I Etude des fonctions f_n associées à $f : x \mapsto x^2$.

$n \in \mathbb{N}^*$.

(Q1) a) $\forall x \in [0,1]$, $f(x) = 1$ donc $\forall x \in [0,1]$, $f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = (x + 1 - x)^n = 1$. $f_n = f$

b) $\forall x \in [0,1]$, $f(x) = x$; $\forall x \in [0,1]$, $f_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n} C_n^k\, k\, x^k (1-x)^{n-k}$

Si $x \in [0,1]$, $\sum_{k=0}^{n} C_n^k k x^k (1-x)^{n-k}$ n'est autre que l'espérance d'une loi binomiale de paramètres n et x

donc $\forall x \in [0,1]$, $f_n(x) = \frac{1}{n} \times nx = x$. Par conséquent : $\forall x \in [0,1]$, $f_n(x) = x$. $f_n = f$.

Remarque : on pouvait aussi partir de $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2$, $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}$, puis dériver par rapport à a, multiplier par a, puis remplacer a par x et b par $1-x$ et enfin multiplier par $\frac{1}{n}$!
On peut encore utiliser $k C_n^k = n C_{n-1}^{k-1}$ ... pour $k \geq 1$.

(Q2) Soit $x \in [0,1]$. f_n est dérivable en x et $f_n'(x) = \sum_{k=1}^{n} C_n^k f\left(\frac{k}{n}\right) [k x^{k-1} (1-x)^{n-k}] + \sum_{k=0}^{n-1} C_n^k f\left(\frac{k}{n}\right) \times [-x^k (n-k)(1-x)^{n-k-1}]$
dérivation de $1-x$

$$\frac{x(1-x)}{n} f_n'(x) = \sum_{k=1}^{n} C_n^k f\left(\frac{k}{n}\right) \frac{k}{n} x^k (1-x)^{n+1-k} - \sum_{k=0}^{n-1} C_n^k f\left(\frac{k}{n}\right) \frac{n-k}{n} x^{k+1} (1-x)^{n-k}$$

$$\frac{x(1-x)}{n} f_n'(x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f\left(\frac{k}{n}\right) \frac{k}{n} x^k (1-x)^{n+1-k} - \sum_{k=0}^{n} C_n^k f\left(\frac{k}{n}\right) \left(1 - \frac{k}{n}\right) x^{k+1} (1-x)^{n-k}.$$

↑ le terme d'indice 0 est nul — le terme d'indice n est nul.

$$\frac{x(1-x)}{n} f_n'(x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f\left(\frac{k}{n}\right) \frac{k}{n} x^k (1-x)^{n-k} \big(\underbrace{1-x+x}_{1}\big) - \sum_{k=0}^{n} C_n^k f\left(\frac{k}{n}\right) x^{k+1} (1-x)^{n-k}$$

$$\frac{x(1-x)}{n} f_n'(x) = g_n(x) - x f_n(x) \quad \text{en effet } g_n(x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f\left(\frac{k}{n}\right) \frac{k}{n} x^k (1-x)^{n-k}.$$

$g(x) = x f(x) = f(x) x$

Donc $\forall x \in [0,1]$, $\frac{x(1-x)}{n} f_n'(x) = g_n(x) - x f_n(x)$.

(Q3) a) Version 1. Posons $\forall x \in [0,1]$, $\hat{f}(x) = x$ et $\hat{g}(x) = x \hat{f}(x)$. $\hat{g} = f$!

D'après ce qui précède : $\forall x \in [0,1]$, $\frac{x(1-x)}{n} (\hat{f})_n'(x) = (\hat{g})_n(x) - x (\hat{f})_n(x)$! (a)

D'après Q1 b : $\forall x \in [0,1]$, $(\hat{f})_n(x) = x$. Donc $\forall x \in [0,1]$, $((\hat{f})_n)'(x) = 1$.

Par conséquent en reprenant (a) : $\forall x \in [0,1]$, $\frac{x(1-x)}{n} \times 1 = (\hat{g})_n(x) - x \times x$

$\forall x \in [0,1]$, $f_n(x) = (\hat{g})_n(x) = \frac{x(1-x)}{n} + x^2$

$\forall x \in [0,1]$, $f_n(x) = \frac{x(1-x)}{n} + x^2$

<u>Version 2</u>.. Soit $x \in [0,1]$. $f_n(x) = \frac{1}{n^2} \sum_{k=0}^{n} C_n^k \, k^2 x^k (1-x)^{n-k}$;

$f_n(x) = \frac{1}{n^2} E(X^2)$ où X est une v.a.r. suivant une loi binomiale de paramètres n et x

$f_n(x) = \frac{1}{n^2}\left[V(X) + (E(X))^2\right] = \frac{1}{n^2} \times n \times x \times (1-x) + \frac{1}{n^2} \times (nx)^2$

$f_n(x) = \frac{x(1-x)}{n} + x^2$ ... nous retrouvons le résultat précédent.

b) $\forall x \in [0,1]$, $|f_n(x) - f(x)| = \frac{x(1-x)}{n}$. Posons $\forall x \in [0,1]$, $\varphi(x) = x(1-x)$.

x	0		$\frac{1}{2}$		1
$\varphi'(x)$		$+$	0	$-$	
$\varphi(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{4}$	$\searrow$	0

$\sup_{x\in[0,1]} x(1-x) = \frac{1}{4}$

donc $\underline{\underline{\sup_{x \in [0,1]} |f_n(x) - f(x)| = \frac{1}{4n}}}$. ⚠ Bien retenir ce résultat pour la fin.

(Q4) <u>Version 1</u>.. Soit $x \in [0,1]$.

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k \left(\frac{k}{n} - x\right)^2 x^k (1-x)^{n-k} = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} C_n^k \frac{k^2}{n^2} x^k (1-x)^{n-k}}_{Q3a} - 2x \underbrace{\sum_{k=0}^{n} C_n^k \frac{k}{n} x^k (1-x)^{n-k}}_{Q1b} + x^2 \underbrace{\sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k (1-x)^{n-k}}_{Q1a}$$

$$= \frac{x(1-x)}{n} + x^2 - 2x \times x + x^2 \times 1$$

donc $\underline{\underline{\forall x \in [0,1], \ \sum_{k=0}^{n} C_n^k \left(\frac{k}{n} - x\right)^2 x^k (1-x)^{n-k} = \frac{x(1-x)}{n}}}$.

<u>Version 2</u>.. Soit $x \in [0,1]$. $\sum_{k=0}^{n} C_n^k (k - nx)^2 x^k (1-x)^{n-k}$ n'est autre que :

$V(X) = E((X - E(X))^2)$ où X est une v.a.r. suivant une loi binomiale de paramètres n et x.

$V(X) = nx(1-x)$. En divisant le tout par n^2 on retrouve l'égalité demandée.

<u>II Etude des fonctions f_n associées à $f : x \mapsto e^x$</u>

Binôme de 

(Q1) Soit $x \in [0,1]$. $f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k e^{k/n} x^k (1-x)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \left(e^{\frac{1}{n}} x\right)^k (1-x)^{n-k} \overset{\downarrow}{=} \left(e^{1/n} x + 1 - x\right)^n$

$\underline{\underline{\forall x \in [0,1], \ f_n(x) = \left(x(e^{1/n} - 1) + 1\right)^n}}$

(Q2) Soit $x \in [0,1]$. $f_n(x) = e^{n \ln(x(e^{1/n} - 1) + 1)}$

$n \ln(x(e^{1/n} - 1) + 1) \sim n\left[x(e^{1/n} - 1) + 1 - 1\right] = nx(e^{1/n} - 1) \sim nx \times \frac{1}{n} = x$ ← ceci vaut bien pour $x = 0$ ...

$\uparrow$ $\lim_{n \to +\infty} (x(e^{1/n} - 1) + 1) = 1$

$\uparrow$ pour C.L + J.G

donc $\lim_{n \to +\infty} n \ln(x(e^{1/n} - 1) + 1) = x$

Finalement : $\forall x \in [0,1]$, $\lim_{n \to +\infty} f_n(x) = e^x$.

Pour les initiés : $(f_n)_{n \geq 1}$ converge simplement vers f. Nous allons maintenant montrer que la convergence est uniforme ! C'est toujours pour les initiés. Les autres se taisent et continuent de pédaler car cela monte ~~encore~~ !

Q3 a) Soit $x \in]0,1[$. $e^u = 1+u+\frac{u^2}{2}+o(u^2)$ et $\ln(1+u) = u-\frac{u^2}{2}+o(u^2)$.

$x(e^u-1)+1 = 1+xu+x\frac{u^2}{2}+o(u^2)$.

Donc $\ln(x(e^u-1)+1) = xu + x\frac{u^2}{2} - \frac{1}{2}\left(xu + x\frac{u^2}{2}\right)^2 + o(u^2) = xu + x\frac{u^2}{2} - \frac{x^2}{2}u^2 + o(u^2)$.

Donc $\underline{\underline{\ln(x(e^u-1)+1) = xu + \frac{x(1-x)}{2}u^2 + o(u^2)}}$ ($\frac{x(1-x)}{2}$ et non pas $x(1-\frac{x}{2})$ ...)

toujours pour C.L + J.G

Remarques. 1.. Ceci vaut encore pour $x=0$ et 1 !

2.. Ce résultat signifie donc que $\ln(x(e^u-1)+1)-xu \underset{0}{\sim} \frac{x(1-x)}{2}u^2$ ... la variable étant u.

Retrouvons ce résultat en utilisant la règle de l'Hôpital. Il s'agit de montrer que :

$$\lim_{u\to 0}\left[\frac{\ln(x(e^u-1)+1)-xu}{u^2}\right] = \frac{x(1-x)}{2}$$

$\varphi_1 : u \mapsto \ln(x(e^u-1)+1)-xu$ est dérivable sur un voisinage de 0 et $\varphi_1' : u \mapsto \frac{xe^u}{x(e^u-1)+1} - x$

$\varphi_2 : u \mapsto u^2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et vérifie : $\forall u \in \mathbb{R}^*$, $\varphi_2'(u) = 2u \neq 0$.

Les hypothèses d'application de la règle de l'Hôpital sont très largement vérifiées ainsi que : $\varphi_1(0)=\varphi_2(0)=0$.

$$\lim_{u\to 0}\frac{\varphi_1'(u)}{\varphi_2'(u)} = \lim_{u\to 0}\frac{xe^u - x^2(e^u-1)-x}{(x(e^u-1)+1)\times 2u} = \lim_{u\to 0}\frac{1}{x(e^u-1)+1}\times\frac{1}{2}\times\left[\frac{x(e^u-1)}{u} - \frac{x^2(e^u-1)}{u}\right]$$

$$\lim_{u\to 0}\frac{\varphi_1'(u)}{\varphi_2'(u)} = \frac{1}{x\times 0+1}\times\frac{1}{2}\times\left[x\times 1 - x^2\times 1\right] = \frac{x(1-x)}{2} \text{ ; donc } \lim_{u\to 0}\frac{\varphi_1(u)}{\varphi_2(u)} = \frac{1}{2} \text{ ... cqfd.}$$

b) Soit $x \in]0,1[$ (ou $[0,1]$)

$$f_n(x) - \lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \left[x(e^{1/n}-1)+1\right]^n - e^x = e^x\left[e^{n\ln(x(e^{1/n}-1)+1)-x} - 1\right]$$

Q2

$\lim_{n\to+\infty}\left(n\ln(x(e^{1/n}-1)+1)-x\right) = 0$ (vu plus haut !) donc $f_n(x)-e^x \sim e^x\left(n\ln(x(e^{1/n}-1)+1)-x\right)$

$$f_n(x)-e^x \sim ne^x\left[\ln(x(e^{1/n}-1)+1) - x\times\frac{1}{n}\right] \underset{\uparrow a)}{\sim} ne^x\frac{x(1-x)}{2}\times\frac{1}{n^2} = \frac{x(1-x)}{2}e^x\times\frac{1}{n}.$$

Donc $\underline{\underline{f_n(x) - \lim_{n\to+\infty} f_n(x) \sim \frac{x(1-x)}{2}e^x\times\frac{1}{n}}}$ (On y va, vers e^x, mais doucement !!)

Remarque.. Ceci vaut encore pour $x=0$ et $x=1$

Q4 φ est continue sur $[0,1]$, dérivable sur $]0,1[$ et $\varphi(0)=\varphi(1)=0$.

Rolle montre l'existence d'un zéro pour φ' dans $]0,1[$.

$$\forall x\in[0,1],\ \varphi'(x) = n\frac{e^{1/n}-1}{x(e^{1/n}-1)+1} - 1 = \frac{ne^{1/n}-n-x(e^{1/n}-1)-1}{x(e^{1/n}-1)+1} = \frac{-(e^{1/n}-1)x+n(e^{1/n}-1)-1}{x(e^{1/n}-1)+1}$$

φ' est du signe de $h : x \mapsto -(e^{1/n}-1)x + n(e^{1/n}-1)-1$ sur $[0,1]$.

Les zéros de φ' coïncident avec les zéros de h. h est affine donc h admet au plus un zéro dans $\mathbb{R}$ donc dans $]0,1[$; φ' s'annule au plus une fois sur $]0,1[$ et au moins une fois sur $]0,1[$!

ψ' admet un zéro et un seul x_n dans $]0,1[$. $-(e^{1/n}-1)x_n+n(e^{1/n}-1)-1=0$ donc $\underline{\underline{x_n = n-\frac{1}{e^{1/n}-1}}}$

le signe de ψ' est celui de h qui est affine ; d'où le tableau de variation suivant :

x	0		x_n		1
$\psi'(x)$		$+$	0	$-$	
$\psi(x)$	0	$\nearrow$	$\psi(x_n)$	$\searrow$	0

. Remarque : l'utilisation de Rolle pour l'existence de x_n dispense le candidat (d'oubli !!) de vérifier que : $n-\frac{1}{e^{1/n}-1}\in]0,1[$. Regardons un peu cela. Il s'agit de montrer que : $1-\frac{1/n}{e^{1/n}-1}\in]0,\frac{1}{n}[$!

Montrons donc que : $\forall y\in]0,1]$, $1-\frac{y}{e^y-1}\in]0,y[$. Soit $y\in]0,1]$

$1-\frac{y}{e^y-1}\in]0,y[\iff 1-\frac{y}{e^y-1}>0$ et $1-\frac{y}{e^y-1}<y \iff e^y>y+1$ et $e^y(1-y)<1$

$1-\frac{y}{e^y-1}\in]0,y[\iff (y=1$ et $e>2$ et $0<1)$ ou $(y\neq 1$ et $y>\ln(y+1)$ et $y+\ln(1-y)<0$

$1-\frac{y}{e^y-1}\in]0,y[\iff y=1$ ou $(y\neq 1$ et $\ln(y+1)<y$ et $\ln(1-y)<-y)$

Cette dernière propriété est vraie car $\forall t\in\mathbb{R}_+^*-\{1\}$, $\ln t<t-1$ donc $\forall u\in]-1,0[\cup]0,+\infty[$ $\ln(1+u)<u$

(Q5) . $\forall x\in[0,1]$, $0\leq\psi(x)\leq\psi(x_n)$ d'après Q4 (voir tableau)

$\forall x\in[0,1]$, $1\leq e^{\psi(x)}\leq e^{\psi(x_n)}$

$\forall x\in[0,1]$, $e^x\leq e^{\psi(x)+x}\leq e^{\psi(x_n)+x}$

$\underline{\underline{\forall x\in[0,1],\ e^x\leq f_n(x)\leq e^{x+\psi(x_n)}.}}$ $\leftarrow$ $[\forall x\in[0,1]$, $f_n(x)=e^{n\ln(x(e^{1/n}-1)+1)}$ et $\psi(x)=n\ln(x(e^{1/n}-1)+1)-x]$

$\forall x\in[0,1]$, $0\leq f_n(x)-e^x\leq e^{x+\psi(x_n)}-e^x=e^x(e^{\psi(x_n)}-1)\underset{x\leq 1}{\leq} e\,(e^{\psi(x_n)}-1)$.

Donc $\forall x\in[0,1]$, $|f_n(x)-e^x|\leq e\,(e^{\psi(x_n)}-1)$

Par conséquent : $\underline{\underline{\sup_{x\in[0,1]}|f_n(x)-e^x|\leq e\,(e^{\psi(x_n)}-1)}}$

(Q6) Soit $n\in\mathbb{N}^*$. $x_n=n-\frac{1}{e^{1/n}-1}$ et $\psi(x_n)=n\ln\left[\left(n-\frac{1}{e^{1/n}-1}\right)(e^{1/n}-1)+1\right]-n+\frac{1}{e^{1/n}-1}$

$\psi(x_n)=n\left[\ln\left(n(e^{1/n}-1)\right)-1+\frac{1/n}{e^{1/n}-1}\right]=n\left[\ln\left(\frac{e^{1/n}-1}{1/n}\right)-1+\frac{1/n}{e^{1/n}-1}\right]$

$\psi(x_n)=n\left[\ln\left(1+\left(\frac{e^{1/n}-1}{1/n}-1\right)\right)-1+\left(\frac{e^{1/n}-1}{1/n}\right)^{-1}\right]$

$\ln(1+u)=u-\frac{u^2}{2}+o(u^2)$ et $\frac{e^u-1}{u}=1+\frac{u}{2}+\frac{u^2}{6}+o(u^2)$; $\left(\frac{e^u-1}{u}\right)^{-1}=1-\frac{u}{2}+\frac{u^2}{12}+o(u^2)$

Donc $\ln\left(1+\left(\frac{e^u-1}{u}-1\right)\right)-1+\left(\frac{e^u-1}{u}\right)^{-1}=\frac{u}{2}+\frac{u^2}{6}-\frac{1}{2}\left(\frac{u}{2}+\frac{u^2}{6}\right)^2-1+\left(1-\frac{u}{2}+\frac{u^2}{12}\right)+o(u^2)$

$\ln\left(1+\left(\frac{e^u-1}{u}-1\right)\right)-1+\left(\frac{e^u-1}{u}\right)^{-1}=\frac{u}{2}+\frac{u^2}{6}-\frac{u^2}{8}-1+1-\frac{u}{2}+\frac{u^2}{12}+o(u^2)$

$\ln\left(1+\left(\frac{e^u-1}{u}-1\right)\right)-1+\left(\frac{e^u-1}{u}\right)^{-1}=\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{12}-\frac{1}{8}\right)u^2+o(u^2)=\frac{1}{8}u^2+o(u^2)$.

Finalement : $\ln\left(1+\left(\frac{e^u-1}{u}\right)\right)-1+\left(\frac{e^u-1}{u}\right)^{-1} \underset{0}{\sim} \frac{1}{8}u^2$

Donc $\ln\left(1+\left(\frac{e^{1/n}-1}{1/n}\right)\right)-1+\frac{1/n}{e^{1/n}-1} \sim \frac{1}{8n^2}$; en multipliant par n

on obtient : $\psi(x_n) \sim \frac{1}{8n}$.

ceci montre en particulier que : $\lim_{n\to+\infty}\psi(x_n)=0$ donc $e^{\psi(x_n)}-1 \sim \psi(x_n) \sim \frac{1}{8n}$.

Donc $\lim_{n\to+\infty}\left(e\left(e^{\psi(x_n)}-1\right)\right)=0$; ceci, grâce à l'inégalité de Q5 assure la convergence uniforme de la suite (f_n) vers f.

III Etude des fonctions f_n associées à $f : x \mapsto \frac{1}{1+x}$.

Q1. Soit $x\in[0,1]$. $f_n(x)=\sum_{k=0}^{n} C_n^k \frac{1}{1+k/n} x^k(1-x)^{n-k} \underset{\substack{\uparrow \\ \frac{1}{1+k/n}=\frac{n}{n+k}}}{=} n\sum_{k=0}^{n} C_n^k \frac{1}{n+k} x^k(1-x)^{n-k}$

$$n\int_0^1 u^{n-1}(1-x(1-u))^n\,du \underset{\substack{\uparrow \\ 1-x(1-u)=ux+(1-x)}}{=} n\int_0^1 u^{n-1}\left(\sum_{k=0}^{n} C_n^k (ux)^k(1-x)^{n-k}\right)du = n\sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k(1-x)^{n-k}\underbrace{\int_0^1 u^{n+k-1}\,du}_{\frac{1}{n+k}}$$

$$n\int_0^1 u^{n-1}(1-x(1-u))^n\,du = n\sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k(1-x)^{n-k}\frac{1}{n+k} = f_n(x).$$

Finalement : $\forall x\in[0,1]$, $f_n(x)=n\sum_{k=0}^{n} C_n^k \frac{1}{n+k} x^k(1-x)^{n-k} = n\int_0^1 u^{n-1}(1-x(1-u))^n\,du$

Q2 a) Posons $\forall t\in[0,1]$, $\ell(t)=t^n$. $\forall t\in[0,1]$, $|\ell'(t)|=|nt^{n-1}|\leq n$

les A.F. donnent : $\forall (t,t')\in[0,1]^2$, $|\ell(t)-\ell(t')|\leq n|t-t'|$

Donc $\forall (t,t')\in[0,1]^2$, $|t^n-t'^n|\leq n|t-t'|$ $\qquad t^k t'^{n-1-k}\leq 1$ pour $k\in[\![0,n-1]\!]$

plus simplement : $\forall (t,t')\in[0,1]^2$, $|t^n-t'^n|=|t-t'|\left[\sum_{k=0}^{n-1} t^k t'^{n-1-k}\right] \leq n|t-t'|$.

b) Soit $(x,x')\in[0,1]^2$ et soit $u\in[0,1]$.

$1-x(1-u)$ et $1-x'(1-u)$ sont encore dans $[0,1]$ donc $|(1-x(1-u))^n-(1-x'(1-u))^n|\leq n|1-x(1-u)-1+x'(1-u)|$

Donc $|(1-x(1-u))^n-(1-x'(1-u))^n|\leq n|(1-u)(x'-x)| = n(1-u)|x-x'|$

$\forall (x,x')\in[0,1]^2$, $\forall u\in[0,1]$, $|(1-x(1-u))^n-(1-x'(1-u))^n|\leq n(1-u)|x-x'|$.

Soit $(x,x')\in[0,1]^2$.

$|f_n(x)-f_n(x')| = n\left|\int_0^1 u^{n-1}\left[(1-x(1-u))^n-(1-x'(1-u))^n\right]du\right|$

$|f_n(x)-f_n(x')|\leq n\int_0^1 u^{n-1}|(1-x(1-u))^n-(1-x'(1-u))^n|\,du \leq n\int_0^1 u^{n-1}n(1-u)|x-x'|\,du = n^2|x-x'|\int_0^1(u^{n-1}-u^n)\,du$

$\int_0^1 (u^{n-1}-u^n)\,du = \left[\frac{u^n}{n} - \frac{u^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)}$.

Donc $\forall (x,x') \in [0,1]^2,\ |f_n(x) - f_n(x')| \leqslant \frac{n}{n+1}|x-x'| \leqslant |x-x'|$.

f_n est donc 1-lipschitzienne sur $[0,1]$. (f_n est aussi $\frac{n}{n+1}$-lipschitzienne)

c) Soit $a \in [0,1]$. Soit $h \in \mathbb{R}^*$ tel que $a+h \in [0,1]$.

$$\left|\frac{f_n(a+h) - f_n(a)}{(a+h)-a}\right| \leqslant \frac{|a+h-a|}{|a+h-a|} = 1 \text{ et } \lim_{h\to 0}\left|\frac{f_n(a+h)-f_n(a)}{(a+h)-a}\right| = |f_n'(a)| \quad \left(\text{car } \lim_{h\to 0}\frac{f_n(a+h)-f_n(a)}{(a+h)-a} = f_n'(a)\right)$$

donc $|f_n'(a)| \leqslant 1$. Par conséquent : $\sup_{a\in[0,1]} |f_n'(a)| \leqslant 1$.

(Q3) a) $\forall x \in [0,1]$, $x f(x) = \frac{x}{1+x} = \frac{x+1}{1+x} - \frac{1}{1+x} = 1 - f(x)$

Posons $\forall x \in [0,1]$, $g(x) = x f(x)$. $g = 1 - f$.

(1) donne : $\forall x \in [0,1]$, $\frac{x(1-x)}{n} f_n'(x) = g_n(x) - x f_n(x)$

Il est clair que : $\forall x \in [0,1]$, $(1-f)_n(x) = (1)_n(x) - f_n(x) = 1 - f_n(x)$ (l'application $f \mapsto f_n$ est linéaire !). $\forall x \in [0,1]$, $g_n(x) = 1 - f_n(x)$.

Donc $\forall x \in [0,1]$, $\frac{x(1-x)}{n} f_n'(x) = 1 - f_n(x) - x f_n(x) = 1 - (1+x) f_n(x)$... cqfd

b) $\forall x \in [0,1]$, $f(x) - f_n(x) = \frac{1}{1+x} - f_n(x) = \frac{1}{1+x}\left[1 - (1+x) f_n(x)\right] = \frac{x(1-x)}{n(1+x)} f_n'(x)$

$$\forall x \in [0,1],\ |f(x) - f_n(x)| = \frac{x(1-x)}{n(1+x)} |f_n'(x)| \underset{\text{Q2 c)}}{\leqslant} \frac{x(1-x)}{n(1+x)} \underset{\sup_{x\in[0,1]} x(1-x) = \frac{1}{4}\ (\text{I Q3})}{\leqslant} \frac{1/4}{n(1+x)} \underset{1+x\geqslant 1}{\leqslant} \frac{1/4}{n} = \frac{1}{4n}.$$

donc $\sup_{x\in[0,1]} |f(x) - f_n(x)| \leqslant \frac{1}{4n}$

Remarque.. Ceci donne $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x)$ pour tout $x \in [0,1]$. $(f_n)_{n\geqslant 1}$ converge simplement vers f. La dernière inégalité assure la convergence uniforme.

IV Convergence de la suite (f_n) vers f sur $[0,1]$.

Fini de s'amuser. Passons enfin au cas général.

(Q1) Soit $k \in [\![0, n-1]\!]$.
$$I_n(k+1) = \int_0^1 \underbrace{x^{k+1}}_{u}\underbrace{(1-x)^{n-k-1}}_{v'}\,dx = \overbrace{\left[x^{k+1}\left(-\frac{(1-x)^{n-k}}{n-k}\right)\right]_0^1}^{0 \ (k+1>0 \text{ et } n-k>0)} - \int_0^1 (k+1)x^k\left[-\frac{(1-x)^{n-k}}{n-k}\right]dx$$

Donc $I_n(k+1) = \frac{k+1}{n-k}\int_0^1 x^k (1-x)^{n-k}\,dx = \frac{k+1}{n-k} \times I_n(k)$.

$\forall k \in [\![0, n-1]\!]$, $I_n(k+1) = \dfrac{k+1}{n-k} I_n(k)$.

$I_n(1) = \dfrac{1}{n} I_n(0) = \dfrac{1}{n} \times \int_0^1 (1-x)^n dx = \dfrac{1}{n} \times \dfrac{1}{n+1}$

$I_n(2) = \dfrac{2}{n-1} I_n(1) = \dfrac{2}{n-1} \times \dfrac{1}{n} \times \dfrac{1}{n+1}$ (... si $n \geqslant 2$)

$I_n(3) = \dfrac{3}{n-2} I_n(2) = \dfrac{3}{n-2} \times \dfrac{2}{n-1} \times \dfrac{1}{n} \times \dfrac{1}{n+1} = \dfrac{3!}{A_{n+1}^4}$ (... si $n \geqslant 2$)

Il est temps de montrer par récurrence que : $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $I_n(k) = \dfrac{k!}{A_{n+1}^{k+1}}$.

Ceci vaut pour $k = 0$ ($I_n(0) = \dfrac{1}{n+1} = \dfrac{0!}{A_{n+1}^1}$)

Supposons la propriété vraie pour $k \in [\![0, n-1]\!]$ et montrons-la pour $k+1$

$I_n(k+1) = \dfrac{k+1}{n-k} I_n(k) = \dfrac{k+1}{n-k} \times \dfrac{k!}{A_{n+1}^{k+1}} = \dfrac{(k+1)!}{A_{n+1}^{k+2}}$ ... cqfd.

c) $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $I_n(k) = \dfrac{k!}{A_{n+1}^{k+1}} = \dfrac{k!(n-k)!}{(n+1)!} = \dfrac{1}{(n+1) C_n^k}$

A ce propos vérifie que l'on sait calculer $\int_0^1 x^p (1-x)^q dx$ avec $p \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{N}$

b) $\int_0^1 f_n(x) dx = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \, f\left(\frac{k}{n}\right) \int_0^1 x^k (1-x)^{n-k} dx = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f\left(\frac{k}{n}\right) \times \dfrac{1}{(n+1) C_n^k}$

$\int_0^1 f_n(x) dx = \dfrac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \dfrac{n}{n+1} \left[\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) + \frac{1}{n} f(1) \right]$

Bonjour Riemann ! $\lim_{n \to +\infty} \dfrac{n}{n+1} = 1$, $\lim_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(x) dx$ et $\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{n} f(1)\right) = 0$

Finalement : $\lim_{n \to +\infty} \int_0^1 f_n(x) dx = \int_0^1 f(x) dx$ ...

Q2) a On suppose f de classe C^1 sur $[0,1]$. Posons $M_1 = \sup_{t \in [0,1]} |f'(t)|$. $M_1 \in \mathbb{R}_+$

a) $\forall (x,x') \in [0,1]^2$, $|f(x) - f(x')| \leqslant M_1 |x - x'|$ car $\forall t \in [0,1]$, $|f'(t)| \leqslant M_1$

donc f est M_1 lipschitzienne. On posera désormais $k = M_1$! Notation des plus adroite ... voir l'écriture de f_n.

Soit $(x, x') \in [0,1]^2$. Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$.

1er cas.. Supposons $|x' - x| \leqslant \alpha$.

$|f(x') - f(x)| \leqslant M_1 |x' - x| = k|x' - x| \leqslant k\alpha \leqslant k\alpha + 2 \dfrac{M_0(f)}{\alpha^2} (x' - x)^2$

(Très dur, hein ? Fin, surtout !)

2e cas.. Supposons $|x' - x| > \alpha$. Pour avoir la bonne idée, analysons le majorant ! $k\alpha + 2 \dfrac{M_0(f)}{\alpha^2} (x' - x)^2 \geqslant k\alpha + 2M_0(f) \geqslant 2M_0(f) = M_0(f) + M_0(f)$

Alors c'est clair maintenant !

$n_0(f) \geq |f(x')|$ et $n_0(f) \geq |f(x)|$ donc $n_0(f)+n_0(f) \geq |f(x')|+|f(x)|$

et $|f(x')|+|f(x)| \geq |f(x')-f(x)|$!! Reprenons dans l'ordre :

$$|f(x')-f(x)| \le |f(x')|+|f(x)| \le 2n_0(f) \le k\alpha + 2n_0(f) \le k\alpha + 2n_0(f)\,;\ \frac{(x'-x)^2}{\alpha^2} = k\alpha + 2\frac{n_0(f)}{\alpha^2}(x'-x)^2$$

donc $\forall (x,x')\in[0,1]^2$, $|f(x')-f(x)| \le k\alpha + 2\dfrac{n_0(f)}{\alpha^2}(x'-x)^2$ et ceci pour tout $\alpha\in\mathbb{R}_+^*$.

b) Fixons α dans $\mathbb{R}_+^*$ et x dans $[0,1]$?!

$$f_n(x)-f(x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f\left(\frac{k}{n}\right)x^k(1-x)^{n-k} - 1\times f(x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k\left(f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right)x^k(1-x)^{n-k}$$

$$1 = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k(1-x)^{n-k}$$

$$|f_n(x)-f(x)| \le \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k(1-x)^{n-k}\left|f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right|$$

" $|f_n(x)-f(x)| \le \sum_{k=0}^{n} C_n^k \cancel{x^k}(1-x)^{n-k}\dots$ " Non ! Ceci nous mettrait dans le k k !

$$|f_n(x)-f(x)| \le \sum_{i=0}^{n} C_n^i x^i(1-x)^{n-i}\left|f\left(\frac{i}{n}\right)-f(x)\right| \le \sum_{i=0}^{n} C_n^i x^i(1-x)^{n-i}\left[k\alpha + 2\frac{n_0(f)}{\alpha^2}\left(\frac{i}{n}-x\right)^2\right]$$

Remarque.. Saluons le concepteur pour sa notation f est $\underline{k}$ lipschitzienne et son goût du canular. Cette petite facétie ne pouvait que conduire les élèves à se perdre les pieds dans le tapis ... enfin les quelques élèves qui n'étaient pas encore ... au tapis.

Reprenons. $$|f_n(x)-f(x)| \le k\alpha \underbrace{\sum_{i=0}^{n} C_n^i x^i(1-x)^{n-i}}_{1} + \frac{2n_0(f)}{\alpha^2}\underbrace{\sum_{i=0}^{n} C_n^i x^i(1-x)^{n-i}\left(\frac{i}{n}-x\right)^2}_{\frac{x(1-x)}{n}}$$ (voir I-Q4)

Donc $|f_n(x)-f(x)| \le k\alpha + \dfrac{2n_0(f)}{\alpha^2}\dfrac{x(1-x)}{n} \le k\alpha + \dfrac{2n_0(f)}{\alpha^2}\times\dfrac{1/4}{n} = k\alpha + \dfrac{n_0(f)}{2n\alpha^2}$

Donc $\forall\alpha\in\mathbb{R}_+^*$, $\forall x\in[0,1]$, $|f_n(x)-f(x)| \le k\alpha + \dfrac{n_0(f)}{2n\alpha^2}$.

Il n'y a pas de c) Dommage !

d) 1er Cas.. $n_0(f)>0$ et $k>0$. (à ne pas oublier... n'est-ce pas...)

Posons $\forall\alpha\in\mathbb{R}_+^*$, $m(\alpha) = k\alpha + \dfrac{n_0(f)}{2n\alpha^2}$. m est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. $\forall\alpha\in\mathbb{R}_+^*$, $m'(\alpha) = k - \dfrac{n_0(f)}{n\alpha^3}$

$$\begin{array}{c|ccccc}
\alpha & 0 & & \sqrt[3]{\frac{n_0(f)}{kn}} & & +\infty \\
\hline
m' & & - & 0 & + & \\
\hline
m & +\infty & \searrow & B & \nearrow & +\infty
\end{array}$$

$B = m\left(\sqrt[3]{\dfrac{n_0(f)}{kn}}\right)$. $B = \min\limits_{\alpha\in\mathbb{R}_+^*}(m(\alpha)) = \inf\limits_{\alpha\in\mathbb{R}_+^*}(m(\alpha))$

Soit $x\in[0,1]$. $\forall\alpha\in\mathbb{R}_+^*$, $|f_n(x)-f(x)| \le m(\alpha)$. $|f_n(x)-f(x)|$ est un minorant de m sur $\mathbb{R}_+^*$ donc $|f_n(x)-f(x)| \le B$

à vérifier tranquillement

$$B = k\sqrt[3]{\frac{n_0(f)}{kn}} + \frac{n_0(f)}{2n}\times\left(\sqrt[3]{\frac{n_0(f)}{kn}}\right)^{-2} = \frac{1}{\sqrt[3]{n}}\left[\sqrt[3]{k^2 n_0(f)} + \frac{1}{2}\sqrt[3]{n_0(f)}\,\sqrt[3]{k^2}\right] = \frac{1}{\sqrt[3]{n}}\,\frac{3}{2}\sqrt[3]{k^2 n_0(f)}.$$

Posons $A = \frac{3}{2}\sqrt[3]{k^2 M_0(f)}$. $\forall x \in [0,1]$, $|f_n(x)-f(x)| \le B = \frac{A}{\sqrt[3]{n}}$.

donc $\sup\limits_{x\in[0,1]} |f_n(x)-f(x)| \le \frac{A}{\sqrt[3]{n}}$

2ème cas. $M_0(f)=0$. $\sup\limits_{x\in[0,1]} |f(x)| = 0$. $\forall x\in[0,1]$, $f(x)=0$. $\forall x \in [0,1]$, $f_n(x)=0$.

donc $\sup\limits_{x\in[0,1]}|f_n(x)-f(x)| = 0 \le \frac{A}{\sqrt[3]{n}}$ ... avec $A = \frac{3}{2}\sqrt[3]{k^2 M_0(f)}$.

3ème cas. $k=0$. $\forall (x,x')\in[0,1]^2$, $|f(x')-f(x)| \le 0|x-x'| = 0$;

f est constante, donc $\forall x\in[0,1]$, $f_n(x)=f(x)$. $\sup\limits_{x\in[0,1]}|f_n(x)-f(x)| = 0 \le \frac{A}{\sqrt[3]{n}}$ avec

Dans tous les cas : $\sup\limits_{x\in[0,1]}|f_n(x)-f(x)| \le \frac{A}{\sqrt[3]{n}}$ avec $A = \frac{3}{2}\sqrt[3]{k^2 M_0(f)}$.

Ceci permet de dire que f_n converge uniformément vers la fonction f

$\left|\int_0^1 f_n(x)\,dx - \int_0^1 f(x)\,dx\right| \le \int_0^1 |f_n(x)-f(x)|\,dx \le \frac{A}{\sqrt[3]{n}}\int_0^1 dx = \frac{A}{\sqrt[3]{n}}$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{A}{\sqrt[3]{n}} = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^1 f_n(x)\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx$.

Q3 a) C'est exactement l'inégalité de Taylor-Lagrange. ($M_2(f)$ est un majorant de $|f''|$ sur le segment déterminé par x et x').

Reprenons pour ceux qui ont oublié.

Soit $(x,x')\in[0,1]^2$. L'inégalité est évidente pour $x=x'$. Supposons $x\neq x'$. Pour des raisons de symétrie, allons jusqu'à supposer $x<x'$. Appliquons la formule de Taylor avec reste intégral.

$f(x') = f(x) + (x'-x)f'(x) + \int_x^{x'} \frac{(x'-t)^1}{1!} f''(t)\,dt$ (... f est de classe C^2 sur $[x,x']$)

donc $|f(x')-f(x)-(x'-x)f'(x)| = \left|\int_x^{x'}(x'-t)f''(t)\,dt\right| \underset{x<x'}{\le} \int_x^{x'}(x'-t)|f''(t)|\,dt \le M_2(f)\int_x^{x'}(x'-t)\,dt = M_2(f)\left[-\frac{(x'-t)^2}{2}\right]_x^{x'}$

donc $|f(x')-f(x)-(x'-x)f'(x)| \le \frac{M_2(f)}{2}(x'-x)^2$.

b) Soit $x\in[0,1]$. On voit très bien qu'en faisant $x' = \frac{k}{n}$, en multipliant par $C_n^k x^k(1-x)^{n-k}$ et en sommant on récupère à droite : $\frac{M_2(f)}{2}\sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k x^k (1-x)^{n-k}\left(\frac{k}{n}-x\right)^2$ qui est encore $\frac{M_2(f)}{2}\frac{x(1-x)}{n}$ qui se majore sans difficulté par $\frac{M_2(f)}{8n}$. Ce qui semble moins clair est ce qui se passe à gauche : $f(x')-f(x)$ va nous permettre de récupérer $f_n(x)-f(x)$ mais que va donner $(x'-x)f'(x)$? Réponse : rien !

Regardez le travail.

$\forall k\in[\![0,n]\!],\ \left|f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)-\left(\frac{k}{n}-x\right)f'(x)\right|\le \frac{M_2(f)}{2}\left(\frac{k}{n}-x\right)^2$

$\forall k\in[\![0,n]\!],\ \left|C_n^k f\left(\frac{k}{n}\right)x^k(1-x)^{n-k}-f(x)C_n^k x^k(1-x)^{n-k}-C_n^k\left(\frac{k}{n}-x\right)x^k(1-x)^{n-k}f'(x)\right|\le \frac{M_2(f)}{2}C_n^k\left(\frac{k}{n}-x\right)^2x^k(1-x)^{n-k}$

Donc $\sum_{k=0}^{n}\left|C_n^k f\left(\frac{k}{n}\right)x^k(1-x)^{n-k}-f(x)C_n^k x^k(1-x)^{n-k}-C_n^k\left(\frac{k}{n}-x\right)x^k(1-x)^{n-k}f'(x)\right|\le \frac{M_2(f)}{2}\sum_{k=0}^{n}C_n^k\left(\frac{k}{n}-x\right)^2x^k(1-x)^{n-k}$

L'inégalité triangulaire donne :

$\left|\sum_{k=0}^{n}C_n^k f\left(\frac{k}{n}\right)x^k(1-x)^{n-k}-f(x)\underbrace{\sum_{k=0}^{n}C_n^k x^k(1-x)^{n-k}}_{1}-f'(x)\sum_{k=0}^{n}C_n^k\left(\frac{k}{n}-x\right)x^k(1-x)^{n-k}\right|\le\frac{M_2(f)}{2}\,\frac{x(1-x)}{n}\le\frac{M_2(f)}{2}\,\frac{1/4}{n}=\frac{M_2(f)}{8n}$

$\left|f_n(x)-f(x)-f'(x)\underbrace{\sum_{k=0}^{n}C_n^k\frac{k}{n}x^k(1-x)^{n-k}}_{x\ \text{I Q 1 b}}+xf'(x)\underbrace{\sum_{k=0}^{n}C_n^k x^k(1-x)^{n-k}}_{1\ \text{I Q 1 a}}\right|\le\frac{M_2(f)}{8n}$

Donc $|f_n(x)-f(x)-f'(x)x+xf'(x)\times 1|\le\frac{M_2(f)}{8n}$.

$\forall x\in[0,1],\ |f_n(x)-f(x)|\le\frac{M_2(f)}{8n}$. $\underline{\sup_{x\in[0,1]}|f_n(x)-f(x)|\le\frac{M_2(f)}{8n}}$.

Cette majoration est la meilleure possible. En effet reprenons I Q 3. $\forall x\in[0,1],\ f(x)=x^2,\ f'(x)=2x,$ $f''(x)=2,\ f_n(x)=\frac{x(1-x)}{n}+x^2$.

Nous avons : $\sup_{x\in[0,1]}|f_n(x)-f(x)|=\sup_{x\in[0,1]}\frac{x(1-x)}{n}=\frac{1}{4n}=\frac{2}{8n}=\frac{M_2(f)}{8n}$. Ceci montre que l'on ne peut pas trouver λ strictement plus petit que $\frac{M_2(f)}{8n}$ tel que $\sup_{x\in[0,1]}|f_n(x)-f(x)|\le\lambda$ et ceci pour <u>toute fonction</u> de classe C^2 sur $[0,1]$.

Nous venons donc de démontrer que toute fonction continue sur $[0,1]$ est limite uniforme sur $[0,1]$ d'une suite de polynômes. Précisons.

Soit $(f_n)_{n\ge1}$ une suite d'applications de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$. Soit f une application de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$.

$(f_n)_{n\ge1}$ converge simplement vers f si pour tout $x\in[a,b]$ la suite $(f_n(x))_{n\ge1}$ converge vers $f(x)$, c'est à dire si : $\forall x\in[a,b],\ \forall\varepsilon\in\mathbb{R}_+^*,\ \exists p\in\mathbb{N},\ \forall n\in\mathbb{N},\ n\ge p\Rightarrow|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$ (p dépend de ε et <u>de x</u>).

$(f_n)_{n\ge1}$ converge uniformément vers f si $\left(\sup_{x\in[a,b]}|f_n(x)-f(x)|\right)_{n\ge1}$ converge vers 0, c'est à dire si :

$\forall\varepsilon\in\mathbb{R}_+^*,\ \exists p\in\mathbb{N},\ \forall n\in\mathbb{N},\ n\ge p\Rightarrow(\forall x\in[a,b],\ |f_n(x)-f(x)|<\varepsilon)$ (ici p ne dépend que de ε)

La convergence uniforme donne la convergence simple mais la réciproque est fausse.

Exercice 1.. Montrer que si $(f_n)_{n\ge1}$ converge uniformément vers f sur $[a,b]$ et si toutes les fonctions f_n sont continues en $c\in[a,b]$ alors f est continue en c.

2.. 
$\leftarrow f_n$

Montrer que f_n converge simplement vers une fonction f que l'on déterminera. La convergence est-elle uniforme ?