I Etude d'une suite de polynômes

(Q1). Une récurrence simple montre que pour tout n élément de $\mathbb{N}$, f_0 est n fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x\in\mathbb{R}$, $f^{(n)}(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^n e^{x/2}$; par conséquent f_0 est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$.

De plus : $\forall x\in\mathbb{R}$, $4x f_0''(x)-8\times 0\times f_0'(x)-x f_0(x)=4x\times\frac{1}{4}e^{x/2}-xe^{x/2}=0$

f_0 est donc un élément de E_0.

(Q2) soit $n\in\mathbb{N}$.

a et b : f_n est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ il en est donc de même de $2(2n+1)f_n$.

$x\mapsto -2x$ et f_n' sont de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ il en est donc de même de leur produit.

Finalement $f_{n+1}=[x\mapsto 2((2n+1)f_n(x)-xf_n'(x))]$ est donc de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ comme somme de deux fonctions de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

En particulier f_{n+1} est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$\forall x\in\mathbb{R}$, $f_{n+1}'(x)=2(2n+1)f_n'(x)-2f_n'(x)-2xf_n''(x)=4nf_n'(x)-2xf_n''(x)\overset{f_n \text{ appartient à } E_n}{=}-\frac{x}{2}f_n(x)$.

Montrons pour terminer que : $f_{n+1}\in E_{n+1}$. Il ne reste plus à montrer que : $\forall x\in\mathbb{R}$, $4xf_{n+1}''(x)-8(n+1)f_{n+1}'(x)-xf_{n+1}(x)=0$

Soit $x\in\mathbb{R}$. $f_{n+1}'(x)=-\frac{x}{2}f_n(x)$ donc $f_{n+1}''(x)=-\frac{1}{2}f_n(x)-\frac{x}{2}f_n'(x)$. Par conséquent :

$$4xf_{n+1}''(x)-8(n+1)f_{n+1}'(x)-xf_{n+1}(x)=-2xf_n(x)-2x^2f_n'(x)-8(n+1)x\left(-\frac{x}{2}f_n(x)\right)-x\left[2\left((2n+1)f_n(x)-xf_n'(x)\right)\right]$$

$$4xf_{n+1}''(x)-8(n+1)f_{n+1}'(x)-xf_{n+1}(x)=f_n(x)\left[\underbrace{-2x+4(n+1)x-2(2n+1)x}_{=0}\right]+f_n'(x)\left[-2x^2+2x^2\right]=0 \ \dots \text{cqfd}.$$

(Q3) a) $\forall x\in\mathbb{R}$, $f_1(x)=f_{0+1}(x)=2\left((2\times0+1)f_0(x)-xf_0'(x)\right)=2f_0(x)-2xf_0'(x)=2e^{x/2}-2x\times\frac{1}{2}e^{x/2}$

$$\underline{\underline{\forall x\in\mathbb{R},\ f_1(x)=(2-x)e^{x/2}}}$$

b) Soit $n\in\mathbb{N}^*$. $\forall x\in\mathbb{R}$, $f_n'(x)=-\frac{x}{2}f_{n-1}(x)$ d'après Q2a.

Par définition : $\forall x\in\mathbb{R}$, $f_{n+1}(x)=2\left[(2n+1)f_n(x)-xf_n'(x)\right]$.

Par conséquent : $\forall x\in\mathbb{R}$, $f_{n+1}(x)=2\left[(2n+1)f_n(x)-x\left(-\frac{x}{2}f_{n-1}(x)\right)\right]$

donc : $\underline{\underline{\forall x\in\mathbb{R},\ f_{n+1}(x)=2(2n+1)f_n(x)+x^2f_{n-1}(x)}}$.

(Q4) Il convient avant tout de montrer (par récurrence) que $P_n : x\mapsto f_n(x)e^{-x/2}$ est un polynôme pour tout $n\in\mathbb{N}$ (... même si le texte l'admet)

→ C'est vrai pour $n=0$ car : $\forall x\in\mathbb{R}$, $P_0(x)=f_0(x)e^{-x/2}=1$. C'est vrai pour $n=1$ car :

$\forall x\in\mathbb{R}$, $P_1(x)=f_1(x)e^{-x/2}=(2-x)e^{x/2}e^{-x/2}=2-x$

→ Supposons la propriété vraie pour $n-1$ et n ($n\in\mathbb{N}^*$) et montrons la pour $n+1$

$\forall x\in\mathbb{R}$, $P_{n+1}(x)=f_{n+1}(x)e^{-x/2}=2(2n+1)f_n(x)e^{-x/2}+x^2f_{n-1}(x)e^{-x/2}=2(2n+1)P_n(x)+x^2P_{n-1}(x)$.

donc $\forall x\in\mathbb{R}$, $P_{n+1}(x)=2(2n+1)P_n(x)+x^2P_{n-1}(x)$.

P_n et P_{n-1} étant deux éléments de $\mathbb{R}[X]$ et il en résulte que P_{n+1} appartient à $\mathbb{R}[X]$.
Ceci achève la récurrence.

Nous pouvons donc dire maintenant que:

* → Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P_n \in \mathbb{R}[X]$.
* → $P_0 = 1$ et $P_1 = 2 - X$
* → $\forall x \in \mathbb{R}$, $P_{n+1}(x) = 2(2n+1)P_n(x) + x^2 P_{n-1}(x)$ $\quad (P_{n+1} = 2(2n+1)P_n + X^2 P_{n-1})$.

* Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, P_n est de degré n.
  → C'est vrai pour $n=0$ et $n=1$ $\quad$ ($\deg P_0 = \deg 1 = 0$ et $\deg P_1 = \deg(2-X) = 1$).
  → Supposons la propriété vraie pour $n-1$ et n ($n \in \mathbb{N}^*$) et montrons la pour $n+1$.
  $P_{n+1} = 2(2n+1)P_n + X^2 P_{n-1}$, $\quad \deg(2(2n+1)P_n) = n$ et $\deg(X^2 P_{n-1}) = n+1$
  Par conséquent $\deg P_{n+1} = n+1$ $\quad$ ($\because \deg(P+Q) \leq \max(\deg P, \deg Q)$ avec égalité si $\deg P \neq \deg Q$)
  Ceci achève cette récurrence.

* Montrons que: $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in]-\infty, 2[$, $P_n(x) > 0$
  → $\forall x \in]-\infty, 2[$, $P_0(x) = 1 > 0$ et $P_1(x) = 2 - x > 0$; la propriété est vraie pour $n=0$ et $n=1$.
  → Supposons une nouvelle fois la propriété vraie pour $n-1$ et n ($n \in \mathbb{N}^*$); montrons la pour $n+1$.
  $\forall x \in]-\infty, 2[$, $2(2n+1)P_n(x) > 0$ et $\forall x \in]-\infty, 2[$, $x^2 P_{n-1}(x) \geq 0$
  Par conséquent: $\forall x \in]-\infty, 2[$, $P_{n+1}(x) = 2(2n+1)P_n(x) + x^2 P_{n-1}(x) > 0$. Ceci achève la récurrence.

* Une troisième récurrence analogue aux précédentes montre que pour tout $n \in \mathbb{N}$, P_n est à coefficients entiers ($\forall n \in \mathbb{N}$, $P_n \in \mathbb{Z}[X]$)

* Soit $\hat{a}_n$ le coefficient de X^n dans P_n.
  $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P_{n+1} = 2(2n+1)P_n + X^2 P_{n-1}$; par conséquent: $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\hat{a}_{n+1} = \hat{a}_{n-1}$.
  Ceci montre que: $\forall n \in \mathbb{N}$, $\hat{a}_{2n} = \hat{a}_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $\hat{a}_{2n+1} = \hat{a}_1 = -1$
  Par conséquent: $\underline{\forall n \in \mathbb{N},\ \hat{a}_n = (-1)^n}$.

* $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P_{n+1}(0) = 2(2n+1)P_n(0) + 0 = 2(2n+1)P_n(0)$
  Notons que ceci vaut encore pour $n=0$ $\quad$ ($P_1(0) = 2$ et $P_0(0) = 1$).
  Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $P_{n+1}(0) = 2(2n+1)P_n(0)$.
  Une récurrence simple donne alors: $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $\quad P_n(0) = 2^n \prod_{k=0}^{n-1}(2k+1) = 2^n \times 1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times (2n-1)$

  $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P_n(0) = 2^n \times \dfrac{(2n)!}{2 \times 4 \times 6 \times \cdots \times 2n} = \dfrac{(2n)!}{n!}$

  $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P_n(0) = \dfrac{(2n)!}{n!}$; mieux: $\forall n \in \mathbb{N}$, $P_n(0) = \dfrac{(2n)!}{n!}$ $\quad$ (car $P_0(0) = 1$)

II Etude d'une suite de fractions rationnelles

1°. Etude numérique d'un exemple.

a.. Voir page 10

b..

n	$p_n(1)$	$p_n(-1)$	$u_n(1)$
0	1	1	1
1	1	3	3
2	7	19	2,714 285 71
3	71	193	2,718 309 859
4	1001	2721	2,718 281 718
5	18 089	49 171	2,718 281 829
6	398 959	1 084 483	2,718 281 828
7	10 391 523	28 245 729	" " "
8	312 129 649	848 456 353	" " "

Il semble donc que : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n(1) = e$.

2°. Etude d'une fonction auxiliaire. a) Soit n un élément de $\mathbb{N}$.

Soit x un réel tel que $p_n(x) \neq 0$.

$$u_n(x) - e^x = \frac{p_n(-x)}{p_n(x)} - e^x = \frac{f_n(-x)e^{x/2}}{f_n(x)e^{-x/2}} - e^x = \frac{f_n(-x)}{f_n(x)}e^x - e^x = \frac{f_n(-x)-f_n(x)}{f_n(x)}e^x = -\frac{f_n(x)-f_n(-x)}{f_n(x)e^{-x/2}}e^{x/2}$$

$$u_n(x) - e^x = -\frac{g_n(x)/(-1)^n}{p_n(x)}e^{x/2} = -\frac{g_n(x)(-1)^n}{p_n(x)}e^{x/2} = (-1)^{n+1}\frac{e^{x/2}g_n(x)}{p_n(x)}.$$

Donc si x n'est pas zéro de p_n : $\underline{\underline{u_n(x) - e^x = (-1)^{n+1}\dfrac{e^{x/2}q_n(x)}{p_n(x)}}}$

b) Soit $n \in \mathbb{N}$. $\forall x \in \mathbb{R}$, $q_n(-x) = (-1)^n(f_n(-x) - f_n(+x)) = -(-1)^n(f_n(x) - f_n(-x)) = -q_n(x)$.

$\underline{q_n \text{ est impaire sur } \mathbb{R}}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. $\frac{1}{2}\int_0^x t\,q_n(t)\,dt = (-1)^n \int_0^x \frac{t}{2} f_n(t)\,dt - (-1)^n \int_0^x \frac{t}{2} f_n(-t)\,dt$ par définition de q_n

$\frac{1}{2}\int_0^x t\,q_n(t)\,dt = (-1)^n \int_0^x (-f'_{n+1}(t))\,dt - (-1)^n \int_0^x f'_{n+1}(-t)\,dt$ car $\forall t \in \mathbb{R}$, $f'_{n+1}(t) = -\frac{t}{2}f_n(t)$

$$= (-1)^n\left[-f_{n+1}(t)\right]_0^x - (-1)^n\left[-f_{n+1}(-t)\right]_0^x = (-1)^{n+1}\left[f_{n+1}(t) - f_{n+1}(-t)\right]_0^x$$

$$= q_{n+1}(x) - q_{n+1}(0) = q_{n+1}(x) \quad \text{car } q_{n+1}(0) = 0$$

Finalement : $\underline{\forall x \in \mathbb{R},\ q_{n+1}(x) = \frac{1}{2}\int_0^x t\,q_n(t)\,dt}$

c) Montrons par récurrence que : $\forall n\in\mathbb{N}, \forall x\in\mathbb{R}_+,\ 0\leq q_n(x)\leq \left(\frac{x^2}{4}\right)^n \frac{e^{x/2}}{n!}$.

$\rightarrow$ $\forall x\in\mathbb{R},\ q_0(x)=f_0(x)-f_0(-x)=e^{x/2}-e^{-x/2}$

$\forall x\in\mathbb{R}_+ \quad 0\leq e^{x/2}-e^{-x/2}\leq e^{x/2}=\left(\frac{x^2}{4}\right)^0\frac{e^{x/2}}{0!}$ ... à un abus près.

Donc $\forall x\in\mathbb{R}_+,\ 0\leq q_0(x)\leq \left(\frac{x^2}{4}\right)^0\frac{e^{x/2}}{0!}$; la propriété est vraie pour $n=0$.

$\rightarrow$ Supposons la propriété vraie pour $n\in\mathbb{N}$ et montrons la pour $n+1$. vue ! $e^{t/2}\leq e^{x/2}$ pour $t\in[0,x]$

Soit $x\in\mathbb{R}_+$. $\forall t\in[0,x],\ 0\leq t\,q_n(t)\leq t\left(\frac{t^2}{4}\right)^n\frac{e^{t/2}}{n!}\leq \frac{1}{4^n}\frac{e^{x/2}}{n!}t^{2n+1}$

En intégrant on obtient : $0\leq \int_0^x t\,q_n(t)\,dt\leq \frac{1}{4^n}\frac{e^{x/2}}{n!}\int_0^x t^{2n+1}dt=\frac{1}{4^n}\frac{e^{x/2}}{n!}\frac{x^{2n+2}}{2n+2}$

$0\leq q_{n+1}(x)=\frac{1}{2}\int_0^x t\,q_n(t)\,dt\leq \frac{1}{2}\,\frac{1}{4^n}\,\frac{e^{x/2}}{n!}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{n+1}\times(x^2)^{n+1}=\left(\frac{x^2}{4}\right)^{n+1}\frac{e^{x/2}}{(n+1)!}$ ... cqfd.

ceci achève la récurrence.

Par conséquent : $\forall n\in\mathbb{N},\ \forall x\in\mathbb{R}^+,\ 0\leq q_n(x)\leq\left(\frac{x^2}{4}\right)^n\frac{e^{x/2}}{n!}$.

Q3 Convergence de la suite $(u_n(x))$ pour $x\leq 0$.

Notons que si $x\in\mathbb{R}_-$, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $P_n(x)>0$ donc pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n(x)$ a un sens.

a) $\rightarrow$ $P_0(x)=1\geq 1=P_0(0)$

$\forall x\in\mathbb{R}_-,\ P_1(x)=2-x\geq 2=P_1(0)$

La propriété est vraie pour $n=0$ et $n=1$.

$\rightarrow$ Supposons la propriété vraie pour $n-1$ et n $(n\in\mathbb{N}^*)$. Montrons la pour $n+1$.

Soit $x\in\mathbb{R}_-$. $\quad 2(2n+1)P_n(x)\geq 2(2n+1)P_n(0)$ car $P_n(x)\geq P_n(0)$ (... et $2(2n+1)\geq 0$)

$x^2P_{n-1}(x)\geq x^2P_{n-1}(0)\geq 0^2P_{n-1}(0)$ car $P_{n-1}(x)\geq P_{n-1}(0)>0$

Additionnons : $2(2n+1)P_n(x)+x^2P_{n-1}(x)\geq 2(2n+1)P_n(0)+0^2P_{n-1}(0)$ donc

$P_{n+1}(x)\geq P_{n+1}(0)$. Ceci achève la récurrence.

b) Soit $n\in\mathbb{N}$ et soit $x\in\mathbb{R}_-$.

$$|u_n(x)-e^x|\underset{(4)}{=}\left|(-1)^{n+1}\frac{e^{x/2}q_n(x)}{P_n(x)}\right|\overset{P_n(x)>0}{=}\frac{e^{x/2}|q_n(x)|}{P_n(x)}\overset{Q3a}{\leq}\frac{e^{x/2}|q_n(x)|}{P_n(0)}\underset{P_n(0)=\frac{(2n)!}{n!}}{\overset{q_n(x)=-q_n(-x)}{=}}\frac{e^{x/2}|q_n(-x)|}{(2n)!}\times n!$$

$$|u_n(x)-e^x|\underset{\text{II Q2 c) car } -x\geq 0}{\leq}\frac{e^{x/2}\,n!}{(2n)!}\times\left(\frac{(-x)^2}{4}\right)^n\frac{e^{-x/2}}{n!}=\left(\frac{x^2}{4}\right)^n\frac{1}{(2n)!}$$

Donc $\forall n\in\mathbb{N},\ \forall x\in\mathbb{R}_-,\ |u_n(x)-e^x|\leq\frac{1}{(2n)!}\left(\frac{x^2}{4}\right)^n$.

c) Pour tout réel a, la série de terme général $\frac{a^n}{n!}$ converge, donc $\lim_{n\to+\infty} \frac{a^n}{n!}=0$!

En particulier, pour tout élément a de $\mathbb{R}$, $\lim_{n\to+\infty}\frac{a^{2n}}{(2n)!}=0$.

Par conséquent : $\forall x\in\,]-\infty,0]$, $\lim_{n\to+\infty} \frac{(x/2)^{2n}}{(2n)!}=0$; $\forall x\in\,]-\infty,0]$, $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{(2n)!}\left(\frac{x^2}{4}\right)^n=0$.

Par encadrement il vient : $\lim_{n\to+\infty} u_n(x)=e^x$ pour tout élément x de $\mathbb{R}^-$.

Q5.. a) Soit $x\in[0,2[$. $u_n(x)=\frac{P_n(-x)}{P_n(x)}=\left[\frac{P_n(x)}{P_n(-x)}\right]^{-1}=\frac{1}{u_n(-x)}$

Or $-x\leq 0$ donc $\lim_{n\to+\infty} u_n(-x)=e^{-x}$. Il vient alors : $\lim_{n\to+\infty} u_n(x)=\frac{1}{e^{-x}}=e^x$.

$\forall x\in[0,2[$, $\lim_{n\to+\infty} u_n(x)=e^x$.

Q5.. a) Soit $n\in\mathbb{N}$ et n pair.

$\forall x\in\,]-\infty,0]$, $P_n(x)>0$ ($\forall x\in\,]-\infty,2[$, $P_n(x)>0$)

$\forall x\in\,]-\infty,0]$, $f_n(x)=P_n(x)e^{x/2}>0$.

Soit $x\in[0,+\infty[$. $g_n(x)\geq 0$.

$g_n(x)=(-1)^n[f_n(x)-f_n(-x)] \underset{n\text{ pair}}{=} f_n(x)-f_n(-x)$; $f_n(x)=g_n(x)+f_n(-x)>0$

$g_n(x)\geq 0$ car $x\geq 0$
$f_n(-x)>0$ car $-x\leq 0$

Finalement si n est pair : $\forall x\in\mathbb{R}$, $f_n(x)>0$.

b) Soit $p\in\mathbb{N}$. $\forall x\in\mathbb{R}$, $f'_{2p+1}(x) = -\frac{x}{2}f_{2p}(x)$

f'_{2p+1} est donc du signe de $-x$.

f_{2p+1} est donc croissante sur $\mathbb{R}^-$ et décroissante sur $\mathbb{R}^+$

x		0	
$f'_{2p+1}(x)$	$+$	0	$-$
$f_{2p+1}(x)$	$(0)\nearrow$		$\searrow -\infty$

Notons que : $\forall x\in\,]-\infty,0]$, $f_{2p+1}(x)=P_{2p+1}(x)e^{x/2}>0$ (et même sur $]-\infty,2[$).

Notons encore que : $\lim_{x\to+\infty} P_{2p+1}(x)=-\infty$ (le terme de plus haut degré de P_{2p+1} est $-X^{2p+1}$)

Donc $\lim_{x\to+\infty} f_{2p+1}(x)=-\infty$. f_{2p+1} est continue et strictement décroissante sur $\mathbb{R}^+$. f_{2p+1} définit une bijection de $\mathbb{R}^+$ sur $f(\mathbb{R}^+)=\,]-\infty, f_{2p+1}(0)]$. $0\in\,]-\infty,f_{2p+1}(0)]$, $\exists!\, a_p\in\mathbb{R}^+$, $f_{2p+1}(a_p)=0$

mieux : $\forall x\in\,]-\infty,a_p[$, $f_{2p+1}(x)>0$; $f_{2p+1}(a_p)=0$; $\forall x\in\,]a_p,+\infty[$, $f_{2p+1}(x)<0$

Ceci nous permet d'obtenir le signe de f'_{2p+2} ($\forall x \in \mathbb{R}$, $f'_{2p+2}(x) = -\frac{x}{2} f_{2p+1}(x)$) et donc les variations de f_{2p+2}

x	$-\infty$		0		a_p		$+\infty$
f'_{2p+2}		$+$	0	$-$	0	$+$	
f_{2p+2}	0	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	$+\infty$

f_{2p+2} est strictement croissante sur $]-\infty, 0]$ et sur $[a_p, +\infty[$.

f_{2p+2} est strictement décroissante sur $[0, a_p]$.

Pour en terminer avec les variations de f_n signalons que f_0 est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Q6 a) Les zéros de P_n dans $\mathbb{R}$ sont les zéros de f_n ($\forall x \in \mathbb{R}$, $P_n(x) = f_n(x) e^{-x/2}$)

Nous avons vu que si $n = 2p+1$, f_n admet un zéro et un seul a_p ($a_p \geq 2$ car $\forall x \in]-\infty, 2[$, $P_{2p+1}(x) > 0$)

Par conséquent P_{2p+1} admet un zéro et un seul a_p dans $\mathbb{R}$

Nous avons aussi vu que si n est pair : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_n(x) > 0$ (Q5 a)

Par conséquent si n est pair, P_n n'a pas de zéro dans $\mathbb{R}$.

x			0		a_{p+1}		$+\infty$
f'_{2p+3}		$+$	0	$-$		$-$	
f_{2p+3}	0	$\nearrow$		$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

b) Soit $p \in \mathbb{N}$. Reprenons le tableau de variation de f_{2p+3}.

Pour montrer que : $a_p < a_{p+1}$ il suffit de montrer que $f_{2p+3}(a_p) > 0$

D'après (2) $f_{2p+3}(a_p) = 2[2(2p+2)+1] f_{2p+2}(a_p) + a_p^2 \underbrace{f_{2p+1}(a_p)}_{=0} = 2[2(2p+2)+1] f_{2p+2}(a_p) > 0$

voir Q5 a

On a donc bien $a_p < a_{p+1}$ pour tout $p \in \mathbb{N}$.

Par conséquent $(a_p)_{p \geq 0}$ est strictement croissante.

c) $(a_p)_{p \geq 0}$ est strictement croissante. ou cette suite est majorée et elle est alors convergente, ou cette suite n'est pas majorée et alors sa limite est $+\infty$.

Supposons la majorée, elle converge ; soit L sa limite. $L > 2$; $-L < 2$!!

$u_{2p+1}(-L) = \dfrac{P_{2p+1}(L)}{P_{2p+1}(-L)}$;

$\lim_{p \to +\infty} u_{2p+1}(-L) = e^{-L}$ donc $\exists p_0 \in \mathbb{N}$, $\forall p \in \mathbb{N}$, $p \geq p_0 \Rightarrow \dfrac{P_{2p+1}(L)}{P_{2p+1}(-L)} > 0$

donc pour $p \in \mathbb{N}$ et $p \geq p_0$: $P_{2p+1}(L) > 0$ car $P_{2p+1}(-L) > 0$ ($-L < 2$!)

Par conséquent $\forall p \in \mathbb{N}$, $p \geq p_0 \Rightarrow f_{2p+1}(L) > 0$

donc : $\forall p \in \mathbb{N}$, $p \geq p_0 \Rightarrow L < a_p$ (voir le tableau de variation de f_{2p+1})

donc : $\forall p \in \mathbb{N}$, $p \geq p_0 \Rightarrow L < a_p < L$!!

$(a_p)_{p \geq 0}$ est strictement croissante.

Finalement $(a_p)_{p \geq 0}$ est croissante et non majorée ; elle diverge et tend vers $+\infty$.

Q7 a) Fixons x dans $\mathbb{R}$ (oui !)

▲ Si n est pair : $P_n(x)>0$ et $P_n(-x)>0$. Donc $u_n(x)$ existe et est strictement positif.

▲ Supposons n impair. $u_n(x)$ existe et $u_n(x)>0$ dès que $P_n(x)\times P_n(-x)>0$.

→ Supposons $x\geq 0$ (on pourrait prendre $x>2$). $P_n(-x)>0$. Montrons que si n est assez grand : $P_n(x)>0$ ce qui prouvera que $P_n(x)\times P_n(-x)>0$.

$\lim_{p\to+\infty} a_p=+\infty$; par conséquent : $\exists p_x\in\mathbb{N}$ tel que $a_{p_x}>x$. Supposons $n\geq 2p_x$

$\exists p\in\mathbb{N},\ n=2p+1$. $n\geq 2p_x$ donne $2p+1\geq 2p_x$ donc $2p+1\geq 2p_x+1$ donc $p\geq p_x$.

$a_p\geq a_{p_x}>x\geq 0$. Le tableau de variation de f_{2p+1} donne alors $f_{2p+1}(x)>0$.

Donc $P_n(x)=P_{2p+1}(x)>0$ ... cqfd.

→ Supposons $x<0$. En changeant x en $-x$ on est alors ramené à la situation précédente.

Dans tous les cas pour x fixé, $\exists p_x\in\mathbb{N}$ tel que si $n\geq 2p_x$ alors $u_n(x)$ existe et $u_n(x)>0$.

b) Soit $x\in[2,+\infty[$. Soit $n\in\mathbb{N}$ et $n\geq 2p_x$

$$u_n(x)=\frac{P_n(-x)}{P_n(x)}=\frac{1}{u_n(-x)}.\quad \lim_{n\to+\infty}u_n(x)=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{u_n(-x)}\overset{-x<2\,!}{=}\frac{1}{e^{-x}}=e^{x}.$$

III Vitesse de convergence de la suite $(u_n(x))$

Dans la suite, le plus souvent lorsque nous parlerons de $u_n(x)$ nous supposerons $n\geq 2p_x$. Cela suppose x fixé et cela donne $u_n(x)$ défini et strictement positif ... ceci pour tout $x\in\mathbb{R}$

Q1 Equivalent de $P_n(x)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

a) $n\in\mathbb{N}^*$. Notons que f_n est dérivable sur $\mathbb{R}$. Soit $x\in\mathbb{R}_-$

$$|f_n(x)-f_n(0)|\leq |x|\sup_{t\in[x,0]}|f_n'(t)|=|x|\sup_{t\in[x,0]}\left|-\frac{t}{2}f_{n-1}(t)\right|\leq |x|\times\frac{|x|}{2}\sup_{t\in[x,0]}|f_{n-1}(t)|$$

$\sup_{t\in[x,0]}|f_{n-1}(t)|=f_{n-1}(0)$ car f_{n-1} est croissante et positive sur $]-\infty,0]$

donc $|f_n(x)-f_n(0)|\leq \frac{x^2}{2}f_{n-1}(0)$; f_n étant croissante sur $]-\infty,0]$: $0\leq f_n(0)-f_n(x)\leq\frac{x^2}{2}f_{n-1}(0)$

Soit encore $\underline{\underline{0\leq P_n(0)-P_n(x)e^{x/2}\leq\frac{x^2}{2}P_{n-1}(0)}}$ (pour tout $x\in\mathbb{R}_-$ et tout $n\in\mathbb{N}^*$)

b) Supposons $x\leq 0$. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. $0\leq 1-\frac{P_n(x)e^{x/2}}{P_n(0)}\leq\frac{x^2}{2}\frac{P_{n-1}(0)}{P_n(0)}=\frac{x^2}{2}\times\frac{\frac{(2n-2)!}{(n-1)!}}{\frac{(2n)!}{n!}}=\frac{x^2}{2}\times\frac{n}{2n(2n-1)}=\frac{x^2}{4(2n-1)}$

$\lim_{n\to+\infty}\frac{x^2}{4(2n-1)}=0$ donc $\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{P_n(x)e^{x/2}}{P_n(0)}\right)=0$; soit encore $\lim_{n\to+\infty}\frac{P_n(x)e^{x/2}}{P_n(0)}=1$

Ceci donne bien $P_n(x)\sim P_n(0)e^{-x/2}$

Supposons maintenant $x>0$. $-x<0$. $P_n(-x)\sim P_n(0)e^{x/2}$ d'après ce qui précède.

$\lim_{n\to+\infty}u_n(x)=e^x$ donc $\frac{P_n(-x)}{P_n(x)}\sim e^x$; $P_n(x)\sim e^{-x}P_n(-x)\sim e^{-x}P_n(0)e^{x/2}=P_n(0)e^{-x/2}$.

Dans tous les cas on a donc $P_n(x) \sim P_n(0)\,e^{-x/2}$ ou encore $P_n(x) \sim \dfrac{(2n)!}{n!}\,e^{-x/2}$

Q2. Majoration de $|u_n(x)-e^x|$.

Rappelons que x est fixé dans $\mathbb{R}$ et que $n \geq 2|x|$. On a alors $P_n(x)>0$, $P_n(-x)>0$ et $u_n(x)>0$.

a) Pour montrer que : $|u_n(x)-e^x| \leq |u_{n+1}(x)-u_n(x)|$, il suffit de montrer que e^x est entre $u_n(x)$ et $u_{n+1}(x)$.

Montrons donc que : $(u_n(x)-e^x)(u_{n+1}(x)-e^x) \leq 0$.

$$(u_n(x)-e^x)(u_{n+1}(x)-e^x) = (-1)^{n+1}\frac{e^{x/2}q_n(x)}{P_n(x)} \times (-1)^{n+2}\frac{e^{x/2}q_{n+1}(x)}{P_{n+1}(x)} = -\,e^x\,\frac{1}{P_n(x)P_{n+1}(x)}\,q_n(x)\,q_{n+1}(x)$$

Donc $(u_n(x)-e^x)(u_{n+1}(x)-e^x)$ est du signe de $-\,q_n(x)q_{n+1}(x)$ car $P_n(x)>0$ et $P_{n+1}(x)>0$

q_n et q_{n+1} étant de même signe (+ sur $\mathbb{R}_+$ et $-$ sur $\mathbb{R}_-$) : $(u_n(x)-e^x)(u_{n+1}(x)-e^x) \leq 0$.

Par conséquent : $|u_n(x)-e^x| \leq |u_{n+1}(x)-u_n(x)|$. — voir II 2° b et c !

b) Montrons ce résultat par récurrence.

→ $P_1(-x)P_0(x) - P_1(x)P_0(-x) = (2+x)-(2-x) = 2x = 2(-1)^0\,x^{2\times 0+1}$. La propriété est vraie pour $n=0$.

→ Supposons la propriété vraie pour $\underline{n-1}$ $(n\geq 1)$ et montrons la pour $\underline{n}$

$$P_{n+1}(x)P_n(-x) \overset{(1)}{=} 2(2n+1)P_n(x)P_n(-x) + x^2 P_{n-1}(x)P_n(-x)$$
$$P_{n+1}(-x)P_n(x) = 2(2n+1)P_n(-x)P_n(x) + x^2 P_{n-1}(-x)P_n(x)$$

Par soustraction on obtient : $P_{n+1}(x)P_n(-x) - P_{n+1}(-x)P_n(x) = x^2\left(P_{n-1}(x)P_n(-x) - P_{n-1}(-x)P_n(x)\right)$

Appliquons l'hypothèse de récurrence ; nous obtenons alors : $P_{n+1}(x)P_n(-x) - P_{n+1}(-x)P_n(x) = x^2 \times \left(-2(-1)^{n-1}x^{2n-1}\right)$

donc $P_{n+1}(x)P_n(-x) - P_{n+1}(-x)P_n(x) = 2(-1)^{n+1}x^{2n+1}$ ou encore $P_{n+1}(-x)P_n(x) - P_{n+1}(x)P_n(-x) = 2(-1)^n x^{2n+1}$

ceci achève la récurrence.

c) $$|u_n(x)-e^x| \leq |u_{n+1}(x)-u_n(x)| = \left|\frac{P_{n+1}(-x)}{P_{n+1}(x)} - \frac{P_n(-x)}{P_n(x)}\right| \underset{\left[\substack{P_{n+1}(x)>0\\ P_n(x)>0}\right.}{=} \frac{|P_{n+1}(-x)P_n(x) - P_{n+1}(x)P_n(-x)|}{P_{n+1}(x)P_n(x)} \leq \frac{2|x|^{2n+1}}{P_{n+1}(x)P_n(x)}$$

d) $$|u_7(x)-e^x| \leq \frac{2|x|^{15}}{P_7(x)P_8(x)}\ ;\quad |u_7(1)-e| \leq \frac{2}{P_7(1)P_8(1)}$$

$\dfrac{2}{P_7(1)P_8(1)}$ est un majorant de l'erreur commise en prenant $u_7(1)$ comme valeur approchée de e.

$P_7(1) = 10\,391\,028$ et $P_8(1) = 112\,129\,649$. $\qquad \dfrac{2}{P_7(1)P_8(1)} \leq 6{,}2\times 10^{-16}$.

$u_7(1)$ est une valeur approchée de e à $6{,}2\times 10^{-16}$ près ! cela va très vite !

Q3 Équivalent de $u_n(x)-e^x$.

$x\in\mathbb{R}^*$, $n\geq 2|x|$.

a) $$u_{n+1}(x)-u_n(x) = \frac{P_{n+1}(-x)}{P_{n+1}(x)} - \frac{P_n(-x)}{P_n(x)} = \frac{2(-1)^n x^{2n+1}}{P_n(x)P_{n+1}(x)} \underset{\text{III } 1^\circ b}{\sim} \frac{2(-1)^n x^{2n+1}}{P_n(0)e^{-x/2}P_{n+1}(0)e^{-x/2}} = \frac{2(-1)^n x^{2n+1}}{P_n(0)P_{n+1}(0)e^{-x}}$$

$$u_{n+1}(x)-u_n(x) \sim \frac{2(-1)^n x^{2n+1}}{P_n(0)P_{n+1}(0)}\,e^x = 2(-1)^n x^{2n+1}\,\frac{n!\,(n+1)!}{(2n)!\,(2n+2)!}\,e^x$$

b) $$\frac{u_{n+2}(x)-u_{n+1}(x)}{u_{n+1}(x)-u_n(x)} \sim \frac{2(-1)^{n+1}x^{2n+3}(n+1)!\,(n+2)!\,e^x}{(2n+2)!\,(2n+4)!} \times \frac{(2n)!\,(2n+2)!}{2(-1)^n x^{2n+1}\,n!\,(n+1)!\,e^x}$$

$$\frac{u_{n+2}(x)-u_{n+1}(x)}{u_{n+1}(x)-u_n(x)} \sim \frac{-x^2(n+1)(n+2)}{(2n+4)(2n+3)(2n+2)(2n+1)} \sim \frac{-x^2n^2}{(2n)^4} \sim -\frac{x^2}{16n^2}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+2}(x)-u_{n+1}(x)}{u_{n+1}(x)-u_n(x)} = \lim_{n\to+\infty} -\frac{x^2}{16n^2} = 0$$

c) Rappelons que $u_{n+1}(x)-e^x$ et $u_n(x)-e^x$ ont des signes opposés.
Etudions le cas où $u_n(x)-e^x$ est négatif (même type de raisonnement pour $u_n(x)-e^x \geq 0$).
Alors : $u_{n+1}(x)-e^x \geq 0$ et $u_{n+2}(x)-e^x \leq 0$.

$$u_{n+2}(x)-u_n(x) \leq e^x-u_n(x) \leq u_{n+1}(x)-u_n(x)$$

$$\underbrace{\frac{u_{n+2}(x)-u_n(x)}{u_{n+1}(x)-u_n(x)}} \leq \frac{e^x-u_n(x)}{u_{n+1}(x)-u_n(x)} \leq 1$$

$$1+\frac{u_{n+2}(x)-u_{n+1}(x)}{u_{n+1}(x)-u_n(x)} \leq \frac{e^x-u_n(x)}{u_{n+1}(x)-u_n(x)} \leq 1 \ ; \ \lim_{n\to+\infty}\frac{u_{n+2}(x)-u_{n+1}(x)}{u_{n+1}(x)-u_n(x)}$$ donne par encadrement :

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{e^x-u_n(x)}{u_{n+1}(x)-u_n(x)} = 1.$$ Donc : $$e^x-u_n(x) \sim u_{n+1}(x)-u_n(x) \sim \frac{2(-1)^n x^{2n+1}\,n!\,(n+1)!\,e^x}{(2n)!\,(2n+2)!}$$

$$u_n(x)-e^x \sim \frac{2(-1)^{n+1}x^{2n+1}\,n!\,(n+1)!\,e^x}{(2n)!\,(2n+2)!}$$. Stirling indique que : $n! \sim n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}$

Donc : $$\frac{n!\,(n+1)!}{(2n)!\,(2n+2)!} \sim \frac{n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}\ (n+1)^{n+1}e^{-(n+1)}\sqrt{2\pi(n+1)}}{(2n)^{2n}e^{-2n}\sqrt{4\pi n}\ (2n+2)^{2n+2}e^{-(2n+2)}\sqrt{2\pi(2n+2)}} = \frac{1}{2^{2n}}\times\frac{1}{n^n}\times\frac{1}{2^{2n+2}}\times\frac{1}{(n+1)^{n+1}}\times\frac{1}{\sqrt2}\times\frac{1}{\sqrt2}\times e^{2n+1}$$

$$\frac{n!\,(n+1)!}{(2n)!\,(2n+2)!} \sim \frac{1}{2}\left(\frac{e}{4}\right)^{2n+1}\frac{1}{n^{2n+1}}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} = e^{(n+1)\ln\frac{n}{n+1}}$$ et :

$(n+1)\ln\frac{n}{n+1} \sim (n+1)\left(\frac{n}{n+1}-1\right) = -1$; $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} = e^{-1}$. Ceci permet de dire que :

$$\frac{n!\,(n+1)!}{(2n)!\,(2n+2)!} \sim \frac{1}{2}\left(\frac{e}{4n}\right)^{2n+1}\times e^{-1}.$$ Donc $$u_n(x)-e^x \sim 2(-1)^{n+1}x^{2n+1}e^x \times \frac{1}{2}\left(\frac{e}{4n}\right)^{2n+1}e^{-1}$$

Finalement : $$u_n(x)-e^x \sim (-1)^{n+1}e^{x-1}\left(\frac{ex}{4n}\right)^{2n+1}$$

```
program essec89M1a;

uses crt;
var n,k:integer;x,a,b,c:real;

begin
clrscr;
write('Donnez x. x=');readln(x);
write('Donnez n. n=');readln(n);
a:=1;b:=2-x;k:=2;
repeat
c:=2*(2*k-1)*b+x*x*a;
writeln('P',k,'(',x:1:0,')=',c:0:0);
k:=k+1;a:=b;b:=c;
until(k>n);
end.
```

```
Donnez x. x=1
Donnez n. n=12
P2(1)=7
P3(1)=71
P4(1)=1001
P5(1)=18089
P6(1)=398959
P7(1)=10391023
P8(1)=312129649
P9(1)=10622799089
P10(1)=403978495030
P11(1)=16977719590000
P12(1)=781379079650000
```

```
program essec89M1b;

uses crt;
var n,k:integer;x,y,a,a1,b,b1,c,c1:real;

begin
clrscr;
write('Donnez x. x=');readln(x);
write('Donnez n. n=');readln(n);
y:=-x;a:=1;b:=2-x;a1:=1;b1:=2-y;
writeln;
writeln('n','     Pn(x)      ','    Pn(-x)    ','       Un(x)          ');
writeln;
writeln(0,1:12,1:12,1:20);
writeln(1,b:12:0,b1:12:0,b1/b:20);

for k:=2 to n do
begin
     c:=2*(2*k-1)*b+x*x*a;
     c1:=2*(2*k-1)*b1+y*y*a1;
     writeln(k,c:12:0,c1:12:0,c1/c:20);
     a:=b;a1:=b1;b:=c;b1:=c1;
end;
end.
```

```
Donnez x. x=1
Donnez n. n=8

n     Pn(x)       Pn(-x)          Un(x)

0           1           1                   1
1           1           3    3.0000000000E+00
2           7          19    2.7142857143E+00
3          71         193    2.7183098592E+00
4        1001        2721    2.7182817183E+00
5       18089       49171    2.7182818287E+00
6      398959     1084483    2.7182818285E+00
7    10391023    28245729    2.7182818285E+00
8   312129649   848456353    2.7182818285E+00
```