq \frac{1}{a} |\lambda_n| J(n) = \frac{1}{a(a^2b)^n} J(n) \leq \frac{1}{a(a^2b)^n} \frac{1}{4^n} \text{ Finalement:}$$

$J(n) \leq 1/4^n \text{ (I} \Phi \text{I} \leq 1)$

$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_n(a) - f(a)| \leq \frac{1}{(4a^2b)^n a} \quad (3)$$

b) Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$u_{n+1}(a) - u_n(a) = a \left[\int_0^1 \Phi_{n+1}(t) - \Phi_n(t) dt \right] = a \left[\int_0^1 \left(-\frac{t^2(1-t)^n}{a^2 b} \right) \Phi_3(t) dt \right] \quad (2)$$

$$u_{n+1}(a) - u_n(a) = \frac{a(1-a)^n}{(a^2 b)^n} \int_0^1 t^2 (1-t)^n \left(\frac{1}{a^2 b} \right) (-t^2 + b) dt$$

$$u_{n+1}(a) - u_n(a) = \frac{(-1)^n a}{(a^2 b)^{n+1}} \left[b \int_0^1 t^{2n} (1-t)^n dt - \int_0^1 t^{2n+2} (1-t)^n dt \right]$$

$$u_{n+1}(a) - u_n(a) = \frac{(-1)^n a}{(a^2 b)^{n+1}} [b J(n) - I(n+3, n)] \text{ . Exprimer } I(n+3, n) \text{ en fonction de } J(n).$$

$$I(n+3, n) = \frac{2^{2n} n! (2n+1)! (2n+2)!}{(4n+3)! (n+1)!} = \frac{2^{2n} ((2n)!)^2}{(4n+1)!} \times \frac{n! (2n+1)(2n+2)(2n+1)}{(4n+3)(4n+2)(n+1)!} = J(n) \frac{2n+1}{4n+3}$$

$$I(p, q) = \frac{2^{2q} q! (p+q)! (p)!}{(2p+q+1)! p!}$$

$$J(n) = \frac{2^{2n} ((n)!)^2}{(4n+1)!}$$

Pon conséquence : $u_{n+1}(a) - u_n(a) = \frac{(-1)^n a}{(a^2 b)^{n+1}} \left[b - \frac{2n+1}{4n+3} \right] J(n).$

Remarquons que : $b - \frac{2n+1}{4n+3} = \frac{n(4b-2) + 3b-1}{4n+3} = \frac{2((b-1)n + 3b-1)}{4n+3}$

Ce qui donne : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1}(a) - u_n(a) = \frac{(-1)^n a J(n)}{(a^2 b)^{n+1}} \frac{2((b-1)n + 3b-1)}{4n+3}$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$

$$\frac{u_{n+1}(a)}{u_n(a)} = \frac{u_{n+1}(a) - u_n(a)}{u_{n+1}(a) - u_n(a)} = \frac{\frac{(-1)^{n+1} a J_{n+1}}{(a^2 b)^{n+2}}}{\frac{(-1)^n a J(n)}{(a^2 b)^{n+1}}} \times \frac{\frac{2((b-1)(n+1) + 3b-1)}{4n+7}}{\frac{2((b-1)n + 3b-1)}{4n+3}}$$

Notons que : $\frac{J(n+1)}{J(n)} = \frac{2^{2(n+1)} ((2n+2)!)^2}{(4n+5)!} \times \frac{(4n+1)!}{2^{2n} (2n)!} = \frac{2 \times 2 [(2n+2)(n+1)]^2}{(4n+5)(4n+4)(4n+3)(4n+2)}$

$$\frac{J(n+1)}{J(n)} = \frac{2(n+1)(2n+2)}{(4n+5)(4n+3)}$$

Donc $\frac{u_{n+1}(a)}{u_n(a)} = -\frac{1}{(a^2 b)} \times \frac{2(n+1)(2n+2)}{(4n+5)(4n+3)} \times \frac{2((b-1)n + 3b-1)}{2((b-1)(n+1) + 3b-1)} \times \frac{4n+3}{4n+7}$

Finalement: $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \frac{v_{n+1}(a)}{v_n(a)} = - \frac{1}{(a^2 b)} \times \frac{2(n+1)(2n+1)}{(4n+5)(4n+7)} \times \frac{2(2b-1)n+7b-3}{2(2b-1)n+3b-1}$

Simple non !

Remarque : Intéressant nous à l'existence du quotient $\frac{v_{n+1}(a)}{v_n(a)}$ c'est à dire à la non nullité de $u_{n+1}(a) - u_n(a)$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. $u_{n+1}(a) - u_n(a) = 0 \Leftrightarrow 2(2b-1)n + 3b - 1 = 0 \Leftrightarrow b \neq 1/2$ et $n = \frac{1-3b}{2(2b-1)}$.

Remarquons que : $b = a^2 + 1 \in [2, +\infty[$ et étudions la fonction

$\varphi : x \mapsto \frac{1-3x}{2(2x-1)}$ sur $[2, +\infty[$. $\forall x \in [2, +\infty[$, $\varphi'(x) = \frac{1}{2} \frac{3}{(2x-1)^2} > 0$. φ est strictement croissante

sur cet intervalle, $\varphi(2) = -5/2$ et lui $\varphi(x) = -3/4$. φ ne peut donc pas prendre de valeur

strictement ; ce fait $\frac{v_{n+1}(a)}{v_n(a)}$ est définie sur tout $n \in \mathbb{N}$ et ce qui précède vaut pour

$n=0$.

$\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{v_{n+1}(a)}{v_n(a)} = - \frac{1}{(a^2 b)} \times \frac{2(n+1)(2n+1)}{(4n+5)(4n+7)} \times \frac{2(2b-1)n+7b-3}{2(2b-1)n+3b-1}$.

c) $\forall k \in \mathbb{N}$, $v_k(a) = u_{k+1}(a) - u_k(a)$ d'où $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=0}^{n-1} (u_{k+1}(a) - u_k(a)) = \sum_{k=0}^{n-1} v_k(a)$

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n(a) - u_0(a) = \sum_{k=0}^{n-1} v_k(a)$; $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n(a) = u_0(a) + \sum_{k=0}^{n-1} v_k(a)$

Notons que : $u_0(a) = a \int_0^1 g_0(t) dt = 0$.

d'où $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n(a) = \sum_{k=0}^{n-1} v_k(a)$. Notons encore que : $v_0(a) = u_1(a) - u_0(a) = u_1(a)$.

$v_0(a) = \frac{3b-1}{3ab}$

Rappelons pour finir que : $\forall k \in \mathbb{N}$, $v_{k+1}(a) = - \frac{1}{a^2 b} \times \frac{2(k+1)(2k+1)}{(4k+5)(4k+7)} \times \frac{2(2b-1)k+7b-3}{2(2b-1)k+3b-1} v_k(a)$.

cela suffit pour mettre au place le programme.

En pédalo (CASIO 700G)

Programme principale dans le Progo

Sous-programme calculant $u_n(a)$ dans Prog 1Prog 0 "N"? $\rightarrow$ N: "A"? $\rightarrow$ A: Prog 1: $4U \rightarrow C: (A+1) \div (A-1) \rightarrow A$: Prog 1: $4U + C \rightarrow A$

Prog 1 $A^2+1 \rightarrow B: 0 \rightarrow K: (3B-1) \div (3AB) \rightarrow V: V \rightarrow U: Lbl 0: -2V(K+1)(2K+1)(2(2B-1)K+7B-3) \div$
 $(4K+5) \div (4K+7) \div (2(2B-1)K+3B-1) \div A^2 \div B \rightarrow Y: U+V \rightarrow U: Isz K: K < (N-1) \Rightarrow Goto 0$

Apréciation: N?
 5
 A?
 2
 3,141 592 654

Precision Une valeur approchée de π est: $4(u_n(a) + u_n(\frac{a+1}{a-1}))$

$$|u_n(a) - f(a)| \leq \frac{1}{(4a^2b)^n a} \quad \text{Pour } a' = \frac{a+1}{a-1} \text{ et } b' = a'^2 + 1.$$

$$|u_n(a') - f(a')| \leq \frac{1}{(4a'^2b')^n a'} \quad |u_n(a) + u_n(a') - f(a) - f(a')| \leq |u_n(a) - f(a)| + |u_n(a') - f(a')|.$$

$$\text{Donc } |4(u_n(a) + u_n(a')) - \underbrace{4(f(a) + f(a'))}_{\pi}| \leq 4 \left[\frac{1}{(4a^2b)^n a} + \frac{1}{(4a'^2b')^n a'} \right]$$

$4(u_n(a) + u_n(a'))$ est une valeur approchée de π à $\pi_n(a) = 4 \left[\frac{1}{(4a^2b)^n a} + \frac{1}{(4a'^2b')^n a'} \right]$ près.

Pour: $n=5$ et $a=2$. $b=5, a'=3, b'=10$.

$$\pi_5(2) = 4 \left[\frac{1}{(80)^5 \times 2} + \frac{1}{(360)^5 \times 3} \right] \approx 6,3 \times 10^{-10} \text{ (valeur approchée par excès)}.$$

Donc $4(u_5(2) + u_5(3))$ est une valeur approchée de π à $6,3 \times 10^{-10}$ près.

En turbo Pascal.

```

program ESSEC93;
uses crt;
var n:integer;a,r,e:real;

function erreur(rang:integer;val:real):real;
var b:real;
begin
b:=sqr(val)+1;
erreur:=1/val/exp(rang*ln(4*b*(b-1)))
end;

function suite(rang:integer;val:real):real;
var k:integer;b,v,c:real;
begin
b:=sqr(val)+1;v:=(3*b-1)/3/val/b;c:=v;rang:=rang-2;
for k:=0 to rang do
begin
v:=-v*2*(k+1)*(2*k+1)*(2*(2*b-1)*k+7*b-3);
v:=v/b/(b-1)/(4*k+5)/(2*(2*b-1)*k+3*b-1)/(4*k+7);
c:=c+v;
end;
suite:=c;
end;

function approxime(haine:integer;ha:real):real;
var piapp:real;
begin;
piapp:=suite(haine,ha);ha:=(ha+1)/(ha-1);piapp:=piapp+suite(haine,ha);
approxime:=piapp;
end;

begin
clrscr;
write('Donnez la valeur de n ');readln(n);
write('Donnez la valeur de a ');readln(a);
r:=approxime(n,a);
e:=4*(erreur(n,a)+erreur(n,(a+1)/(a-1)));
writeln('La valeur approchée de pi obtenue est : ',4*r);
writeln('L''erreur est inférieure à ',e);
writeln('La machine donne pour valeur approchée de pi : ',pi);
end.

```

```

Donnez la valeur de n 5
Donnez la valeur de a 2
La valeur approchée de pi obtenue est : 3.1415926537E+00
L'erreur est inférieure à 6.1057207149E-10
La machine donne pour valeur approchée de pi : 3.1415926536E+00

```

```

Donnez la valeur de n 5
Donnez la valeur de a 2.5
La valeur approchée de pi obtenue est : 3.1415926536E+00
L'erreur est inférieure à 3.9663419562E-11
La machine donne pour valeur approchée de pi : 3.1415926536E+00

```

```

Donnez la valeur de n 5
Donnez la valeur de a 2.414213562
La valeur approchée de pi obtenue est : 3.1415926536E+00
L'erreur est inférieure à 3.2408139345E-11
La machine donne pour valeur approchée de pi : 3.1415926536E+00

```

3. Recherche d'un choix optimal de a .

a) Ici nous avons montré que : $|W_n(a) - \pi| \leq 4 \left[\frac{1}{(4a^4b)^n a} + \frac{1}{(4a'^4b')^n a'} \right]$ avec

$$a' = \frac{a+1}{a-1} \text{ et } b' = a'^2 + 1. \quad c = \min(a, \frac{a+1}{a-1}) = \min(a, a').$$

$$(4a^4b)^n a = (4a^4(a^2+1))^n a \geq (4c^4(c+1))^n c, \text{ de même } (4a'^4b')^n a' \geq (4c^4(c+1))^n c$$

$$\text{donc } |W_n(a) - \pi| \leq 4 \left[\frac{1}{(4c^4(c+1))^n c} + \frac{1}{(4c^4(c+1))^n c} \right] = \frac{8}{c(4c^4(c+1))^n}$$

b) Candidat : $\varphi:]1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$
 $a \mapsto \min(0, \frac{a+1}{a-1})$.

$$\text{Soit } a \in]1, +\infty[. \quad 0 \leq \frac{a+1}{a-1} \Leftrightarrow a^2 - a \leq a+1 \Leftrightarrow a^2 - 2a - 1 \leq 0 \Leftrightarrow (a-1-\sqrt{2})(a-1+\sqrt{2}) \leq 0$$

$$0 \leq \frac{a+1}{a-1} \Leftrightarrow a \in [1-\sqrt{2}, 1+\sqrt{2}]$$

Finalement : $\forall a \in]1, 1+\sqrt{2}[$, $\varphi(a) = a$ et $\forall a \in]1+\sqrt{2}, +\infty[$, $\varphi(a) = \frac{a+1}{a-1}$.

	1	$1+\sqrt{2}$
$\varphi(a)$	a	$\frac{a+1}{a-1}$
	$\nearrow$	$\searrow$

φ est $\varphi(a)$ est maximal pour $a_0 = 1+\sqrt{2}$

$$\varphi(1+\sqrt{2}) = 1+\sqrt{2}$$

$c = \min(a, \frac{a+1}{a-1})$ est maximal pour $a = 1+\sqrt{2}$, $a_0 = 1+\sqrt{2} \approx 2,414$

$$c) \quad a = \frac{5}{2}, \quad c = \min(a, \frac{a+1}{a-1}) = \min(\frac{5}{2}, \frac{7}{3}) = \frac{7}{3}.$$

$$4c^4(c+1) = 4 \times \frac{49}{9} \times (1 + \frac{49}{9}) = \frac{11368}{81}; \quad \frac{8}{c(4c^4(c+1))^n} = \frac{24}{7(11368/81)^n}$$

$$|W_n(a) - \pi| \text{ est donc majoré par : } \frac{24}{7} \left(\frac{81}{11368} \right)^n.$$

$$\text{Notons que : } |W_n(a) - \pi| \text{ est aussi majoré par : } 4 \left[\frac{1}{(4a^4b)^n a} + \frac{1}{(4a'^4b')^n a'} \right] = 4 \left[\frac{1}{5 \left(\frac{4}{115} \right)^n} + \frac{1}{7 \left(\frac{81}{11368} \right)^n} \right]$$

$a = 5/2$
 $a' = 7/3$

$$\text{Pour } n=5 \text{ le premier majorant est } \frac{24}{7} \left(\frac{81}{11368} \right)^5 \approx 6,3 \times 10^{-11};$$

$$\text{le second majorant est } 4 \left[\frac{1}{5 \left(\frac{4}{115} \right)^5} + \frac{1}{7 \left(\frac{81}{11368} \right)^5} \right] \approx 3,97 \times 10^{-11}.$$

donc on a une valeur approchée de π est $3,1415926536$