PRELIMINAIRE $a>0$

Montrons par récurrence sur n que l'intégrale $\int_0^{+\infty} t^n e^{-t/a}\,dt$ converge pour tout $n\in\mathbb{N}$.
Notons pour commencer, que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $t\mapsto t^n e^{-t/a}$ est continue (et positive) sur $\mathbb{R}_+$ donc localement intégrable.

→ $n=0$ $\forall A\in\mathbb{R}_+^*$, $\int_0^A e^{-t/a}\,dt = \left[-a e^{-t/a}\right]_0^A = -a e^{-A/a} + a$. $\lim\limits_{A\to+\infty} \int_0^A e^{-t/a}\,dt = a$.

Par conséquent : $\underline{\underline{J_0(a)=\int_0^{+\infty} t^0 e^{-t/a}\,dt \text{ existe et vaut } a.}}$

→ Supposons que $J_n(a)=\int_0^{+\infty} t^n e^{-t/a}\,dt$ converge et notons que : $J_{n+1}(a)=\int_0^{+\infty} t^{n+1} e^{-t/a}\,dt$ $(n\in\mathbb{N})$

utilisons une intégration par parties (en remarquant que : $u: t\mapsto \frac{t^{n+1}}{n+1}$ et $v: t\mapsto e^{-t/a}$ sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$).

$\forall A\in\mathbb{R}_+^*$, $\int_0^A \underset{u'}{t^n}\,\underset{v}{e^{-t/a}}\,dt = \left[\frac{t^{n+1}}{n+1} e^{-t/a}\right]_0^A - \int_0^A \frac{t^{n+1}}{n+1}\left(-\frac{1}{a}\right) e^{-t/a}\,dt = \frac{A^{n+1}}{n+1} e^{-A/a} + \frac{1}{a(n+1)}\int_0^A t^{n+1} e^{-t/a}\,dt$

comme $\lim\limits_{A\to+\infty}\left(\frac{A^{n+1}}{n+1} e^{-A/a}\right)=0$: $\underline{\int_0^{+\infty} t^n e^{-t/a}\,dt \text{ et } \int_0^{+\infty} t^{n+1} e^{-t/a}\,dt \text{ sont de même nature.}}$

L'hypothèse de récurrence donne la convergence de la première ; donc $\int_0^{+\infty} t^{n+1} e^{-t/a}\,dt$ converge ; mieux : $\int_0^{+\infty} t^n e^{-t/a}\,dt = \frac{1}{a(n+1)}\int_0^{+\infty} t^{n+1} e^{-t/a}\,dt$.

ceci achève la récurrence.

Conclusion. $\underline{\underline{\text{Pour tout } n\in\mathbb{N},\ J_n(a)=\int_0^{+\infty} t^n e^{-t/a}\,dt \text{ converge.}}}$

La récurrence a aussi montré que : → $J_0(a)=a$.
→ $\forall n\in\mathbb{N}$, $J_n(a)=\frac{1}{a(n+1)} J_{n+1}(a)$.

donc $\forall n\in\mathbb{N}$, $\frac{1}{a^n}\frac{1}{n!} J_n(a) = \frac{1}{a^{n+1}(n+1)!} J_{n+1}(a)$.

$\left(\frac{1}{a^n}\frac{1}{n!} J_n(a)\right)_{n\geq 0}$ est une suite constante de premier terme a.

Par conséquent : $\forall n\in\mathbb{N}$, $\frac{1}{a^n}\frac{1}{n!} J_n(a) = a$.

Ce qui donne : $\underline{\underline{\forall n\in\mathbb{N},\ J_n(a) = n!\ a^{n+1}.}}$

PARTIE I $\quad K(x)=e^{-x/2a} \quad a>0$

(Q1) Soit f une solution de (1). f est continue sur $\mathbb{R}_+$, $\int_0^{+\infty} K(x+t)f(t)\,dt$ converge pour tout x dans $\mathbb{R}_+$ et : $\forall x\in\mathbb{R}_+,\ f(x)=K(x)+\int_0^{+\infty}K(x+t)f(t)\,dt$.

$\forall x\in\mathbb{R}_+,\ f(x)=K(x)+\int_0^{+\infty}P(x+t)\,e^{-\frac{x+t}{2a}}f(t)\,dt \underset{P=1}{=} K(x)+\int_0^{+\infty}e^{-\frac{x}{2a}}e^{-\frac{t}{2a}}f(t)\,dt$

$\forall x\in\mathbb{R}_+,\ f(x)=K(x)+e^{-\frac{x}{2a}}\int_0^{+\infty}e^{-t/2a}f(t)\,dt = K(x)+K(x)\int_0^{+\infty}e^{-t/2a}f(t)\,dt.$

Posons alors : $c=1+\int_0^{+\infty}e^{-t/2a}f(t)\,dt$. On a alors $\forall x\in\mathbb{R}_+,\ f(x)=cK(x)$.

Cl. <u>Si f est solution : $\exists c\in\mathbb{R},\ f=cK$</u>. Ce qui signifie que l'ensemble des solutions est contenu dans la droite vectorielle engendrée par K (on évolue dans l'espace vectoriel $\mathcal{C}([0,+\infty[,\mathbb{R})$ des applications continues de $[0,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$).

(Q2).. <u>Réciproquement</u> soit $c\in\mathbb{R}$. Posons $f=cK$ et donnons une CNS pour que f soit solution. <u>Remarquons d'abord</u> que :

1°.. f est continue sur $[0,+\infty[$ car K est continue sur $[0,+\infty[$;

2°.. $\forall x\in[0,+\infty[,\ \forall t\in[0,+\infty[,\ K(x+t)f(t)=c\,e^{-\frac{x+t}{2a}}e^{-\frac{t}{2a}}=c\,e^{-\frac{x}{2a}}\,e^{-t/a}$.

D'après le préliminaire, pour tout $x\in\mathbb{R}_+$, $\int_0^{+\infty}K(x+t)f(t)\,dt$ existe et vaut $c\,e^{-\frac{x}{2a}}\int_0^{+\infty}e^{-t/a}\,dt=ac\,e^{-\frac{x}{2a}}$ ($\int_0^{+\infty}e^{-t/a}dt$ converge et vaut a).

Dès lors : f est solution de (1) si et seulement si : $\forall x\in\mathbb{R}_+,\ f(x)=K(x)+ac\,e^{-\frac{x}{2a}}$;

ou, si et seulement si : $\forall x\in\mathbb{R}_+,\ c\,e^{-\frac{x}{2a}}=e^{-\frac{x}{2a}}+ac\,e^{-\frac{x}{2a}}$

Finalement <u>f est solution de (1) si et seulement si : $c=1+ac$ ou $(1-a)c=1$.</u>

(Q3) Ne reste plus qu'à résoudre l'équation : $c\in\mathbb{R}$ et $(1-a)c=1$.

Si $a=1$ il n'y a pas de solution ; si a n'est pas 1, l'équation admet une solution et une seule : $\frac{1}{1-a}$.

Finalement si $a=1$, (1) n'a pas de solution ;

si $a\neq1$, (1) admet une solution et une seule : $\frac{1}{1-a}K$.

PARTIE II $\lambda\in\mathbb{R}$ et $P=\lambda a+X$.

(Q1) a) Par définition (ϕ_0,ϕ_1) est une famille génératrice de E. Montrons qu'elle est libre.
Soit $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$ tel que : $\alpha\phi_0+\beta\phi_1=0_E$.
$\forall x\in\mathbb{R}_+,\ 0=\alpha\phi_0(x)+\beta\phi_1(x)=(\alpha+\beta\frac{x}{a})\,e^{-x/2a}$
$\forall x\in\mathbb{R}_+,\ \alpha+\beta\frac{x}{a}=0$. Le polynôme $\alpha+\frac{\beta}{a}X$ admet une infinité de 0, il est nul.
Donc $\alpha=\frac{\beta}{a}=0$; $\alpha=\beta=0$.
Ceci achève de prouver que (ϕ_0,ϕ_1) est une famille libre de E.
Cl... (ϕ_0,ϕ_1) est une base de E.

b) Soit ϕ un élément de E de coordonnées (α,β) dans $\mathcal{B}=(\phi_0,\phi_1)$.

$\forall x\in\mathbb{R}_+,\forall t\in\mathbb{R}_+,\ K(x+t)\phi(t)=P(x+t)e^{-\frac{x+t}{2a}}\phi(t)=(\lambda a+x+t)(e^{-\frac{x+t}{2a}})(\alpha+\beta\frac{t}{a})e^{-\frac{t}{2a}}$
$\uparrow P=\lambda a+X$

$\forall(x,t)\in\mathbb{R}_+^2,\ K(x+t)\phi(t)=e^{-\frac{x}{2a}}\left[\frac{\beta}{a}t^2+(\alpha+(\lambda a+x)\frac{\beta}{a})t+\alpha(\lambda a+x)\right]e^{-t/a}$

Fixons x dans $\mathbb{R}_+$. $e^{-x/2a}$, $\frac{\beta}{a}$, $\alpha+(\lambda a+x)\frac{\beta}{a}$ et $\alpha(\lambda a+x)$ sont des constantes.
Le préliminaire a montré que : $\int_0^{+\infty}t^2e^{-t/a}dt$ existe et vaut $2a^3$, $\int_0^{+\infty}te^{-t/a}dt$ existe et vaut a^2 et $\int_0^{+\infty}e^{-t/a}dt$ existe et vaut a.

$t\mapsto K(x+t)\phi(t)$ apparaît alors comme une combinaison linéaire de fonctions continues sur $\mathbb{R}_+$ et d'intégrales, entre 0 et $+\infty$, convergentes ; on peut donc dire que : $\int_0^{+\infty}K(x+t)\phi(t)\,dt$ converge et ceci pour tout x dans $\mathbb{R}_+$.

Mieux : $\forall x\in\mathbb{R}_+,\ \int_0^{+\infty}K(x+t)\phi(t)dt=e^{-\frac{x}{2a}}\left[\frac{\beta}{a}J_2(a)+(\alpha+(\lambda a+x)\frac{\beta}{a})J_1(a)+\alpha(\lambda a+x)J_0(a)\right]$

Donc : $\forall x\in\mathbb{R}_+,\ \psi(x)=\int_0^{+\infty}K(x+t)\phi(t)dt=e^{-\frac{x}{2a}}\left[\frac{\beta}{a}\times2a^3+(\alpha+(\lambda a+x)\frac{\beta}{a})a^2+\alpha(\lambda a+x)a\right]$

ce qui s'écrit encore, en regroupant les x du crochet :
$\forall x\in\mathbb{R}_+,\ \psi(x)=e^{-\frac{x}{2a}}\times\frac{x}{a}\left[\beta a^2+\alpha a^2\right]+e^{-\frac{x}{2a}}\left[2\beta a^2+\alpha a^2+\lambda\beta a^2+\alpha\lambda a^2\right]$
Soit encore :
$\psi=a^2(\alpha+\beta)\,\phi_1+a^2\left[(\lambda+1)\alpha+(\lambda+2)\beta\right]\phi_0$; donc $\psi\in E$.

c) Revenons pour gagner du temps.

Remarquons que si $\begin{bmatrix}\alpha\\ \beta\end{bmatrix}$ est la matrice de $\phi\in E$ dans la base $\mathcal{B}=(\phi_0,\phi_1)$ alors $\varphi=u(\phi)$ a pour matrice dans cette même base : $\begin{bmatrix}a^2(\lambda+1)\alpha+a^2(\lambda+2)\beta\\ a^2(\alpha+\beta)\end{bmatrix}=a^2\begin{bmatrix}\lambda+1 & \lambda+2\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha\\ \beta\end{bmatrix}$

Notons v (!) l'endomorphisme de E tel que :
$M_{(\phi_1,\phi_2)}(v)=a^2\begin{bmatrix}\lambda+1 & \lambda+2\\ 1 & 1\end{bmatrix}$. v transforme un élément ϕ de E de coordonnées (α,β) dans $\mathcal{B}$ en l'élément, de E, de coordonnées $(a^2(\lambda+1)\alpha+a^2(\lambda+2)\beta,\ a^2(\alpha+\beta))$ dans la base $\mathcal{B}$! v transforme un élément ϕ de E en $u(\phi)$!! $v=u$.

Donc 1.. u est un endomorphisme de E
2.. $\underline{\underline{M_{(\phi_0,\phi_1)}(u)=a^2\begin{bmatrix}\lambda+1 & \lambda+2\\ 1 & 1\end{bmatrix}}}=a^2M(\lambda)$ avec $M(\lambda)=\begin{bmatrix}\lambda+1 & \lambda+2\\ 1 & 1\end{bmatrix}$.

u automorphisme de E $\Leftrightarrow a^2\begin{bmatrix}\lambda+1 & \lambda+2\\ 1 & 1\end{bmatrix}$ inversible $\overset{a>0}{\Leftrightarrow}\begin{bmatrix}\lambda+1 & \lambda+2\\ 1 & 1\end{bmatrix}$ inversible.

Cherchons une réduite de Gauss de cette dernière matrice.

$\begin{bmatrix}\lambda+1 & \lambda+2\\ 1 & 1\end{bmatrix}\ \underset{L_1\leftrightarrow L_2}{\begin{bmatrix}1 & 1\\ \lambda+1 & \lambda+2\end{bmatrix}}\ \underset{L_2\leftarrow L_2-(\lambda+1)L_1}{\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}}$. cette dernière matrice étant inversible :

$\underline{\underline{u\text{ est un automorphisme de E}}}$ $\left(M_{(\phi_0,\phi_1)}(u^{-1})=\frac{1}{a^2}\begin{bmatrix}-1 & \lambda+2\\ 1 & -(\lambda+1)\end{bmatrix}\right)$

(Q2) Soit f une solution de (1).

Remarquons d'abord que :

$\rightarrow\forall x\in\mathbb{R}_+,\ K(x)=(\lambda a+x)e^{-x/2a}=a(\lambda e^{-\frac{x}{2a}}+\frac{x}{a}e^{-\frac{x}{2a}})=[a(\lambda\phi_0+\phi_1)](x)$,

Donc $K=a(\lambda\phi_0+\phi_1)\in E$.

$\rightarrow\forall(x,t)\in\mathbb{R}_+^2,\ K(x+t)=a\left[\lambda e^{-\frac{x+t}{2a}}+\frac{x+t}{a}e^{-\frac{x+t}{2a}}\right]=a\left[\lambda\phi_0(x)+\frac{t}{a}\phi_0(x)+\phi_1(x)\right]e^{-\frac{t}{2a}}$

Donc $\forall x\in\mathbb{R}_+,\ \int_0^{+\infty}K(x+t)f(t)dt\overset{(*)}{=}\left[a\int_0^{+\infty}(\lambda+\frac{t}{a})e^{-t/2a}f(t)dt\right]\phi_0(x)+\left[a\int_0^{+\infty}e^{-t/2a}f(t)dt\right]\phi_1(x)$

Ce qui prouve que "$x\mapsto\int_0^{+\infty}K(x+t)f(t)dt$" appartient à E

constantes.

Comme f vérifie (1) : $\forall x\in\mathbb{R}_+,\ f(t)=K(x)+\int_0^{+\infty}K(x+t)f(t)dt$;

$\underline{\underline{f\text{ est alors élément de E}}}$ $\underline{\text{comme somme de deux éléments de E}}$.

<u>Remarque</u>.. les puristes pourront justifier (*) en disant qu'il est possible de "casser" l'intégrale en deux car $\int_0^{+\infty} K(x+t) f(t)dt$ converge pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ et donc en particulier pour $x=0$ (ce qui donne de la convergence à $\int_0^{+\infty} (\lambda a+t) e^{-t/2a} f(t)dt$, qui ajoutée à la convergence de $\int_0^{+\infty} K(x+t) f(t)dt$ suffit pour conclure ; OK ?).

Q3 – Réciproquement soit $f = \alpha \phi_0 + \beta \phi_1 \in E$.

1°.. f est continue sur $\mathbb{R}_+$

2°.. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $\int_0^{+\infty} K(x+t) f(t)dt$ existe (1° b)) ; mieux
$\forall x \in \mathbb{R}_+$, $\int_0^{+\infty} K(x+t) f(t)dt = u(f)(x)$

3°.. $K = a(\lambda \phi_0 + \phi_1)$

Les acteurs sont en place.

<u>a)</u> D'après ce que l'on vient de dire :

f solution de (1)
$\Updownarrow$
$f = K + u(f)$
$\Updownarrow$
$(u - Id_E)(f) = -K$
$\Updownarrow$
$$\left(a^2 \begin{bmatrix} \lambda+1 & \lambda+2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\lambda a \\ -a \end{bmatrix}$$
$\Updownarrow$
$$\begin{cases} [a^2(\lambda+1)-1]\alpha + a^2(\lambda+2)\beta = -\lambda a \\ \text{et} \\ a^2\alpha + (a^2-1)\beta = -a \end{cases}$$

<u>b)</u> Soit $f = \alpha \phi_0 + \beta \phi_1 \in E$.

f vérifie (1) si et seulement si : $\begin{cases} [a^2(\lambda+1)-1]\alpha + a^2(\lambda+2)\beta = -\lambda a \\ \text{et} \\ a^2\alpha + (a^2-1)\beta = -a. \end{cases}$

b) La résolution du système est facile. On "tire" α dans la 2ème équation et l'on remplace dans la 1ère. Soit $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$

$$\begin{cases} [a^2(\lambda+1)-1]\alpha + a^2(\lambda+2)\beta = -\lambda a \\ \text{et} \\ a^2\alpha + (a^2-1)\beta = -a \end{cases}$$

$$\Updownarrow \begin{cases} \alpha = \left(\frac{1}{a^2}-1\right)\beta - \frac{1}{a} \\ \text{et} \\ -\lambda a = \beta\left(a^2(\lambda+2) + [a^2(\lambda+1)-1]\left[\frac{1}{a^2}-1\right]\right) - \frac{1}{a}\left(a^2(\lambda+1)-1\right) = \beta\left(\frac{a^4+(\lambda+2)a^2-1}{a^2}\right) - \lambda a - a + \frac{1}{a} \end{cases}$$

$$\Updownarrow \begin{cases} \alpha = \left(\frac{1}{a^2}-1\right)\beta - \frac{1}{a} \\ (a^4+(\lambda+2)a^2-1)\beta = a(a^2-1) \end{cases}$$

. Il ne reste plus qu'à discuter de la non nullité de $a^4+(\lambda+2)a^2-1$.

__1er cas__ .. $a^4+(\lambda+2)a^2-1 \neq 0$. Le système admet une solution et une seule.

(1) admet une solution et une seule : $\alpha\phi_0+\beta\phi_1$ avec :

$$\underline{\underline{\beta = \frac{a(a^2-1)}{a^4+(\lambda+2)a^2-1}}} \quad \text{et} \quad \alpha = \left(\frac{1}{a^2}-1\right)\beta - \frac{1}{a} = \underline{\underline{\frac{-a(\lambda+2a^2)}{a^4+(\lambda+2)a^2-1}}}$$

__2ème cas__ .. $a^4+(\lambda+2)a^2-1 = 0$. Rappelons que : $a>0$. $a(a^2-1)=0 \Leftrightarrow a=1$

* __Si $a\neq 1$__ le système n'a pas de solution. (1) n'a pas de solution
* __Si $a = 1$__ l'ensemble des solutions du système est : $\{(-1,\beta) ; \beta\in\mathbb{R}\}$

Notons que $a=1$ et $a^4+(\lambda+2)a^2-1=0$ signifie $a=1$ et $\lambda=-2$

(1) admet pour ensemble de solution : $\{-\phi_0+\beta\phi_1 ; \beta\in\mathbb{R}\}$; c'est à dire

$-\phi_0 + \mathrm{Vect}(\phi_1)$.

c) Posons $x=a^2$ et $y=\lambda$. Notons que $x\neq 0$ car $a>0$.

(1) n'a pas de solution $\Leftrightarrow x\neq 1$ et $x^2+(y+2)x-1=0$

(1) " " " $\Leftrightarrow x\neq 1$ et $y = \frac{1-x^2-2x}{x}$.

(1) n'a pas de solution si et seulement si le point de coordonnées (a^2,λ) appartient à la représentation graphique de la fonction $x\mapsto\frac{1-x^2-2x}{x}$ privée du point de coordonnées $(1,-2)$ et des points d'abscisse négative.

PARTIE III

Q1 a), b) et c). Soit $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in M_{3,1}(\mathbb{R})$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$MX = \lambda X \iff \begin{cases} (1-\lambda)x + 2y + 6z = 0 \\ -x - \lambda y + 2z = 0 \\ x + 2y + (2-\lambda)z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -\lambda y + 2z & (\leftarrow L_2) \\ 0 = (1-\lambda)(-\lambda y + 2z) + 2y + 6z = (\lambda^2 - \lambda + 2)y + 2(4-\lambda)z & L_1 \\ 0 = -\lambda y + 2z + 2y + (2-\lambda)z = (2-\lambda)y + (4-\lambda)z & L_3 \end{cases}$$

$$MX = \lambda X \iff \begin{cases} x = -\lambda y + 2z \\ (2-\lambda)y + (4-\lambda)z = 0 \\ 0 = (\lambda^2 - \lambda + 2 - 4 + 2\lambda)y = (\lambda^2 + \lambda - 2)y = (\lambda - 1)(\lambda + 2)y \end{cases}$$

$\uparrow$ $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_3$

1er cas : $\lambda = 1$. $\quad MX = \lambda X \iff \begin{cases} x = -y + 2z \\ y + 3z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = -3z \\ x = 5z \end{cases}$

Donc $1 \in \text{Spec}\, M$ et $F_1 = \text{Vect}\left(\begin{bmatrix} 5 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$

2e cas : $\lambda = -2$ $\quad MX = \lambda X \iff \begin{cases} x = 2y + 2z \\ 4y + 6z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = -\frac{3}{2}z \\ x = -z \end{cases}$

Donc $-2 \in \text{Spec}\, M$ et $F_{-2} = \text{Vect}\left(\begin{bmatrix} -1 \\ -3/2 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$.

3e cas : $\lambda \neq 1$ et $\lambda \neq -2$

$MX = \lambda X \iff \begin{cases} y = 0 \\ (4-\lambda)z = 0 \\ x = 2z \end{cases}$

ou $\lambda \neq 4$ et : $MX = \lambda X \iff X = 0$; $\lambda \notin \text{Spec}\, M$

ou $\lambda = 4$ et : $MX = \lambda X \iff y = 0$ et $x = 2z$;

$4 \in \text{Spec}\, M$ et $F_4 = \text{Vect}\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$

Finalement : – $\text{Spec}(M) = \{4, 1, -2\}$

– les sous-espaces propres respectivement associés à 4, 1 et -2 sont respectivement : $\text{Vect}\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$, $\text{Vect}\left(\begin{bmatrix} 5 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$ et $\text{Vect}\left(\begin{bmatrix} -1 \\ -3/2 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$

$\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ -3/2 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$ est une base de $M_{3,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de M associés aux valeurs propres 4, 1 et -2. La matrice de passage de la base canonique à cette base est $P = \begin{bmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 0 & -3 & -3/2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ et on a alors : $P^{-1}MP = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$.

donc si $P=\begin{bmatrix}2&5&-1\\0&-3&-3/2\\1&1&1\end{bmatrix}$: $M=P\begin{bmatrix}4&0&0\\0&1&0\\0&0&-2\end{bmatrix}P^{-1}$

d) Déterminons P^{-1}

(V1)
$$\begin{bmatrix}2&5&-1\\0&-3&-3/2\\1&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&5&-1\\0&-3&-3/2\\0&-3/2&3/2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&5&-1\\0&-3&-3/2\\0&0&9/4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&5&-1\\0&1&1/2\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&5&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-1/2&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-\frac12&-\frac12&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-1/3&0\\-\frac29&-\frac29&\frac49\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac79&-\frac29&\frac49\\\frac19&-\frac29&-\frac29\\-\frac29&-\frac29&\frac49\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac29&\frac89&\frac{14}{9}\\\frac19&-\frac29&-\frac29\\-\frac29&-\frac29&\frac49\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac19&\frac49&\frac79\\\frac19&-\frac29&-\frac29\\-\frac29&-\frac29&\frac49\end{bmatrix}$$

$L_3\leftarrow L_3-\frac12L_1$ $\quad L_3\leftarrow L_3-\frac12L_2$ $\quad \begin{cases}L_3\leftarrow\frac49L_3\\L_2\leftarrow-\frac13L_2\end{cases}$ $\quad L_2\leftarrow L_2-\frac12L_3$, $L_1\leftarrow L_1+L_3$ $\quad L_1\leftarrow L_1-5L_2$ $\quad L_1\leftarrow\frac12L_1$

$$\boxed{P^{-1}=\frac19\begin{bmatrix}1&4&7\\1&-2&-2\\-2&-2&4\end{bmatrix}}$$

(V2) Soient $X=\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}\in M_{3,1}(\mathbb{R})$ et $Y=\begin{bmatrix}x'\\y'\\z'\end{bmatrix}\in M_{3,1}(\mathbb{R})$ tels que $PX=Y$.

$$\begin{cases}2x+5y-z=x'\\-3y-\frac32z=y'\\x+y+z=z'\end{cases}\qquad\begin{cases}3x+6y=x'+z' & L_1\leftarrow L_1+L_3\\-3y-\frac32z=y'\\3y-3z=x'-2z' & L_1\leftarrow L_1-2L_3\end{cases}$$

$$\begin{cases}-\frac92z=y'+x'-2z' & (L_2+L_3)\\-\frac92y=-\frac12x'+y'+z' & (L_2-\frac12L_3)\\x=\frac13(x'+z')-2y & (L_1)\end{cases}\qquad\begin{cases}y=\frac{-2}{9}(-\frac12x'+y'+z')=\frac19(x'-2y'-2z')\\z=\frac19(-2x'-2y'+4z')\\x=\frac19(3x'+3z'-2x'+4y'+4z')=\frac19(x'+4y'+7z')\end{cases}$$

On retrouve, plus facilement $P^{-1}=\frac19\begin{bmatrix}1&4&7\\1&-2&-2\\-2&-2&4\end{bmatrix}$

Q2... Soit $n\in\mathbb{N}$. $\begin{bmatrix}u_{n+1}\\v_{n+1}\\w_{n+1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2&6\\-1&0&2\\1&1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_n\\v_n\\w_n\end{bmatrix}=M\begin{bmatrix}u_n\\v_n\\w_n\end{bmatrix}$

Une récurrence simple donne alors : $\forall n\in\mathbb{N}$, $\begin{bmatrix}u_n\\v_n\\w_n\end{bmatrix}=M^n\begin{bmatrix}u_0\\v_0\\w_0\end{bmatrix}=M^n\begin{bmatrix}3\\-2\\1\end{bmatrix}$

$\forall n\in\mathbb{N}$, $M^n=\left(P\begin{bmatrix}4&0&0\\0&1&0\\0&0&-2\end{bmatrix}P^{-1}\right)^n=P\begin{bmatrix}4&0&0\\0&1&0\\0&0&-2\end{bmatrix}^nP^{-1}=P\begin{bmatrix}4^n&0&0\\0&1&0\\0&0&(-2)^n\end{bmatrix}P^{-1}$

$\forall n\in\mathbb{N}$, $\begin{bmatrix}u_n\\v_n\\w_n\end{bmatrix}=P\begin{bmatrix}4^n&0&0\\0&1&0\\0&0&(-2)^n\end{bmatrix}\frac19\begin{bmatrix}1&4&7\\1&-2&-2\\-2&-2&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\-2\\1\end{bmatrix}=\frac19P\begin{bmatrix}4^n&0&0\\0&1&0\\0&0&(-2)^n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\5\\2\end{bmatrix}=\frac19\begin{bmatrix}2&5&-1\\0&-3&-3/2\\1&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\times4^n\\5\\2(-2)^n\end{bmatrix}$

Ce qui donne aussi : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{1}{9}(4\times 4^n + 25 - 2(-2)^n)$

$$\boxed{\begin{aligned} v_n &= \frac{1}{9}(-15 - 3(-2)^n) \\ w_n &= \frac{1}{9}(2\times 4^n + 5 + 2(-2)^n) \end{aligned}}$$

b) $a^{3n}u_n \sim \frac{1}{9}\times 4\times 4^n a^{3n} = \frac{4}{9}(4a^3)^n$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{4}{9}(4a^3)^n \geq 0$.

La série de terme général $a^{3n}u_n$ est de même nature que la série de terme général $\frac{4}{9}(4a^3)^n$ qui converge si et seulement si $|4a^3| < 1$ (série géométrique)

La série de terme général $a^{3n}u_n$ converge ssi $a < \sqrt[3]{1/4}$ $(a>0)$

Un raisonnement analogue montre que :

la série de terme général $a^{3n}w_n$ converge ssi : $a < \sqrt[3]{1/4}$ $(w_n \sim \frac{2}{9}4^n)$

C'est un peu différent au niveau de $a^{3n}v_n$ (signe...).

$a^{3n}v_n \sim -\frac{3}{9}(-2a^3)^n$; $|a^{3n}v_n| \sim \frac{1}{3}(2a^3)^n$; la série de TG $|a^{3n}v_n|$ est de même nature que la série de TG $\frac{1}{3}(2a^3)^n$.

Si $a < \sqrt[3]{1/2}$ la série de terme général $a^{3n}v_n$ est absolument convergente donc convergente.

Si $a \geq \sqrt[3]{1/2}$; la suite $(|a^{3n}v_n|)_{n\geq 0}$ ne converge pas vers 0. La suite $(a^{3n}v_n)_{n\geq 0}$ pas davantage ; la série de terme général $a^{3n}v_n$ diverge.

Finalement : la série de terme général $a^{3n}v_n$ converge ssi : $a < \sqrt[3]{1/2}$.

Supposons : $a < \sqrt[3]{1/4}$. $\sum_{n=0}^{+\infty} a^{3n}u_n \underset{\uparrow}{=} \frac{4}{9}\sum_{n=0}^{+\infty}(4a^3)^n + \frac{25}{9}\sum_{n=0}^{+\infty}(a^3)^n - \frac{2}{9}\sum_{n=0}^{+\infty}(-2a^3)^n$

les trois séries convergent.

donc $\sum_{n=0}^{+\infty} a^{3n}u_n = \frac{4}{9}\frac{1}{1-4a^3} + \frac{25}{9}\frac{1}{1-a^3} - \frac{2}{9}\frac{1}{1+2a^3} = U$

De même

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a^{3n}w_n = \frac{2}{9}\frac{1}{1-4a^3} + \frac{5}{9}\frac{1}{1-a^3} + \frac{2}{9}\frac{1}{1+2a^3} = W$$

<u>Supposons : $a < 1/\sqrt[3]{2}$</u> on obtient : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a^{3n} v_n = -\frac{5}{3}\,\frac{1}{1-a^3} - \frac{1}{3}\,\frac{1}{1+2a^3} = V$

(Q3) Rappel.. $\forall x \in \mathbb{R}$, $K(x) = (3a^2 - 4ax + x^2)\, e^{-x/2a}$. Attention ici les calculs ne sont pas simples.

Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
g_n est définie sur $\mathbb{R}_+$ et $\exists (\alpha_n, \beta_n, \gamma_n) \in \mathbb{R}^3$, $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $g_n(x) = a^{3n}(\alpha_n a^2 + 2\beta_n a x + \gamma_n x^2)\, e^{-x/2a}$

→ C'est clair pour $n = 0$. $g_0 = K$ est définie sur $\mathbb{R}_+$ et comme :

$\forall x \in \mathbb{R}_+$, $g_0(x) = K(x) = (3a^2 - 4ax + x^2)\, e^{-x/2a}$ en posant : $\alpha_0 = 3$, $\beta_0 = -2$ et $\gamma_0 = 1$,
on obtient $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $g_0(x) = a^{3\times 0}(\alpha_0 a^2 + 2\beta_0 a x + \gamma_0 x^2)\, e^{-x/2a}$.

→ Supposons la propriété vraie pour $n \in \mathbb{N}$ et montrons la pour $n+1$.

$\forall (x,t) \in \mathbb{R}_+^2$, $K(x+t)\, g_n(t) = \left(3a^2 - 4a(x+t) + (x+t)^2\right) e^{-\frac{x+t}{2a}}\, a^{3n}(\alpha_n a^2 + 2\beta_n a t + \gamma_n t^2)\, e^{-\frac{t}{2a}}$

$\forall (x,t) \in \mathbb{R}_+^2$, $K(x+t)\, g_n(t) = a^{3n} e^{-\frac{x}{2a}} \Big[x^2(\alpha_n a^2 + 2\beta_n a t + \gamma_n t^2)\, e^{-t/a} + x(-4a + 2t)(\alpha_n a^2 + 2\beta_n a t + \gamma_n t^2)\, e^{-t/a}$
$+ (3a^2 - 4at + t^2)(\alpha_n a^2 + 2\beta_n a t + \gamma_n t^2)\, e^{-t/a} \Big]$ ↑ il était plus simple ↓ de regrouper les t

Posons : $u(t) = \alpha_n a^2 + 2\beta_n a t + \gamma_n t^2$
$v(t) = (-4a + 2t)(\alpha_n a^2 + 2\beta_n a t + \gamma_n t^2) = 2\gamma_n t^3 + 4a(\beta_n - \gamma_n) t^2 + 2a^2(\alpha_n - 4\beta_n) t - 4a^3 \alpha_n$
$w(t) = (3a^2 - 4at + t^2)(\alpha_n a^2 + 2\beta_n a t + \gamma_n t^2) = \gamma_n t^4 + (2\beta_n a - 4a\gamma_n) t^3 + (3a^2\gamma_n - 8\beta_n a^2 + \alpha_n a^2) t^2$
$+ (6a^3\beta_n - 4a^3\alpha_n) t + 3a^4\alpha_n$.

u, v, w sont des fonctions polynomiales et :

$\forall (x,t) \in \mathbb{R}_+^2$, $K(x+t)\, g_n(t) = a^{3n} e^{-\frac{x}{2a}} \left[x^2 u(t)\, e^{-t/a} + x\, v(t)\, e^{-t/a} + w(t)\, e^{-t/a} \right]$

Fixons x dans $\mathbb{R}_+$.

L'existence de $g_{n+1}(x) = \int_0^{+\infty} K(x+t)\, g_n(t)\, dt$ résultera de l'existence des intégrales :
$\int_0^{+\infty} u(t) e^{-t/a} dt$, $\int_0^{+\infty} v(t) e^{-t/a} dt$ et $\int_0^{+\infty} w(t) e^{-t/a} dt$.

Nous avons dans le préliminaire que : $\int_0^{+\infty} t^p e^{-t/a} dt$ existe pour tout $p \in \mathbb{N}$;
par combinaison linéaire $\int_0^{+\infty} Q(t) e^{-t/a} dt$ existe dès que Q est un polynôme. Par conséquent
les trois intégrales précédentes existent ; $g_{n+1}(x)$ existe et ceci pour tout $x \in \mathbb{R}_+$.

g_{n+1} est donc bien définie sur $\mathbb{R}^+$.

Calculons : $\int_0^{+\infty} u(t)e^{-t/a}dt$, $\int_0^{+\infty} v(t)e^{-t/a}dt$ et $\int_0^{+\infty} w(t)e^{-t/a}dt$ en se souvenant que :

$\forall p\in\mathbb{N},\ \int_0^{+\infty} t^p e^{-t/a}\,dt = p!\,a^{p+1}$.

$\int_0^{+\infty} u(t)e^{-t/a}dt = \int_0^{+\infty}(\alpha_n a^2+2\beta_n a t+\gamma_n t^2)e^{-t/a}dt = \alpha_n a^2 a + 2\beta_n a\, a^2 + \gamma_n 2a^3$

$\underline{\int_0^{+\infty} u(t)e^{-t/a}dt = a^3(\alpha_n+2\beta_n+2\gamma_n)}$.

$\int_0^{+\infty} v(t)e^{-t/a}dt = \int_0^{+\infty}[2\gamma_n t^3+4a(\beta_n-\gamma_n)t^2+2a^2(\alpha_n-4\beta_n)t-4a^3\alpha_n]e^{-t/a}dt$

$= 2\gamma_n\, 3!\,a^4 + 4a(\beta_n-\gamma_n)\,2a^3 + 2a^2(\alpha_n-4\beta_n)a^2 - 4a^3\alpha_n a$

$\underline{\int_0^{+\infty} v(t)e^{-t/a}dt} = 2a^4(6\gamma_n+4\beta_n-4\gamma_n+\alpha_n-4\beta_n-2\alpha_n) = \underline{a^3\,2a(-\alpha_n+2\gamma_n)}$.

$\int_0^{+\infty} w(t)e^{-t/a}dt = \int_0^{+\infty}[\gamma_n t^4+(2\beta_n a-4a\gamma_n)t^3+(3a^2\gamma_n-8\beta_n a^2+\alpha_n a^2)t^2+(6a^3\beta_n-4a^3\alpha_n)t+3a^4\alpha_n]e^{-t/a}dt$

$= \gamma_n\,4!\,a^5+(2\beta_n a-4a\gamma_n)\,3!\,a^4+(3a^2\gamma_n-8\beta_n a^2+\alpha_n a^2)\,2a^3+(6a^3\beta_n-4a^3\alpha_n)a^2+3a^4\alpha_n a$

$= a^5[24\gamma_n+12\beta_n-24\gamma_n+6\gamma_n-16\beta_n+2\alpha_n+6\beta_n-4\alpha_n+3\alpha_n]$

$\underline{\int_0^{+\infty} w(t)e^{-t/a}dt} = a^5[6\gamma_n+2\beta_n+\alpha_n] = \underline{a^3\,a^2(\alpha_n+2\beta_n+6\gamma_n)}$.

Tout est en place. Soit $x\in\mathbb{R}_+$.

$q_{n+1}(x) = \int_0^{+\infty}K(x+t)\,q_n(t)\,dt = a^{3n}e^{-\frac{x}{2a}}\left(\int_0^{+\infty}(x^2u(t)+x\,v(t)+w(t))e^{-t/a}dt\right)$

$q_{n+1}(x) = a^{3n}e^{-\frac{x}{2a}}\left(\int_0^{+\infty}w(t)e^{-t/a}dt + x\int_0^{+\infty}v(t)e^{-t/a}dt + x^2\int_0^{+\infty}u(t)dt\right)$

$q_{n+1}(x) = a^{3n}e^{-\frac{x}{2a}}\left(a^3a^2(\alpha_n+2\beta_n+6\gamma_n)+x\,a^3\,2a(-\alpha_n+2\gamma_n)+x^2a^3(\alpha_n+2\beta_n+2\gamma_n)\right)$.

Posons $\underline{\underline{\alpha_{n+1}=\alpha_n+2\beta_n+6\gamma_n,\ \beta_{n+1}=-\alpha_n+2\gamma_n \text{ et } \gamma_{n+1}=\alpha_n+2\beta_n+2\gamma_n}}$.

Il vient : $q_{n+1}(x) = a^{3n}e^{-\frac{x}{2a}}a^3(a^2\alpha_{n+1}+x\,2a\beta_{n+1}+x^2\gamma_{n+1})$

$\underline{\text{ou}}$ $q_{n+1}(x) = a^{3(n+1)}(\alpha_{n+1}a^2+2\beta_{n+1}ax+\gamma_{n+1}x^2)e^{-x/2a}$ ... pour tout $x\in\mathbb{R}_+$

ceci achève cette petite récurrence.

Notons que : $\alpha_0=3,\ \beta_0=-2,\ \gamma_0=1$ et $u_0=3,\ v_0=-2,\ w_0=1$

De plus : $\forall n\in\mathbb{N}$, $\begin{cases}\alpha_{n+1}=\alpha_n+2\beta_n+6\gamma_n\\ \beta_{n+1}=-\alpha_n+2\gamma_n\\ \gamma_{n+1}=\alpha_n+2\beta_n+2\gamma_n\end{cases}$ et $\begin{cases}u_{n+1}=u_n+2v_n+6w_n\\ v_{n+1}=-u_n+2w_n\\ w_{n+1}=u_n+2v_n+2w_n\end{cases}$

Une récurrence très simple donne alors : $\forall n\in\mathbb{N}$, $\alpha_n=u_n$, $\beta_n=v_n$ et $\gamma_n=w_n$.

Donc $\forall n\in\mathbb{N}$, $\alpha_n=\frac{1}{9}(4\times4^n+25-2(-2)^n)$, $\beta_n=\frac{1}{9}(-15-3(-2)^n)$ et $\gamma_n=\frac{1}{9}(2\times4^n+5+2(-2)^n)$.

b) $\forall k\in\mathbb{N}$, $\forall x\in\mathbb{R}_+$, $\int_0^{+\infty}K(x+t)\,g_k(t)\,dt$ existe. Or $\forall n\in\mathbb{N}$, $\forall t\in\mathbb{R}_+$, $f_n(t)=\sum_{k=0}^{n}g_k(t)$, donc

$\forall n\in\mathbb{N}$, $\forall x\in\mathbb{R}_+$, $\int_0^{+\infty}K(x+t)\,f_n(t)\,dt$ existe. Soit $x\in\mathbb{R}_+$ et soit $n\in\mathbb{N}$.

$$\int_0^{+\infty}K(x+t)f_n(t)dt=\sum_{k=0}^{n}\int_0^{+\infty}K(x+t)g_k(t)dt=\sum_{k=0}^{n}g_{k+1}(x)=\sum_{k=1}^{n+1}g_k(x)$$

Donc $K(x)+\int_0^{+\infty}K(x+t)f_n(t)dt=g_0(x)+\sum_{k=1}^{n+1}g_k(x)=\sum_{k=0}^{n+1}g_k(x)=f_{n+1}(x)$

$\forall n\in\mathbb{N}$, $\forall x\in\mathbb{R}_+$, $f_{n+1}(x)=K(x)+\int_0^{+\infty}K(x+t)f_n(t)dt$.

Q4 a) Soit $x\in\mathbb{R}_+$.

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad f_n(x)=\sum_{k=0}^{n}g_k(x)=\sum_{k=0}^{n}a^{3k}(\alpha_k a^2+2\beta_k ax+\gamma_k x^2)e^{-x/2a}$$

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad f_n(x)\underset{\uparrow}{=}\Big[\Big(\sum_{k=0}^{n}a^{3k}u_k\Big)a^2+2\Big(\sum_{k=0}^{n}a^{3k}v_k\Big)ax+\Big(\sum_{k=0}^{n}a^{3k}w_k\Big)x^2\Big]e^{-x/2a}$$

$\alpha_k=u_k,\ \beta_k=v_k,\ \gamma_k=w_k$

Nous avons ici $a<\sqrt[3]{1/4}$; ceci suffit pour donner la convergence des séries de termes généraux $a^{3k}u_k$, $a^{3k}v_k$ et $a^{3k}w_k$

Donc $\lim_{n\to+\infty}f_n(x)=(Ua^2+2Vax+Wx^2)e^{-x/2a}=L(x)$.

pour tout $x\in\mathbb{R}_+$, $(f_n(x))_{n\geqslant0}$ converge vers $L(x)$. $\forall x\in\mathbb{R}_+$, $L(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}g_n(x)$!

b) $\forall x\in\mathbb{R}_+$, $\forall n\in\mathbb{N}$, $f_{n+1}(x)=k(x)+\int_0^{+\infty}K(x+t)f_n(t)\,dt$ passer à la limite ... de manière licite ! Soit $x\in\mathbb{R}$ et $n\in\mathbb{N}$.

$$f_{n+1}(x)=K(x)+\int_0^{+\infty}K(x+t)\sum_{\ell=0}^{n}g_\ell(t)\,dt=\sum_{\ell=0}^{n}\int_0^{+\infty}K(x+t)g_\ell(t)\,dt+K(x)$$

$$f_{n+1}(x)=K(x)+\sum_{\ell=0}^{n}\int_0^{+\infty}K(x+t)(a^{3\ell})(\alpha_\ell a^2+2\beta_\ell at+\delta_\ell t^2)e^{-t/2a}\,dt$$

les 3 intégrales sont convergentes

$$f_{n+1}(x)=K(x)+\left[\sum_{\ell=0}^{n}a^{3\ell}\alpha_\ell\right]a^2\int_0^{+\infty}K(x+t)e^{-t/2a}\,dt+\left(\sum_{\ell=0}^{n}a^{3\ell}\beta_\ell\right)2a\int_0^{+\infty}K(x+t)te^{-t/2a}\,dt+$$

$$+\left[\sum_{\ell=0}^{n}a^{3\ell}\delta_\ell\right]\int_0^{+\infty}K(x+t)t^2e^{-t/2a}\,dt.$$ Passer à la limite ; il vient : $f_{n+1}(x)=$

$$K(x)+Ua^2\int_0^{+\infty}K(x+t)e^{-t/2a}\,dt+V2a\int_0^{+\infty}K(x+t)te^{-t/2a}\,dt+W\int_0^{+\infty}K(x+t)t^2e^{-t/2a}\,dt$$

ou $L(x)=K(x)+\int_0^{+\infty}K(x+t)\left[Ua^2+2Vat+Wt^2\right]e^{-t/2a}\,dt$

c'est à dire : $L(x)=K(x)+\int_0^{+\infty}K(x+t)L(t)\,dt$. Donc L est solution de (1)

(Q5) Soit f une solution de (1)

Pour tout $x\in\mathbb{R}_+$, $f(x)=K(x)+\int_0^{+\infty}K(x+t)f(t)\,dt$

$$f(x)=(3a^2-4ax+x^2)e^{-x/2a}+\int_0^{+\infty}(3a^2-4a(x+t)+(x+t)^2)e^{-\frac{x+t}{2a}}f(t)\,dt$$

$$f(x)\overset{*}{=}e^{-x/2a}\Big[3a^2-4ax+x^2+x^2\int_0^{+\infty}e^{-t/2a}f(t)\,dt+x\int_0^{+\infty}(2t-4a)e^{-t/2a}f(t)\,dt+\int_0^{+\infty}(3a^2-4at+t^2)e^{-t/2a}f(t)\,dt\Big]$$

$$f(x)=e^{-x/2a}\Big[\underbrace{\Big(1+\int_0^{+\infty}e^{-t/2a}f(t)\,dt\Big)}_{C}x^2+\underbrace{\Big(-4a+\int_0^{+\infty}(2t-4a)e^{-t/2a}f(t)\,dt\Big)}_{2Ba\text{ (...divisé par }2a\text{...)}}x+\underbrace{\Big(3a^2+\int_0^{+\infty}(3a^2-4at+t^2)e^{-t/2a}f(t)\,dt\Big)}_{a^2A\text{ (divisé par }a^2\text{...)}}\Big]=(a^2A+2Bax+Cx^2)e^{-x/2a}$$

Ce qui donne : $\forall x\in\mathbb{R}_+$, $f(x)=(Aa^2+2Bax+Cx^2)e^{-x/2a}$.

 p 14

Donc toute solution f de (1) est de la forme : $f(x)=(Aa^2+2Bax+Cx^2)e^{-x/2a}$.

On peut encore écrire que toute solution f de (1) est de la forme : $f(x)=\varphi(x)e^{-x/2a}$ où $\varphi\in\mathbb{R}_2[X]$.

<u>Remarque</u>.. L'égalité (*) est licite car la convergence de $\int_0^{+\infty}(3a^2-4a(x+t)+(x+t)^2)e^{-\frac{x+t}{2a}}f(t)dt$ pour tout réel x positif., donne de la convergence aux intégrales $\int_0^{+\infty}e^{-t/2a}f(t)dt$, $\int_0^{+\infty}(2t-4a)e^{-t/2a}f(t)dt$ et $\int_0^{+\infty}(3a^2-4at+t^2)e^{-t/2a}f(t)dt$ (se débarrasser de $e^{-x/2a}$ et donner trois valeurs à x : 0, 1 et 2 ... puis faire des combinaisons linéaires).

Q6.. Posons $\forall x\in\mathbb{R}_+$, $f(x)=(Aa^2+2Bax+Cx^2)e^{-x/2a}$ et revenons sur le calcul fait en Q3..

Pour tout $x\in\mathbb{R}_+$, $\varphi_n(x)=a^{3n}(\alpha_n a^2+2\beta_n a x+\delta_n x^2)e^{-x/2a}$ nous a montré l'existence pour tout $x\in\mathbb{R}_+$ de $\int_0^{+\infty}K(x+t)\varphi_n(t)dt$ et l'égalité $\int_0^{+\infty}K(x+t)\varphi_n(t)dt=a^{3n}e^{-\frac{x}{2a}}\left(a^3a^2(\alpha_n+2\beta_n+6\delta_n)+xa^3 2a(-\alpha_n+2\delta_n)+x^2a^3(\alpha_n+2\beta_n+2\delta_n)\right)$ (Notons que a^{3n} est "neutre").

Par analogie on peut donc dire que pour tout $x\in\mathbb{R}_+$:

$\int_0^{+\infty}K(x+t)f(t)dt$ existe et vaut $e^{-\frac{x}{2a}}\left[a^3a^2(A+2B+6C)+xa^3 2a(-A+2C)+x^2a^3(A+2B+2C)\right]$.

Par conséquent :

f solution de (1)

$\Updownarrow$ $\forall x\in\mathbb{R}_+,\ f(x)=K(x)+\int_0^{+\infty}K(x+t)f(t)dt$

$\Updownarrow$ $\forall x\in\mathbb{R}_+,\ (Aa^2+2Bax+Cx^2)e^{-x/2a}=(3a^2-4ax+x^2)e^{-\frac{x}{2a}}+\left[a^5(A+2B+6C)+2a^4x(-A+2C)+x^2a^3(A+2B+2C)\right]e^{-x/2a}$

$\Updownarrow$ $\forall x\in\mathbb{R}_+,\ Aa^2+2Bax+Cx^2=3a^2+a^5(A+2B+6C)+(-4a+2a^4(-A+2C))x+(1+a^3(A+2B+2C))x^2$

$$\Updownarrow\ \begin{cases}Aa^2=3a^2+a^5(A+2B+6C)\\ 2Ba=-4a+2a^4(-A+2C)\\ C=1+a^3(A+2B+2C)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}A-a^3(A+2B+6C)=3\\ B-a^3(-A+2C)=-2\\ C-a^3(A+2B+2C)=1\end{cases}\Leftrightarrow (I_3-a^3M)\begin{bmatrix}A\\B\\C\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\-2\\1\end{bmatrix}$$

$M=\begin{bmatrix}1&2&6\\-1&0&2\\1&2&2\end{bmatrix}$

b) Le système admet une solution et une seule

$\Updownarrow$ $(I_3 - a^3 M)$ inversible

$\Updownarrow$ $a^3 M - I_3$ inversible

$\Updownarrow$ $M - \frac{1}{a^3} I_3$ inversible

$\Updownarrow$ $\frac{1}{a^3} \notin \operatorname{spec} M$

$\Updownarrow$ $\frac{1}{a^3} \notin \{4, 1, -2\}$

$a>0$ $\Updownarrow$ $a^3 \notin \{\frac{1}{4}, 1\}$

$\Updownarrow$ $\underline{\underline{a \neq 1/\sqrt[3]{4} \text{ et } a = 1}}$.

Supposons $a \neq 1$ et $a \neq 1/\sqrt[3]{4}$.

Le système admet une solution et une seule. Au lieu de calculer ... vérifier que (U, V, W) est la solution !

Prouvons alors que :

$$\begin{cases} U - a^3(U+2V+6W) = 3 \\ V - a^3(-U+2W) = -2 \\ W - a^3(U+2V+2W) = 1 \end{cases}$$

$\rightarrow$

$$U+2V+6W = \frac{1}{1-4a^3}\Big[\frac{4}{9} \underbrace{}_{\text{vide!!}} + 6 \times \frac{2}{9}\Big] + \frac{1}{1-a^3}\Big[\frac{25}{9} + 2\times\left(-\frac{5}{3}\right) + 6\left(\frac{5}{9}\right)\Big] + \frac{1}{1+2a^3}\Big[-\frac{2}{9} + 2\left(-\frac{1}{3}\right) + 6 \times \frac{2}{9}\Big]$$

$$U+2V+6W = \frac{1}{1-4a^3}\Big[\frac{16}{9}\Big] + \frac{1}{1-a^3}\Big[\frac{25}{9}\Big] + \frac{1}{1+2a^3}\Big[\frac{4}{9}\Big]$$

$$U - a^3(U+2V+6W) = \frac{4}{9}\frac{1}{1-4a^3} + \frac{25}{9}\frac{1}{1-a^3} - \frac{2}{9}\frac{1}{1+2a^3} - \frac{16}{9}\frac{a^3}{1-4a^3} - \frac{25}{9}\frac{a^3}{1-a^3} - \frac{4}{9}\frac{a^3}{1+2a^3}$$

$$U - a^3(U+2V+6W) = \frac{4}{9}\left(\frac{1-4a^3}{1-4a^3}\right) + \frac{25}{9}\frac{1-a^3}{1-a^3} - \frac{2}{9}\frac{1+2a^3}{1+2a^3} = \frac{4+25-2}{9} = \frac{27}{9} = \underline{\underline{3}}.$$

$$V - a^3(-U+2W) = -\frac{5}{3}\frac{1}{1-a^3} - \frac{1}{3}\frac{1}{1+2a^3} - a^3\left(-\frac{4}{9}\frac{1}{1-4a^3} - \frac{25}{9}\frac{1}{1-a^3} + \frac{2}{9}\frac{1}{1+2a^3} + \frac{4}{9}\frac{1}{1-4a^3} + \frac{10}{9}\frac{1}{1-a^3} + \frac{4}{9}\frac{1}{1+2a^3}\right)$$

$$V - a^3(-U+2W) = \frac{1}{1-a^3}\left(-\frac{5}{3} + \frac{25}{9}a^3 - \frac{10}{9}a^3\right) + \frac{1}{1+2a^3}\left(-\frac{1}{3} - \frac{2}{9}a^3 - \frac{4}{9}a^3\right)$$

$$V - a^3(-U+2W) = -\frac{15}{9} - \frac{1}{3} = -\frac{18}{9} = \underline{\underline{-2}}$$

$$W - a^3(U+2V+2W) = \frac{1}{1-4a^3}\Big[\frac{2}{9} - a^3\left(\frac{4}{9} + \frac{4}{9}\right)\Big] + \frac{1}{1-a^3}\Big[\frac{5}{9} - a^3\left(\frac{25}{9} - \frac{10}{3} + \frac{10}{9}\right)\Big] + \frac{1}{1+2a^3}\Big[\frac{2}{9} - a^3\Big($$

$$-\frac{2}{9} - \frac{2}{3} + \frac{4}{9}\Big)\Big] = \frac{1}{1-4a^3}\frac{2}{9}(1-4a^3) + \frac{1}{1-a^3}\frac{5}{9}(1-a^3) + \frac{1}{1+2a^3}\frac{2}{9}(1+2a^3) = \frac{2}{9} + \frac{5}{9} + \frac{2}{9} = \underline{\underline{1}}$$

ceci achève de prouver que pour $a \neq 1$ et $a \neq 1/\sqrt[3]{4}$ l'unique solution du système est : (U, V, W) (... ce que nous savions pour $a < 1/\sqrt[3]{4}$ ... ok?)

(1) admet alors une unique solution : L !

(Q7) 1^er cas : $a=1$

$$(I_3-a^3\Pi)\begin{bmatrix}A\\B\\C\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\-2\\1\end{bmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}A-(A+2B+6C)=3\\B-(-A+2C)=-2\\C-(A+2B+2C)=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-2B-6C=3\\A+B-2C=-2\\-A-2B-C=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}B+3C=-3/2\\A+B-2C=-2\\-B-3C=-1\end{cases}\ !!$$

$L_3 \leftarrow L_3+L_2$

Le système n'a pas de solution.

Conclusion : Si $a=1$: (1) n'a pas de solution.

2^ème cas : $a=1/\sqrt[3]{4}$

$$(I_3-a^3\Pi)\begin{bmatrix}A\\B\\C\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\-2\\1\end{bmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}A-\frac{1}{4}(A+2B+6C)=3\\B-\frac{1}{4}(-A+2C)=-2\\C-\frac{1}{4}(A+2B+2C)=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3A-2B-6C=12\\A+4B-2C=-8\\-A-2B+2C=4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-14B=36\\2B=-4\end{cases}\ !$$

$L_2 \leftarrow L_2-3A$

$L_3 \leftarrow L_3+L_2$

Conclusion : Si $a=1/\sqrt[3]{4}$: (1) n'a pas de solution.

Si $a\neq 1$ et $a\neq 1/\sqrt[3]{4}$: (1) admet une solution et une seule : L.