

Rappels.. 1°. $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2$, $|a|-|b| \leq |a-b|$ et $|b|-|a| \leq |a-b|$. $\leftarrow R1$

2°. Soit h une fonction de classe C^{n+1} sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. $\leftarrow R2$

On suppose que $|h^{(n+1)}|$ est majorée par π sur I .

$$\text{Alors } \forall (a,b) \in I^2, |h(b) - \sum_{k=0}^n \frac{(b-a)^k}{k!} h^{(k)}(a)| \leq \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!} \times \pi.$$

PARTIE I

$n=2$ et $f \in E_2$

Q1 Une première majoration de M_2 .

a.. Il suffit d'appliquer R2 à f , $I = \mathbb{R}$, $n=2$, $a=x$, $b=x+h$ et $\pi = \pi_2$ à ayant choisi x et h dans $\mathbb{R}$.

$$\text{Il vient alors } |f(x+h) - \sum_{k=0}^2 \frac{(x+h-x)^k}{k!} f^{(k)}(x)| \leq \frac{|x+h-x|^3}{3!} \pi_2$$

$$\text{ou : } |f(x+h) - (f(x) + h f'(x))| \leq \frac{h^2}{2} \pi_2$$

$$\text{dnc } \forall x \in \mathbb{R}, h \in \mathbb{R}, |f(x+h) - f(x) - h f'(x)| \leq \frac{\pi_2 h^2}{2}$$

b.. Soit $x \in \mathbb{R}$ et $h \in \mathbb{R}_+^*$.

$$\frac{\pi_2 h^2}{2} \geq |f(x+h) - f(x) - h f'(x)| \geq |h f'(x) - (f(x+h) - f(x))| = h |f'(x) - (f(x+h) - f(x))|$$

$$\text{dnc } h |f'(x)| \leq |f(x+h) - f(x)| + \frac{\pi_2 h^2}{2} \leq |f(x+h)| + |f(x)| + \frac{\pi_2 h^2}{2} \leq 2\pi_0 + \frac{\pi_2 h^2}{2}$$

$$\text{En divisant par } h \ (h > 0) \text{ il vient : } |f'(x)| \leq \frac{2\pi_0}{h} + \frac{\pi_2 h}{2} \quad \text{pour } x \in \mathbb{R} \text{ et } h \in \mathbb{R}_+^*.$$

En particulier $\forall x \in \mathbb{R}$, $|f'(x)| \leq 2\pi_0 + \frac{\pi_2}{2}$ ($h=1$); f' est donc bornée sur $\mathbb{R}$.

f est donc une application C^1 de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que sa dérivée première soit bornée.

f est donc un élément de E_1 .

Conclusion.. $E_2 \subset E_1$

c.. Montrons que : $\pi_2 \leq 2\sqrt{\pi_0 \pi_2}$

Pour $\forall t \in \mathbb{R}_+^*$, $u(t) = \frac{2\pi_0}{t} + \frac{\pi_2 t}{2}$. u est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\forall t \in \mathbb{R}_+^*$, $u'(t) = -\frac{2\pi_0}{t^2} + \frac{\pi_2}{2}$.

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*, u'(t) = -\frac{1}{2t^2} (\pi_2 t^2 - 4\pi_0)$$

1°. Cas.. $\pi_2 = 0$. $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall h \in \mathbb{R}_+^*$, $|f'(x)| \leq \frac{2\pi_0}{h}$; or $\lim_{h \rightarrow +\infty} \frac{2\pi_0}{h} = 0$.

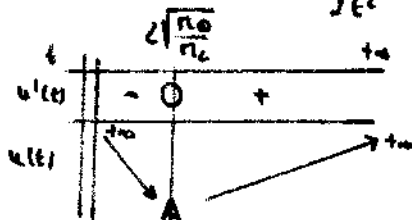
dnc $\forall x \in \mathbb{R}$, $|f'(x)| \leq 0$. f' est nulle dnc π_1 aussi.

$$\pi_1 = 0 \text{ so } = 2\sqrt{\pi_0 \pi_2}$$

2°. Cas.. $\pi_0 = 0$. $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall h \in \mathbb{R}_+^*$, $|f'(x)| \leq \frac{\pi_2 h}{2}$. $\forall x \in \mathbb{R}$, $|f'(x)| \leq 0$... voir plus haut.

3^{ème} cas... $\pi_2 \neq 0$ et $\pi_0 \neq 0$.

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*, u(t) = \frac{\pi_2}{2t^2} (t^2 + \frac{\pi_0}{\pi_2}) = \frac{\pi_2}{2t^2} (t + 2\sqrt{\frac{\pi_0}{\pi_2}})(t - 2\sqrt{\frac{\pi_0}{\pi_2}})$$



Par conséquent $\min_{t \in \mathbb{R}_+^*} u(t) = u(2\sqrt{\frac{\pi_0}{\pi_2}}) = A$

$$u(2\sqrt{\frac{\pi_0}{\pi_2}}) = 2\pi_0 \lambda \frac{1}{2\sqrt{\frac{\pi_0}{\pi_2}}} + \frac{\pi_2}{2} \lambda^2 \sqrt{\frac{\pi_0}{\pi_2}} = \frac{\pi_0 \sqrt{\pi_2}}{\sqrt{\pi_0}} + \frac{\pi_2 \sqrt{\pi_0}}{\sqrt{\pi_2}} = 2\sqrt{\pi_0 \pi_2}$$

donc $\min_{t \in \mathbb{R}_+^*} u(t) = 2\sqrt{\pi_0 \pi_2}$

Soit $x \in \mathbb{R}$. $\forall h \in \mathbb{R}_+^*$, $|f'(x)| \leq u(h)$; $|f'(x)| \leq \min_{h \in \mathbb{R}_+^*} u(h) = 2\sqrt{\pi_0 \pi_2}$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $|f'(x)| \leq 2\sqrt{\pi_0 \pi_2}$.

Finalment $\pi_2 \leq 2\sqrt{\pi_0 \pi_2}$

Q2.. Une seconde majoration de π_2 :

Soit $(x, t) \in \mathbb{R}^2$.

(1) donc : $|f(x+t) - f(x) - t f'(x)| \leq \frac{\pi_2 t^2}{2}$ et $|f(x-t) - f(x) + t f'(x)| \leq \frac{\pi_2 t^2}{2}$.

donc $|f(x+t) - f(x) - t f'(x) - (f(x-t) - f(x) + t f'(x))| \leq |f(x+t) - f(x) - t f'(x)| + |f(x-t) - f(x) + t f'(x)| \leq \pi_2 t^2$

ou $|f(x+t) - f(x-t) - 2t f'(x)| \leq \pi_2 t^2$

$$|2t f'(x) - (f(x+t) - f(x-t))| \leq |f(x+t) - f(x-t) - 2t f'(x)| \leq \pi_2 t^2$$

↓
A1

donc $|2t f'(x)| \leq \pi_2 t^2 + |f(x+t) - f(x-t)| \leq \pi_2 t^2 + |f(x+t)| + |f(x-t)| \leq \pi_2 t^2 + 2\pi_0$

si $t > 0$: $|f'(x)| \leq \frac{\pi_2 t^2 + 2\pi_0}{2t} = \frac{\pi_2 t}{2} + \frac{\pi_0}{t}$

Par conséquent : $\forall x \in \mathbb{R}, \forall t \in \mathbb{R}_+^*, |f'(x)| \leq \frac{\pi_2 t}{2} + \frac{\pi_0}{t}$.

En particulier : $\forall x \in \mathbb{R}, |f'(x)| \leq \inf_{t \in \mathbb{R}_+^*} (\frac{\pi_2 t}{2} + \frac{\pi_0}{t})$ (cette borne inférieure existe car $t \mapsto \frac{\pi_2 t}{2} + \frac{\pi_0}{t}$ est minuscule sur $\mathbb{R}_+^*$ par $|f'(x)|$)

Ne reste plus qu'à trouver cette borne inférieure

Supposons $\pi_2 \neq 0$ et $\pi_0 \neq 0$.

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*, \frac{\pi_2 t}{2} + \frac{\pi_0}{t} = \frac{2(\pi_0/2)}{t} + \frac{\pi_2 t}{2}$$

en changeant π_0 en $\pi_0/2$ au dessus de u ! Par conséquent : $\min_{t \in \mathbb{R}_+^*} (\frac{\pi_2 t}{2} + \frac{\pi_0}{t}) = 2\sqrt{\frac{\pi_0/2}{2}} \pi_2 = \sqrt{2\pi_0 \pi_2}$

Par conséquent : $\forall x \in \mathbb{R}, |f'(x)| \leq \sqrt{2\pi_0 \pi_2}$

Si $\pi_1 = 0$ alors $\pi_2 = 0$ (voir q3. b) et la majoration vaut égale.

Si $\pi_0 = 0$ alors $f \equiv 0$; $\pi_0 = \pi_1 = \pi_2 = 0 \dots$

Finalement: $\forall x \in \mathbb{R}, |f'(x)| \leq \sqrt{2\pi_0\pi_2}$

Par conséquent $\pi_2 \leq \sqrt{2\pi_0\pi_2}$

PARTIE II

$n \geq 2, f \in E_n$.

Q1 Inversibilité de la matrice H_{n-1}

a) $(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$. Supposons $H_{n-1} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{bmatrix} = 0_{\pi_{n-2,1}}(\mathbb{R})$.

$$\begin{cases} \frac{h_1}{1!} x_1 + \frac{h_2}{2!} x_2 + \dots + \frac{h_{n-1}}{(n-1)!} x_{n-1} = 0 \\ \frac{h_2}{1!} x_1 + \frac{h_3}{2!} x_2 + \dots + \frac{h_n}{(n-1)!} x_{n-1} = 0 \\ \dots \\ \frac{h_{n-1}}{1!} x_1 + \frac{h_n}{2!} x_2 + \dots + \frac{h_{n+1}}{(n-1)!} x_{n-1} = 0 \end{cases}$$

On a donc $\forall i \in [1, n-1], \sum_{k=1}^{n-1} \frac{h_k}{k!} x_k = 0$

Considérons la fonction-polynôme $P: t \mapsto \frac{x_{n-1}}{(n-1)!} t^{n-1} + \frac{x_{n-2}}{(n-2)!} t^{n-2} + \dots + \frac{x_2}{2!} t + x_1$

$\forall t \in \mathbb{R}, P(t) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{x_k}{k!} t^{k-1}$. On a donc $\deg P \leq n-2$

$\forall i \in [1, n-1], P(h_i) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{x_k}{k!} h_i^{k-1} = \frac{1}{h_i} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{h_k}{k!} x_k = 0$

$h_1, h_2, \dots, h_{n-1}$ sont donc $n-1$ zéros distincts de P ; comme $\deg P \leq n-2$, P est nulle.

Par conséquent, ses coefficients sont nuls; donc: $\forall k \in [1, n-1], \frac{x_k}{k!} = 0$; soit encore:

$\forall k \in [1, n-1], x_k = 0$. $x_1 = x_2 = \dots = x_{n-1} = 0$.

b) Finalement: $\forall \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{bmatrix} \in \pi_{n-2,1}(\mathbb{R}), H_{n-1} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{bmatrix} = 0_{\pi_{n-2,1}}(\mathbb{R}) \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{bmatrix} = 0_{\pi_{n-2,1}}(\mathbb{R})$. H_{n-1} est inversible.

Q2. Les inclusions de E_n dans E_k ($1 \leq k \leq n$).

Hi! Hi! $k \in [1, n-1]$ ne
semble plus raisonnable!

a) $x \in \mathbb{R}$ et $k \in [1, n]$

$$F_k(x) = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{h_i}{i!} f^{(i)}(x) = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{(x+h_k-a)^i}{i!} f^{(i)}(x)$$

f est de classe C^n sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}, |f^{(n)}(x)| \leq M_n$

Appliquons R2 pour $h = f$, pour $n-1$, pour $a = x$ et $b = x+h$

$$\text{il vient : } |f(x+h) - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(x+h-x)^i}{i!} f^{(i)}(x)| \leq \frac{|x+h-x|^{n-1+1}}{(n-1+1)!} M_n$$

$$\text{donc } |f(x+h) - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{h^i}{i!} f^{(i)}(x)| \leq \frac{|h|^n}{n!} M_n.$$

$$\text{soit : } |f(x+h) - f(x) - F_h(x)| \leq \frac{|h|^n}{n!} M_n.$$

$$|f(x+h) - f(x)| \leq |f(x+h) - f(x) - F_h(x)| + |F_h(x)| \leq 2M_0$$

$$\frac{|h|^n}{n!} M_n \geq |f(x+h) - f(x) - F_h(x)| \geq |F_h(x)| - |f(x+h) - f(x)| \geq |F_h(x)| - 2M_0$$

$\uparrow$
R1

$$\text{donc } |F_h(x)| \leq 2M_0 + \frac{|h|^n}{n!} M_n$$

$$\forall h \in [1, n-1], \forall x \in \mathbb{R}, |F_h(x)| \leq 2M_0 + \frac{|h|^n}{n!} M_n.$$

b) Fixons k dans $[1, n]$. Montrons que $f \in E_k$

si $k = n$, c'est évident!

supposons donc $1 \leq k \leq n-1$. Pour montrer cette appartenance il suffit de prouver que $|f^{(k)}|$ est majorée sur $\mathbb{R}$.

$$\text{soit } x \in \mathbb{R}. \begin{bmatrix} F_1(x) \\ \vdots \\ F_{n-1}(x) \end{bmatrix} = H_{n-1} \begin{bmatrix} f(x) \\ \vdots \\ f^{(n-1)}(x) \end{bmatrix}; \text{ donc } \begin{bmatrix} f(x) \\ \vdots \\ f^{(n-1)}(x) \end{bmatrix} = H_{n-1}^{-1} \begin{bmatrix} F_1(x) \\ \vdots \\ F_{n-1}(x) \end{bmatrix}$$

$$\text{puisque } H_{n-1}^{-1} = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n-1 \\ 1 \leq j \leq n-1}}$$

$$\text{on a donc } f^{(k)}(x) = \sum_{j=1}^{n-1} a_{kj} F_j(x)$$

$$\text{d'où } |f^{(k)}(x)| \leq \sum_{j=1}^{n-1} |a_{kj}| |F_j(x)| \leq \sum_{j=1}^{n-1} |a_{kj}| (2M_0 + \frac{|h_j|^n}{n!} M_n)$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, |f^{(k)}(x)| \leq \sum_{j=1}^{n-1} |a_{kj}| (2M_0 + \frac{|h_j|^n}{n!} M_n) \stackrel{Q2a)}{< 2M_0}$$

$|f^{(k)}|$ est donc majorée sur $\mathbb{R}$; ceci achève de prouver que $f \in E_k$

Finalement $\forall k \in [1, n], \forall f \in E_n, f \in E_k$; $\forall k \in [1, n], E_n \subset E_k$

PARTIE III

Q3.. Majoration de π_1 et π_2 en fonction de π_0 et de π_3 .

$n=3$. $f \in E_3$. En particulier $f' \in E_2$ (... f' et $(f')''$ sont bornées ...)

$\mathcal{I} \mathcal{Q}$ appliquée à f' donne : $\pi_2 \leq \sqrt{2\pi_1\pi_3}$.

$\mathcal{I} \mathcal{Q}$ appliquée à f donne : $\pi_1 \leq \sqrt{2\pi_0\pi_2}$.

$$\text{On a aussi : } \pi_2 \leq \sqrt{2\pi_0\sqrt{2\pi_1\pi_3}} = 2^{3/4} \pi_0^{3/4} \pi_1^{1/4} \pi_3^{1/4}$$

$$\text{Supposons } \pi_3 \neq 0. \quad \pi_2^{3/4} = \frac{\pi_1}{\pi_3^{1/4}} \leq 2^{3/4} \pi_0^{3/4} \pi_3^{1/4}; \quad \pi_2 \leq 2 \pi_0^{2/3} \pi_3^{1/3}$$

cette dernière inégalité vaut encore si $\pi_3 = 0$. ($\pi_3 = 0 \Rightarrow f' \equiv 0 \Rightarrow f''' \equiv 0 \Rightarrow \pi_3 = 0$)

$$\text{Donc } \underline{\pi_2 \leq 2 \pi_0^{2/3} \pi_3^{1/3}}.$$

$$\pi_2 \leq \sqrt{2 \times 2 \pi_0^{2/3} \pi_3^{1/3} \pi_3} \text{ car } \pi_2 \leq \sqrt{2\pi_1\pi_3}.$$

$$\text{Donc } \underline{\pi_2 \leq 2 \pi_0^{2/3} \pi_3^{2/3}}$$

Q4.. Une seconde majoration de π_1 et π_2 en fonction de π_0 et π_3 .

a) Soit $(x, h) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$.

$$\mathcal{R} \mathcal{L} \text{ avec } n=2, a=x, b=x+h \text{ donne : } |f(x+h) - f(x) - hf'(x) - \frac{h^2}{2} f''(x)| \leq \frac{h^3}{6} \pi_3$$

$$\mathcal{R} \mathcal{L} \text{ avec } n=2, a=x, b=x-h \text{ donne : } |f(x-h) - f(x) + hf'(x) - \frac{h^2}{2} f''(x)| \leq \frac{h^3}{6} \pi_3$$

$$\text{Donc } |(f(x+h) - f(x) - hf'(x) - \frac{h^2}{2} f''(x)) - (f(x-h) - f(x) + hf'(x) - \frac{h^2}{2} f''(x))| \leq | \dots | + | \dots | \leq \frac{h^3}{6} \pi_3 + \frac{h^3}{6} \pi_3 = \frac{h^3}{3} \pi_3$$

$$\text{donc : } |f(x+h) - f(x-h) - 2hf'(x)| \leq \frac{h^3}{3} \pi_3.$$

$$|f(x+h) - f(x-h)| \leq |f(x+h) - f(x)| + |f(x-h) - f(x)| \leq 2\pi_0$$

$$\frac{h^3}{3} \pi_3 \geq |f(x+h) - f(x-h) - 2hf'(x)| \geq 2h|f'(x)| - |f(x+h) - f(x-h)| \underset{\mathcal{R} \mathcal{L}}{\geq} 2h|f'(x)| - 2\pi_0$$

$$\text{Il vient alors : } |f'(x)| \leq \frac{1}{2h} \left(\frac{h^3}{3} \pi_3 + 2\pi_0 \right).$$

$$\text{Finalement : } \underline{\forall x \in \mathbb{R}, |f'(x)| \leq \frac{\pi_3 h^2}{6} + \frac{\pi_0}{h}} \text{ et ceci pour tout } h \in \mathbb{R}^*.$$

$$|(f(x+h) - f(x) - hf'(x) - \frac{h^2}{2} f''(x)) + (f(x-h) - f(x) + hf'(x) - \frac{h^2}{2} f''(x))| \leq | \dots | + | \dots | \leq \frac{h^3}{6} \pi_3 + \frac{h^3}{6} \pi_3 = \frac{h^3}{3} \pi_3$$

$$\text{donc : } |f(x+h) + f(x-h) - 2f(x) - h^2 f''(x)| \leq \frac{h^3}{3} \pi_3.$$

$$|f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)| \leq |f(x+h) - f(x)| + |f(x-h) - f(x)| \leq 2\pi_0$$

$$\text{donc } \frac{h^3}{3} \pi_3 \geq |f(x+h) + f(x-h) - 2f(x) - h^2 f''(x)| \geq h^2 |f''(x)| - |f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)| \underset{\mathcal{R} \mathcal{L}}{\geq} h^2 |f''(x)| - 2\pi_0$$

Donc $h^2 |f''(t)| \leq \frac{h^3 \pi_3}{3} + 4\pi_0$

$\forall x \in \mathbb{R}, \forall t \in \mathbb{R}_+^*, |f''(t)| \leq \frac{\pi_3 h}{3} + \frac{4\pi_0}{t^2}$

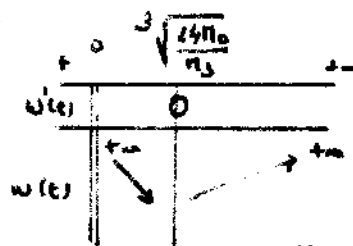
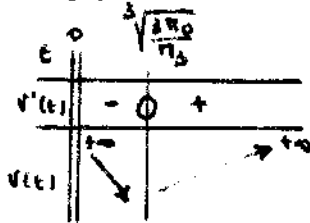
b) $\forall x \in \mathbb{R}, |f''(x)| \leq \inf_{t \in \mathbb{R}_+^*} \left(\frac{\pi_3 h^2}{6} + \frac{\pi_0}{t} \right)$ et $|f''(x)| \leq \inf_{t \in \mathbb{R}_+^*} \left(\frac{\pi_3 h}{3} + \frac{4\pi_0}{t^2} \right)$

Donc $\pi_3 \leq \alpha$ avec $\alpha = \inf_{t \in \mathbb{R}_+^*} \left(\frac{\pi_3 h^2}{6} + \frac{\pi_0}{t} \right)$ et $\pi_2 \leq \beta$ avec $\beta = \inf_{t \in \mathbb{R}_+^*} \left(\frac{\pi_3 h}{3} + \frac{4\pi_0}{t^2} \right)$

Pour $t \in \mathbb{R}_+^*, v(t) = \frac{\pi_3 t}{6} + \frac{\pi_0}{t}$ et $w(t) = \frac{\pi_3 t}{3} + \frac{4\pi_0}{t^2}$.

$\forall t \in \mathbb{R}_+^*, v'(t) = \frac{\pi_3}{6} - \frac{\pi_0}{t^2}$ et $w'(t) = \frac{\pi_3}{3} - \frac{8\pi_0}{t^3}$

1^{er} cas... $\pi_3 \neq 0$ et $\pi_0 \neq 0$.



Par conséquent: $\alpha = v\left(\sqrt{\frac{6\pi_0}{\pi_3}}\right) = \frac{\pi_3}{6} \left(\sqrt{\frac{6\pi_0}{\pi_3}}\right)^{1/3} + \pi_0 \left(\sqrt{\frac{6\pi_0}{\pi_3}}\right)^{2/3} = \left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{3^{1/3}} + \frac{1}{3^{2/3}}\right) \pi_0^{1/3} \pi_3^{2/3} = \frac{3^{2/3}}{2} \pi_0^{1/3} \pi_3^{2/3}$

et $\beta = w\left(\sqrt[3]{\frac{24\pi_0}{\pi_3}}\right) = w\left(\sqrt[3]{\frac{6\pi_0}{\pi_3}}\right) = \frac{\pi_3}{3} \sqrt[3]{\frac{6\pi_0}{\pi_3}} + 4\pi_0 \left(\sqrt[3]{\frac{6\pi_0}{\pi_3}}\right)^{-2} = \left(\frac{2}{3^{1/3}} + \frac{1}{3^{1/3}}\right) \pi_0^{2/3} \pi_3^{1/3} = 3^{1/3} \pi_0^{2/3} \pi_3^{1/3}$

En conséquence: $\pi_3 \leq \frac{3^{2/3}}{2} \pi_0^{1/3} \pi_3^{2/3}$ et $\pi_2 \leq 3^{1/3} \pi_0^{2/3} \pi_3^{1/3}$

2^{ème} cas... $\pi_3 = 0$. $\alpha = \inf_{t \in \mathbb{R}_+^*} \left(\frac{\pi_3 h^2}{6} + \frac{\pi_0}{t} \right) = \inf_{t \in \mathbb{R}_+^*} \frac{\pi_0}{t} = 0$; or $\pi_3 \leq \alpha = 0$

$\pi_3 = \pi_3 = 0$; en particulier: $\pi_2 \leq \frac{3^{1/3}}{2} \pi_0^{1/3} \pi_3^{2/3}$

$\beta = \inf_{t \in \mathbb{R}_+^*} \left(\frac{\pi_3 h}{3} + \frac{4\pi_0}{t^2} \right) = \inf_{t \in \mathbb{R}_+^*} \left(\frac{4\pi_0}{t^2} \right) = 0$; or $0 \leq \pi_2 \leq \beta = 0$

$\pi_2 = \pi_2 = 0$; en particulier: $\pi_2 \leq 3^{1/3} \pi_0^{2/3} \pi_3^{1/3}$

3^{ème} cas... $\pi_0 = 0$. fait nul pour $\mathbb{R}$; f', f'', f''' aussi; donc $\pi_0 = \pi_3 = \pi_2 = \pi_3 = 0$.

Les deux inégalités sont alors encore vraies.

Finalement: $\pi_3 \leq \frac{1}{2} 3^{2/3} \pi_0^{1/3} \pi_3^{2/3}$ et $\pi_2 \leq 3^{1/3} \pi_0^{2/3} \pi_3^{1/3}$

Q3. - Majoration de π_{n-1} en fonction de π_0 et de π_n .

$n \geq 2$ et $f \in E_n$

a) $f^{(n-1)}$ appartient à E_2 , on peut donc appliquer $\mathcal{Q}3$ qui donne :

$$\pi_{n-1} \leq \sqrt{2 \pi_{n-2} \pi_n} \quad \left(\sup_{x \in \mathbb{R}} |(f^{(n-1)})'(x)| = \pi_{n-2}, \sup_{x \in \mathbb{R}} |(f^{(n-1)})''(x)| = \pi_n \right)$$

b) Admiration question !

1°. Elle est inutile car on pouvait faire la récurrence directement sur l'inégalité proposée en a)

2°. Elle est catastrophique dans sa formulation. Au début de $\mathcal{Q}3$ n'est fixé, ici n'est dépende une suite. Ne plus qu'elle est l'indice du premier terme ? A priori c'est ! mais alors comment valider $a_n \leq 2^{n-1} a_{n-1}$ pour $n=2$.

Ne plus pourquoi ne pas écrire $a_n = 2^{n-1} a_{n-1}$!

Pour $a_2 = 1$ et $\forall n \in (\mathbb{N}^* - \{1\})$, $a_n = \sqrt[n]{2^{n-1} a_{n-1}}$

Une récurrence simple montre que la suite $(a_n)_{n \geq 2}$ est définie et à termes (strictement) positifs.

Notons que : $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2 \Rightarrow a_n = 2^{n-1} a_{n-1} \Rightarrow a_n \leq 2^{n-1} a_{n-1}$!

Ne reste plus, pour répondre à la question, qu'à prouver que :

$\forall n \in \mathbb{Z}, n \geq 0, \forall f \in E_n, \pi_{n+1} \leq a_n \pi_0^{3/4} \pi_n^{3/4}$. Faisons une récurrence

→ Soit $f \in E_2$. $\pi_2 \leq \sqrt{2 \pi_0 \pi_2}$ $a_2 = \sqrt[2]{2^{2-1} a_{2-1}} = \sqrt{2 a_1} = \sqrt{2}$

$$\text{Donc } \pi_2 \leq \sqrt{2} \pi_0^{3/4} \pi_2^{3/4} \quad \downarrow \quad = a_2 \pi_0^{3/4} \pi_2^{3/4}$$

La propriété vient pour $n=2$.

→ Supposons la propriété vraie pour $n \in \mathbb{Z}, n \geq 0$. Montrons la pour $n+1$.

Soit $f \in E_{n+1}$; en particulier $f \in E_n$. L'hypothèse de récurrence donne alors

$$\pi_{n+1} \leq a_n \pi_0^{3/4} \pi_n^{3/4}. \text{ Nous devons montrer que : } \pi_{n+1} \leq a_{n+1} \pi_0^{3/4} \pi_{n+1}^{3/4}$$

Nous avons montré, dans $\mathcal{Q}3$ a), que pour $f \in E_n$: $\pi_{n+1} \leq \sqrt{2 \pi_n \pi_{n+1}}$

En conséquence, ici : $\pi_n \leq \sqrt{2 \pi_{n+1} \pi_{n+1}}$

$$\text{Donc } \pi_n \leq (2 a_n \pi_0^{3/4} \pi_n^{3/4} \pi_{n+1})^{3/4}; \quad \pi_n^2 \leq 2 a_n \pi_0^{3/4} \pi_n^{3/4} \pi_{n+1}$$

Si $\pi_n = 0$ il n'y a rien à dire que : $\pi_n \leq a_n \pi_0^{3/4} \pi_{n+1}^{2-3/4}$

Supposons donc $\pi_n \neq 0$

Alors $\pi_n^{1-3/4} \leq 2 a_n \pi_0^{3/4} \pi_{n+1}$ (en divisant par $\pi_n^{3/4}$)

Soit : $\pi_n^{2+3/4} \leq 2 a_n \pi_0^{3/4} \pi_{n+1}$

ce qui donne : $\pi_n \leq (2 a_n \pi_0^{3/4} \pi_{n+1})^{\frac{4}{5}} = \sqrt[4]{(2 a_n)^4} \pi_0^{\frac{3}{5}} \pi_{n+1}^{\frac{4}{5}}$

$$\pi_n \leq \sqrt[4]{2^4 a_n^4} \pi_0^{\frac{3}{5}} \pi_{n+1}^{\frac{4}{5}} = a_n \pi_0^{\frac{3}{5}} \pi_{n+1}^{\frac{4}{5}}$$

ce qui achève la récurrence.

Nous avons donc montré l'existence d'une suite $(a_n)_{n \geq 2}$ telle que :

$\forall n \in \mathbb{Z}, +\infty[, \forall f \in E_n , \pi_{n+1} \leq a_n \pi_0^{3/4} \pi_n^{2-3/4}$ et $a_n^n \leq 2^{n-1} a_{n+1}^{n-1}$.

$a_2 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{Z}, +\infty[, a_n = \sqrt[n]{2^{n-1} a_{n+1}^{n-1}}$

c) montrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{Z}, +\infty[, a_n = 2^{\frac{n-1}{2}}$

c'est clair pour $n=2$ car $a_2 = 1$

Supposons la propriété vraie pour $n \in \mathbb{N}$ et $n \geq 2$; montrons la pour $n+1$.

$$a_{n+1} = (2^n a_n^n)^{\frac{1}{n+1}} = (2^n (2^{\frac{n-1}{2}})^n)^{\frac{1}{n+1}} = (2^{n(1+\frac{n-1}{2})})^{\frac{1}{n+1}} = (2^{n(\frac{n+1}{2})})^{\frac{1}{n+1}} = 2^{\frac{n}{2}} = 2^{\frac{n+1-1}{2}}$$

H.R.

ceci achève la récurrence.

$\forall n \in \mathbb{Z}, +\infty[$ et $f \in E_n$:

$$\pi_{n+1} \leq a_n \pi_0^{3/4} \pi_n^{2-3/4} = 2^{\frac{n-1}{2}} \pi_0^{\frac{3}{4}} \pi_n^{\frac{n-1}{2}}$$

$$\underline{\underline{\forall n \in \mathbb{Z}, +\infty[, \forall f \in E_n , \pi_{n+1} \leq 2^{\frac{n-1}{2}} \pi_0^{\frac{3}{4}} \pi_n^{\frac{n-1}{2}}}}$$

Q4. majoration de π_k en fonction de π_0 et de π_n ($0 \leq k \leq n$)

$n \geq 2$ et $f \in E_n$.

montrons que : $\forall k \in \mathbb{Z}, [0, n[, \pi_k \leq 2^{\frac{k(n-k)}{2}} \pi_0^{\frac{n-k}{2}} \pi_n^{\frac{k}{2}}$

c'est évident pour $k=0$.

Reste donc à montrer que : $\forall k \in \mathbb{Z}, [1, n[, \pi_k \leq 2^{\frac{k(n-k)}{2}} \pi_0^{\frac{n-k}{2}} \pi_n^{\frac{k}{2}}$ ou que : $\left. \begin{array}{l} \text{Permet d'établir} \\ \text{une récurrence} \\ \text{descendante !!} \end{array} \right\}$

$$\forall k \in \mathbb{Z}, [0, n-1[, \pi_{n-k} \leq 2^{\frac{(n-k)k}{2}} \pi_0^{\frac{k}{2}} \pi_{n-k}^{\frac{n-k}{2}}$$

montrons ce dernier résultat par récurrence.

- C'est vrai pour $k=0$ ($\pi_n \leq \pi_n$)

- Supposons la propriété vraie pour $k \in [0, n-2]$ et montrons la pour $k+1$.

$$n-k \geq 1 \text{ donc } \pi_{(n-k)-1} \leq 2^{\frac{n-k-1}{2}} \pi_0^{\frac{1}{n-k}} \pi_n^{\frac{n-k-1}{n-k}}$$

$$\text{L'hypothèse de récurrence donne: } \pi_{n-k} \leq 2^{\frac{(n-k)k}{2}} \pi_0^{\frac{k}{n}} \pi_n^{\frac{n-k}{n}}$$

$$\text{Par conséquent } \pi_{n-(k+1)} \leq 2^{\frac{n-k-1}{2}} \pi_0^{\frac{1}{n-k}} \left(2^{\frac{n-k}{2}k} \pi_0^{\frac{k}{n}} \pi_n^{\frac{n-k}{n}} \right)^{\frac{n-k-1}{n-k}}$$

$$\pi_{n-(k+1)} \leq 2^{\frac{n-k-1}{2} + \frac{k(n-k-1)}{2}} \pi_0^{\frac{1}{n-k} + \frac{k(n-k-1)}{n(n-k)}} \pi_n^{\frac{n-k-1}{n}}$$

$$\pi_{n-(k+1)} \leq 2^{\frac{(n-(k+1))(k+1)}{2}} \pi_0^{\frac{(n-k)(k+1)}{n(n-k)}} \pi_n^{\frac{n-k-1}{n}} = 2^{\frac{(n-(k+1))(k+1)}{2}} \pi_0^{\frac{k+1}{n}} \pi_n^{\frac{n-(k+1)}{n}}$$

Ceci achève la récurrence

$$\text{En conséquence: } \forall k \in [0, n], \pi_k \leq 2^{\frac{k(n-k)}{2}} \pi_0^{\frac{k}{n}} \pi_n^{\frac{n-k}{n}}$$

PARTIE IV

1^{ère} étape.. montrer que w_p est périodique de période 4π sur $\mathbb{R}$

$$\forall x \in \mathbb{R}, w_p(x+4\pi) = w_p(2\pi+x+2\pi) = w_p(x+2\pi) = -w_p(x) = w_p(x)$$

2^{ème} étape.. montrer que f est continue à tout point de $[0, 1]$.

w_p est continue sur $[0, 1 - \frac{1}{2p}]$ ($\forall x \in [0, 1 - \frac{1}{2p}], w_p(x) = 2$) et sur $[1 - \frac{1}{2p}, 1]$ (car

$$\forall x \in [1 - \frac{1}{2p}, 1], w_p(x) = 2 \sin(p\pi(1-x))$$

w_p est donc continue à tout point de $]0, 1 - \frac{1}{2p}[\cup]1 - \frac{1}{2p}, 1[$, continue à droite en 0 et en $1 - \frac{1}{2p}$, à gauche en 1 et en $1 - \frac{1}{2p}$.

Il reste donc plus, pour avoir la continuité à tout point de $[0, 1]$ de montrer la continuité à gauche en 0 et à droite en 1.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} w_p(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} w_p(-x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} w_p(x) = w_p(0) ; w_p \text{ est donc continue à gauche en } 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} w_p(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} w_p(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} w_p(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (-w_p(x+1)) = -\lim_{x \rightarrow 1^-} w_p(x) = -w_p(1) = 0 = w_p(1) !$$

w_p est continue à droite en 1

3^{ème} étape.. montrer que w_p est continue à tout point de $[-1, 1]$.

C'est vrai pour un point de $[0, 1]$. Soit $a \in [-1, 0]$, $-a \in [0, 1]$.

$$\lim_{x \rightarrow a} w_p(x) = \lim_{x \rightarrow -a} w_p(-x) = \lim_{x \rightarrow -a} w_p(x) = w_p(-a) = w_p(a); w_p \text{ est donc continue en } a.$$

4^{ème} étape... Montrons que w_p est continue à tout point de $[-2, 2]$

Plutôt dire pour les points de $[-2, 2]$

Soit $a \in [-2, -1]$; $a+2 \in [0, 1]$

$$\lim_{x \rightarrow a} w_p(x) = \lim_{x \rightarrow a+2} w_p(x-2) = \lim_{x \rightarrow a+2} -w_p((x-2)+2) = -\lim_{x \rightarrow a+2} w_p(x) = -w_p(a+2) = w_p(a); w_p \text{ est continue en } a.$$

Même chose au passage pour $a \in [0, 1]$.

5^{ème} étape... Montrons que w_p est continue à tout point de $\mathbb{R}$

w_p est périodique de période 4.

Soit $a \in \mathbb{R}$. $\exists n \in \mathbb{Z}$, $-2 \leq a+4n \leq 2$ ($n = \lfloor -\frac{a+2}{4} \rfloor + 1$)

$$\lim_{x \rightarrow a} w_p(x) \stackrel{y=a+4n}{=} \lim_{y \rightarrow a+4n} w_p(y-4n) = \lim_{y \rightarrow a+4n} w_p(y) = w_p(a+4n) = w_p(a); w_p \text{ est continue en } a.$$

Finalement w_p est continue à tout point de $\mathbb{R}$.

Représentation graphique

b) Donner "l'"expression ?

$$\forall x \in [0, 1], V_p(x) = \int_0^x w_p(t) dt \quad (\text{fa?}).$$

$$\text{Donc } \forall x \in [0, 1 - \frac{1}{2p}], V_p(x) = \int_0^x 2 dt = 2x$$

$$\forall x \in [1 - \frac{1}{2p}, 1], V_p(x) = V_p(1 - \frac{1}{2p}) + \int_{1 - \frac{1}{2p}}^x 2 \sin(p\pi(1-t)) dt = 2 - \frac{1}{p} + \frac{2}{p\pi} [\cos(p\pi(1-t))]_{1 - \frac{1}{2p}}^x$$

$$\forall x \in [1 - \frac{1}{p}, 1], V_p(x) = 2 - \frac{1}{p} + \frac{2}{p\pi} (\cos(p\pi(1-x)))$$

Conclusion... $\forall x \in [0, 1 - \frac{1}{2p}]$, $V_p(x) = 2x$ et $\forall x \in [1 - \frac{1}{2p}, 1]$, $V_p(x) = 2 - \frac{1}{p} + \frac{2}{pn} (\cos(p\pi(1-x)))$.

$$\text{Soit } x \in \mathbb{R}. V_p(1-x) = \int_0^{-x} w_p(t) dt = \int_0^x w_p(-u) (-du) = - \int_0^x w_p(u) du = -V_p(x).$$

$\uparrow$
 $w_p(-u) = w_p(u)$

$$V_p(2+x) = \int_0^{2+x} w_p(t) dt = \int_{-2}^x w_p(u+2) du = - \int_{-2}^x w_p(u) du = \int_0^{-2} w_p(u) du - \int_0^x w_p(u) du$$

$\uparrow$
 $w_p(u+2) = -w_p(u)$

$V_p(2+x) = V_p(-2) - V_p(x)$. Ceci vaut pour tout $x \in \mathbb{R}$, en particulier pour $x=0$.

Par conséquent $V_p(2+0) = V_p(-2) - V_p(0) = V_p(-2)$

Dac $V_p(1) = V_p(-1)$. Nous avons vu plus haut que $V_p(1-x) = -V_p(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$;

dac $V_p(1) = V_p(1-1)$ et $V_p(1) = -V_p(-1)$; $V_p(1) = V_p(-1) = 0$.

Finalement: $\forall x \in \mathbb{R}$, $V_p(-x) = -V_p(x)$ et $V_p(2+x) = -V_p(x)$

On montre, récurrence, pour la récurrence d'égalité.

$\varphi: x \mapsto V_p(2+x) + V_p(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $\varphi'(x) = w_p(2+x) + w_p(x) = 0$

φ est donc constante sur $\mathbb{R}$.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \varphi(x) = \varphi(-1) = V_p(1) + V_p(-1) \stackrel{V_p(-1) = -V_p(1)}{=} 0.$$

Remarque... $\forall x \in \mathbb{R}$, $V_p(x+4) = -V_p(x+2) = V_p(x)$; V_p est périodique de période 4.

Représentation graphique

$$c) \quad \forall x \in \mathbb{R}, u_p(x) = \int_0^x u_p(t) dt.$$

$$\text{Soit } x \in [1 - \frac{1}{2p}, 1], u_p(x) = \int_1^x \left(2 - \frac{1}{p} + \frac{2}{p\pi} \cos(p\pi(1-t))\right) dt = \left(2 - \frac{1}{p}\right)(x-1) + \frac{2}{p\pi} \left(-\frac{1}{p\pi}\right) [\sin(p\pi(1-t))]_1^x$$

$$u_p(x) = \left(2 - \frac{1}{p}\right)(x-1) - \frac{2}{(p\pi)^2} \sin(p\pi(1-x)); \text{ notons que : } u_p\left(1 - \frac{1}{2p}\right) = \left(2 - \frac{1}{p}\right)\left(-\frac{1}{2p}\right) - \frac{2}{(p\pi)^2} = -\frac{1}{p} + \frac{1}{4p^2} - \frac{2}{(p\pi)^2}.$$

$$\text{Soit } x \in [0, 1 - \frac{1}{2p}]; u_p(x) = \int_0^x u_p(t) dt = \int_0^{1-\frac{1}{2p}} u_p(t) dt + \int_{1-\frac{1}{2p}}^x 2t dt = u_p\left(1 - \frac{1}{2p}\right) + x^2 - \left(1 - \frac{1}{2p}\right)^2$$

$$u_p(x) = -\frac{1}{p} + \frac{1}{4p^2} - \frac{2}{(p\pi)^2} + x^2 - 1 + \frac{1}{4p^2} + \frac{1}{p} = x^2 - 1 + \frac{1}{4p^2} - \frac{2}{(p\pi)^2}.$$

$$\text{Finalement : } \forall x \in [0, 1 - \frac{1}{2p}], u_p(x) = x^2 - 1 + \frac{1}{4p^2} - \frac{2}{(p\pi)^2} \text{ et } \forall x \in [1 - \frac{1}{2p}, 1], u_p(x) = \left(2 - \frac{1}{p}\right)(x-1) - \frac{2}{(p\pi)^2} \sin(p\pi(1-x))$$

considérons la fonction $\psi: x \mapsto u_p(x) - u_p(-x)$

ψ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}, \psi'(x) = u_p'(x) + u_p'(-x) = 0_p(x) + 0_p(-x) = 0$.

ψ est constante sur $\mathbb{R}$. $\forall x \in \mathbb{R}, \psi(x) = \psi(0) = 0$; ψ est nulle sur $\mathbb{R}$.

$$\underline{\underline{\forall x \in \mathbb{R}, u_p(-x) = u_p(x)}}.$$

considérons la fonction $\ell: x \mapsto u_p(x+c) + u_p(x)$

ℓ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}, \ell'(x) = 0_p(x+c) + 0_p(x) = 0$. ℓ est constante sur $\mathbb{R}$.

$\forall x \in \mathbb{R}, \ell(x) = \ell(-1) = u_p(1) + u_p(-1) = 2u_p(1) = 0$. ℓ est nulle sur $\mathbb{R}$.

$$\underline{\underline{\forall x \in \mathbb{R}, u_p(x+c) = -u_p(x)}}$$

oui !

$$d) \pi_0(p) = \sup_{x \in \mathbb{R}} |u_p(x)| = \sup_{x \in [-2,2]} |u_p(x)| = \sup_{x \in [0,1]} |u_p(x)| = \sup_{x \in [0,1]} |u_p(x)|$$

$\swarrow$ $x \in [-2,2]$ $\uparrow$ $x \in [0,1]$ $\nwarrow$ $x \in [0,1]$
 est périodique de période 4 $\forall x \in \mathbb{R}, u_p(x+2) = u_p(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}, u_p(1-x) = u_p(x)$

De même $\pi_1(p) = \sup_{x \in \mathbb{R}} |u_p'(x)| = \sup_{x \in \mathbb{R}} |v_p(x)| = \sup_{x \in [0,1]} |v_p(x)|$ et

$$\pi_2(p) = \sup_{x \in \mathbb{R}} |u_p''(x)| = \sup_{x \in \mathbb{R}} |\omega_p(x)| = \sup_{x \in [0,1]} |\omega_p(x)|.$$

Rappelons que : $\forall x \in [0, \frac{1}{2p}]$, $\omega_p(x) = 2$ et $\forall x \in [\frac{1}{2p}, 1]$, $\omega_p(x) = 2 \sin(p\pi(1-x))$

$$\forall x \in [\frac{1}{2p}, 1], |\omega_p(x)| = |2 \sin(p\pi(1-x))| \leq 2$$

$$\text{d'où } \forall x \in [0,1], |\omega_p(x)| \leq 2 = |\omega_p(0)|.$$

Pu caractériser : $\pi_2(p) = 2$. $\lim_{p \rightarrow +\infty} \pi_2(p) = 2$.

$$\forall x \in [0, \frac{1}{2p}], v_p(x) = 2x \text{ et } \forall x \in [\frac{1}{2p}, 1], v_p(x) = 2 - \frac{1}{p} + \frac{2}{p\pi} (\omega(p\pi(1-x)))$$

$$\forall x \in [0, \frac{1}{2p}], 0 \leq v_p(x) \leq 2 - \frac{1}{p}; \text{ donc } \max_{x \in [0, \frac{1}{2p}]} |v_p(x)| = v_p(\frac{1}{2p}) = 2 - \frac{1}{p}$$

$$\forall x \in [\frac{1}{2p}, 1], 0 \leq p\pi(1-x) \leq \frac{\pi}{2}$$

$$\forall x \in [\frac{1}{2p}, 1], 2 - \frac{1}{p} \leq v_p(x) \leq 2 - \frac{1}{p} + \frac{2}{p\pi} = v_p(1).$$

$$\max_{x \in [\frac{1}{2p}, 1]} |v_p(x)| = v_p(1) = 2 - \frac{1}{p} + \frac{2}{p\pi}$$

Finalement : $\pi_1(p) = \sup_{x \in \mathbb{R}} |v_p(x)| = \max_{x \in [0,1]} |v_p(x)| = \max(2 - \frac{1}{p}, 2 - \frac{1}{p} + \frac{2}{p\pi}) = 2 - \frac{1}{p} + \frac{2}{p\pi}$.

$$\pi_1(p) = 2 - \frac{1}{p} + \frac{2}{p\pi}; \quad \lim_{p \rightarrow +\infty} \pi_1(p) = 2.$$

Remarque.. plus simple ! $\forall x \in [0,1], \omega_p(x) \geq 0$. v_p est donc croissante sur $[0,1]$.

$$\forall x \in [0,1], 0 = v_p(0) \leq v_p(x) \leq v_p(1) = 2 - \frac{1}{p} + \frac{2}{p\pi}. \text{ On a donc } \pi_1(p) = 2 - \frac{1}{p} + \frac{2}{p\pi}.$$

Notons ensuite de voir que : $\forall x \in [0,1], v_p(x) \geq v_p(0) = 0$. v_p est positive sur $[0,1]$ donc u_p est croissante sur $[0,1]$.

$$\forall x \in [0,1], u_p(0) \leq u_p(x) \leq u_p(1) = 0; \quad \max_{x \in [0,1]} |u_p(x)| = \max_{x \in [0,1]} (-u_p(x)) = -u_p(0)$$

$$\text{d'où } \pi_0(p) = -u_p(0) = -\left(0^2 - 1 + \frac{1}{4p^2} - \frac{2}{(p\pi)^2}\right) = 1 - \frac{1}{4p^2} + \frac{2}{(p\pi)^2}. \quad \lim_{p \rightarrow +\infty} \pi_0(p) = 1.$$

II 2° donne : $\pi_3 \leq \sqrt{2\pi_0\pi_2}$ pour tout $j \in E_2$.

Supposons qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}_+$ tel que : $\pi_3 \leq \lambda \sqrt{\pi_0\pi_2}$ pour tout $j \in E_2$.

Alors $\forall p \in [2, +\infty[$ $\pi_3(p) \leq \lambda \sqrt{\pi_0(p)\pi_2(p)}$ car $\forall p \in [2, +\infty[$, $u_p \in E_2$.

À la limite : $2 \leq \lambda \sqrt{2 \times 2}$; $2 \leq \lambda \sqrt{2}$; $\lambda \geq \sqrt{2}$

La majoration de π_3 par $\sqrt{2\pi_0\pi_2}$ est donc optimale.

c) Des raisonnements analogues aux précédents prouvent que :

$\forall x \in \mathbb{R}$, $U_p(-x) = -U_p(x)$ et $U_p(x+2) = -U_p(x)$.

Donc $\sup_{x \in \mathbb{R}} |U_p(x)| = \sup_{x \in [0,1]} |U_p(x)| = \max_{x \in [0,1]} |U_p(x)|$.

$\forall x \in [0,1]$, $U'_p(x) = u_p(x) \leq 0$. U_p est décroissante sur $[0,1]$.

$\forall x \in [0,1]$, $U_p(1) \leq U_p(x) \leq U_p(0) = 0$

Par conséquent : $\max_{x \in [0,1]} |U_p(x)| = -U_p(1)$

$$U_p(1) = \int_0^1 u_p(t) dt = \int_0^{1-\frac{1}{2p}} \left(t^{\frac{1}{p}-1} + \frac{1}{4p^2} - \frac{t}{(pn)^2} \right) dt + \int_{1-\frac{1}{2p}}^1 \left[\left(2 - \frac{1}{p} \right) (t-1) - \frac{t}{(pn)^2} \sin(p\pi(x+t)) \right] dt$$

$$U_p(1) = \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{2p} \right)^3 + \left(1 - \frac{1}{2p} \right) \left(-1 + \frac{1}{4p^2} - \frac{t}{(pn)^2} \right) + \left[\left(2 - \frac{1}{p} \right) \left(\frac{(t-1)^2}{2} \right) - \frac{t}{(pn)^2} (-\cos(p\pi(x+t))) \right]_{1-\frac{1}{2p}}^1$$

$$U_p(1) = \left(1 - \frac{1}{2p} \right) \left[\frac{1}{3} + \frac{1}{4p^2} - \frac{1}{3p} - 1 + \frac{1}{4p^2} - \frac{t}{(pn)^2} \right] - \left(2 - \frac{1}{p} \right) \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4p^2} \right) + \frac{t}{(pn)^2}$$

$$U_p(1) = \left(1 - \frac{1}{2p} \right) \left(-\frac{2}{3} + \frac{1}{3p^2} - \frac{1}{3p} - \frac{t}{(pn)^2} \right) - \frac{1}{4p^2} + \frac{1}{8p^3} + \frac{t}{(pn)^2} = -\frac{2}{3} + \frac{1}{4p^2} - \frac{1}{24p^3} - \frac{t}{(pn)^2} + \frac{1}{(pn)^2} + \frac{t}{(pn)^2}$$

$$U_p(1) = -\frac{2}{3} + o(1) ! \text{ Notons donc que : } \lim_{p \rightarrow +\infty} -U_p(1) = \frac{2}{3} . \text{ On a } \sup_{x \in \mathbb{R}} |U_p(x)| = \frac{2}{3} .$$

Pour $\hat{\pi}_0(p) = \sup_{x \in \mathbb{R}} |U_p(x)|$, $\hat{\pi}_1(p) = \sup_{x \in \mathbb{R}} |U'_p(x)| = \sup_{x \in \mathbb{R}} |u_p(x)| = \pi_0(p)$, $\hat{\pi}_2(p) = \sup_{x \in \mathbb{R}} |U''_p(x)| = \pi_2(p)$ et

$\hat{\pi}_3(p) = \sup_{x \in \mathbb{R}} |U'''_p(x)| = \pi_3(p)$. On a $\hat{\pi}_0(p) = \frac{2}{3}$; $\lim_{p \rightarrow +\infty} \hat{\pi}_1(p) = 1$; $\lim_{p \rightarrow +\infty} \hat{\pi}_2(p) = \lim_{p \rightarrow +\infty} \hat{\pi}_3(p) = 2$.

III 2° donne : $\forall j \in E_3$, $\pi_3 \leq \frac{1}{2} 3^{1/3} \pi_0^{1/3} \pi_2^{2/3}$ et $\pi_2 \leq \frac{1}{3} 3^{2/3} \pi_0^{2/3} \pi_3^{1/3}$

Supposons $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}_+^2$ tel que : $\forall j \in E_3$, $\pi_3 \leq \alpha \pi_0^{1/3} \pi_2^{2/3}$ et $\pi_2 \leq \beta \pi_0^{2/3} \pi_3^{1/3}$

Alors $\forall p \in [2, +\infty[$, $\hat{\pi}_3(p) \leq \alpha \hat{\pi}_0^{1/3}(p) \hat{\pi}_2^{2/3}(p)$ et $\hat{\pi}_2(p) \leq \beta \hat{\pi}_0^{2/3}(p) \hat{\pi}_3^{1/3}(p)$; à la limite :

$2 \leq \alpha \left(\frac{2}{3} \right)^{1/3} 2^{2/3}$ et $2 \leq \beta \left(\frac{2}{3} \right)^{2/3} 2^{1/3}$; $\alpha \geq \frac{1}{2} 3^{1/3}$ et $\beta \geq 3^{2/3}$ ce qui prouve l'optimalité des majorations de III 2°.