Quelques éléments de correction de ESSEC 87 1re épreuve.

I Q1° a) $P_0=U_0=1$. $P_1=2X-1$ $(U_1=X^2-X)$. $P_2=6X^2-6X+1$ $\left(U_2=\frac{X^4-2X^3+X^2}{2}\right)$

b) U_n est un polynôme de degré $2n$. En le dérivant n fois on obtient un polynôme de degré n ; P_n est de degré n.

Le coefficient de X^{2n} dans U_n est : $\frac{1}{n!}$, le coefficient de X^n dans P_n est donc :

$2n(2n-1)(2n-2)\cdots(2n-(n+1))\times\frac{1}{n!}$, c'est à dire $\frac{2n!}{(n!)^2}=C_{2n}^n$

c) $\forall x\in\mathbb{R},\ U_n(1-x)=U_n(x)$

Une récurrence simple montre que : $\forall k\in\mathbb{N},\quad U_n^{(k)}(x)=(-1)^k U_n^{(k)}(1-x)$

Ceci donne : $\forall x\in\mathbb{R},\ P_n(x)=(-1)^n P_n(1-x)$ (faire $k=n$).

Q2° a) Les relations (1) et (2) résultent de calculs très simples.

b) Posons $\forall x\in\mathbb{R},\ g(x)=2x-1$. $\forall x\in\mathbb{R}, g'(x)=2$; $\forall k\in\mathbb{N}^*-\{1\},\ g^{(k)}(x)=0$.

Soit $n\in\mathbb{N}^*$; $U'_{n+1}=g\,U_n$. Appliquons la formule de Leibniz ;

$$P_{n+1}=U_{n+1}^{(n+1)}=(U'_{n+1})^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}C_n^k g^{(k)}U_n^{(n-k)}=g^{(0)}U_n^{(n)}+C_n^1 g' U_n^{(n-1)}=g\,P_n+n\times 2\times U_n^{(n-1)}$$

Donc $\forall x\in\mathbb{R},\ P_{n+1}(x)=(2x-1)P_n(x)+2n\,U_n^{(n-1)}(x)$. (1)'

Dérivons (2) $(n-1)$ fois. On obtient : $(U''_{n+1})^{(n-1)}=2(2n+1)\,U_n^{(n-1)}+U_{n-1}^{(n-1)}$

Ce qui donne : $P_{n+1}=2(2n+1)\,U_n^{(n-1)}+P_{n-1}$ $\left((U''_{n+1})^{(n-1)}=U_{n+1}^{(n+1)}\right)$ (2)'

Il ne reste plus qu'à éliminer $U_n^{(n-1)}$ "dans les deux relations trouvées" ((1)' et (2)')

$(2n+1)$ fois (1)' moins n fois (2)' donne : $(n+1)P_{n+1}(x)=(2n+1)(2x-1)P_n(x)-n\,P_{n-1}(x)$ pour tout $x\in\mathbb{R}$

Donc $\forall x\in\mathbb{R},\ (n+1)P_{n+1}(x)-(2n+1)(2x-1)P_n(x)+n\,P_{n-1}(x)$.

Q3 a) 1 est racine d'ordre n de U_n donc 1 annule $U_n^{(k)}$ pour tout $k\in[\![0,n-1]\!]$ (résultat classique !). Pour les non initiés il suffit de montrer par récurrence que le polynôme $U_n^{(k)}$ est divisible par le polynôme $(X-1)^{n-k}$ pour tout $k\in[\![0,n-1]\!]$ (1 racine d'ordre n de U_n ⇒ 1 racine d'ordre $n-1$ de U'_n ⇒ 1 racine d'ordre $n-2$ de U''_n ⇒ …)

Même chose pour 0.

b) Rappel.. Formule d'intégration par parties "généralisée". f et g sont de classe C^n sur I $(n\in\mathbb{N}^*)$

$\forall(a,b)\in I^2,\quad \int_a^b f(t)g^{(n)}(t)\,dt=\left[\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k f^{(k)}(t)g^{(n-1-k)}(t)\right]_a^b+(-1)^n\int_a^b f^{(n)}(t)g(t)\,dt$

(Se démontre sans difficulté par récurrence)

$n\in\mathbb{N}^*$. Soit f une fonction de classe C^n sur $[0,1]$.

$$\int_0^1 f(t)P_n(t)\,dt=\int_0^1 f(t)\,U_n^{(n)}(t)\,dt=\underbrace{\left[\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k f^{(k)}(t)\,U_n^{(n-1-k)}(t)\right]_0^1}_{=0}+(-1)^n\int_0^1 f^{(n)}(t)\,U_n(t)\,dt$$

(d'après Q3a))

Donc $\int_0^1 f(t)P_n(t)\,dt=(-1)^n\int_0^1 f^{(n)}(t)\,U_n(t)\,dt$

Cette formule vaut encore pour $n=0$ car $P_0=U_0$!

$n \in \mathbb{N}$ et $n \geq 1$. Soit $Q \in E_{n-1}$; $d^\circ Q \leq n-1$ donc $Q^{(n)}$ est le polynôme nul.

$\int_0^1 Q(t) P_n(t)\,dt = (-1)^n \int_0^1 Q^{(n)}(t) U_n(t)\,dt = 0$; $(Q \mid P_n) = 0$.

c) $\forall k \in [\![0,n]\!]$, $d^\circ P_k = k$ donc $(P_k)_{0\leq k\leq n}$ est une base de E_n (résultat classique montré à la fin)

Soit $(i,j) \in [\![0,n]\!]^2$ tel que : $i \neq j$.

1er cas… $i < j$. $P_i \in E_{j-1}$ donc $(P_i \mid P_j) = 0$ (Q3 b)

2e cas… $i > j$ … voir plus haut.

$\forall (i,j) \in [\![0,n]\!]^2$, $i \neq j \Rightarrow (P_i \mid P_j) = 0$.

$(P_k)_{0\leq k\leq n}$ est donc une base orthogonale de E_n.

Q4. a) En intégrant (2) on obtient $0 = 2(2n+1) I_n + I_{n-1}$ ($U'_{n+1}(1) = U'_{n+1}(0) = 0$ d'après Q3a)

Une récurrence simple montre que : $I_n = \dfrac{(-1)^n}{2^n \prod_{k=1}^{n}(2k+1)}$ ($I_0 = 1$) pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

En multipliant haut et bas par $\prod_{k=1}^{n}(2k) = 2^n\, n!$ on obtient $I_n = \dfrac{(-1)^n \times 2^n \times n!}{2^n \times (2n+1)!} = \dfrac{(-1)^n n!}{(2n+1)!}$

(On bouche les trous !)

c) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = \dfrac{(-1)^n n!}{(2n+1)!}$ … ceci vaut encore pour $n = 0$.

b) $n \in \mathbb{N}$. $\|P_n\|^2 = \int_0^1 (P_n(t))^2 dt = \int_0^1 P_n(t) P_n(t)\,dt \underset{(4)}{=} (-1)^n \int_0^1 P_n^{(n)}(t)\, U_n(t)\,dt$

$P_n^{(n)}$ est un polynôme constant ($d^\circ P_n = n$). Le coefficient de X^n dans P_n est C_{2n}^n

donc $P_n^{(n)}$ vaut : $n! \times C_{2n}^n = \dfrac{(2n)!}{n!}$

$\|P_n\|^2 = (-1)^n \times \dfrac{(2n)!}{n!} \underbrace{\int_0^1 U_n(t)\,dt}_{I_n} = (-1)^n \dfrac{(2n)!}{n!} \times \dfrac{(-1)^n n!}{(2n+1)!} = \dfrac{1}{2n+1}$; $\|P_n\| = \dfrac{1}{\sqrt{2n+1}}$.

Q5 a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $\int_0^1 P_n(t)\,dt = \int_0^1 U_n^{(n)}(t)\,dt = \left[U_n^{(n-1)}(t)\right]_0^1 = 0$ (Q3a).

Supposons que : $\forall t \in]0,1[$, $P_n(t) \geq 0$, par continuité : $\forall t \in [0,1]$, $P_n(t) \geq 0$.

P_n n'est pas le polynôme nul, $\exists t \in [0,1]$, $P_n(t) > 0$ donc $\int_0^1 P_n(t)\,dt > 0$! (Contr)

Par conséquent : $\exists a \in]0,1[$, $P_n(t) < 0$. De même $\exists b \in]0,1[$, $P_n(t) > 0$.

P_n change de signe sur $]0,1[$. Le théorème des valeurs intermédiaires montre que :

$\exists c \in]0,1[$, $P_n(c) = 0$.

Supposons que P_n ne possède que des racines d'ordre pair sur $]0,1[$ alors P_n ne peut pas changer de signe sur $]0,1[$. Par conséquent P_n possède au moins une racine d'ordre impair sur $]0,1[$.

b) $\forall x \in \mathbb{R}$, $P_n(x) = \left(\prod_{i=1}^{k}(x-x_i)\right) T_n(x)$ où T_n est un polynôme qui ne change pas signe sur $]0,1[$. Par conséquent $\forall x \in]0,1[$, $\prod_{i=1}^{k}(x-x_i) P_n(x) = \prod_{i=1}^{n}(x-x_i)^2\, T_n(x) \geq 0$

ou $\forall x \in]0,1[$, $\prod_{i=1}^{k}(x-x_i) P_n(x) \leq 0$; ceci vaut encore sur $[0,1]$ par continuité.

$x \mapsto \prod_{k=1}^{k}(x-x_i)P_n(x)$ n'étant pas identiquement nulle on a donc : $\int_0^1 \prod_{i=1}^{k}(x-x_i)P_n(x)dx > 0$ ou < 0.

Supposons $k<n$. $\prod_{i=1}^{k}(X-x_i) \in E_{n-1}$ donc $\left(\prod_{i=1}^{k}(X-x_i) \mid P_n\right)=0$ donc $\int_0^1 \prod_{i=1}^{k}(x-x_i)P_n(x)dx = 0$

Par conséquent $k=n$.

Conclusion... $x_1, x_2, \dots, x_n$ sont n racines de P_n et $d^\circ P_n = n$. $x_1, x_2, \dots, x_n$ sont les racines de P_n ; elles sont d'ordre 1 et $P_n = C_{2n}^n \prod_{i=1}^{n}(X-x_i)$

Q6. a] $P_n(1-X) = (-1)^n P_n(X)$

$\forall i \in [\![1,n]\!]$, $P_n(1-x_i)=0 \iff P_n(x_i)=0$

$1-x_1, 1-x_2, \dots, 1-x_n$ sont les zéros de P_n et $1-x_1 > 1-x_2 > \dots > 1-x_n$

Donc $(x_1, x_2, \dots, x_n) = (1-x_n, 1-x_{n-1}, \dots, 1-x_1)$. Ceci donne : $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $x_{n+1-i} = 1-x_i$

$P_n^2(X) = \left(C_{2n}^n\right)^2 \prod_{i=1}^{n}(X-x_i) \times \prod_{i=1}^{n}(X-x_i) = \left(C_{2n}^n\right)^2 \prod_{i=1}^{n}(X-x_i)\prod_{i=1}^{n}(X-x_{n+1-i}) = \left(C_{2n}^n\right)^2 \prod_{i=1}^{n}(X-x_i)(X-(1-x_i))$

$P_n^2(X) = \left(C_{2n}^n\right)^2 \prod_{i=1}^{n}(X(X-1)+x_i(1-x_i))$.

b] $\sup_{x\in[0,1]} x(1-x) = \frac{1}{4}$ (Etudier $x \mapsto x(1-x)$ sur $[0,1]$)

$\frac{n!}{(2n+1)!} = |I_n| = \int_0^1 \frac{x^n(1-x)^n}{n!}dx \leq \frac{1}{n!} \times \frac{1}{4^n}$; $\frac{(n!)^2}{(2n)!} \geq \frac{2n+1}{4^n}$; $\frac{4^n}{2n+1} \leq \frac{(2n)!}{(n!)^2} = C_{2n}^n$.

c] Soit $x \in]1,+\infty[$. $P_n^2(x) = \left(C_{2n}^n\right)^2 \prod_{i=1}^{n}\left(\underbrace{x(x-1)}_{+} + \underbrace{x_i(1-x_i)}_{+}\right) \geq \left(C_{2n}^n\right)^2 \prod_{i=1}^{n} x(x-1) \geq \left(\frac{4^n}{2n+1}\right)^2 (x(x-1))^n$

$\Leftarrow \left(\frac{\left(4\sqrt{x(x-1)}\right)^n}{2n+1}\right)^2$

$P_n(x) = |P_n(x)| \geq \frac{\left(4\sqrt{x(x-1)}\right)^n}{2n+1}$

$x \in]1,+\infty[$ et $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $x_i \in]0,1[$

Q7 a] $Q_0 = 0$, $Q_1 = 2$ et $Q_2 = 6X-3$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$P_n(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ avec $a_k \in \mathbb{Q}$ pour tout $k \in [\![0,n]\!]$ (P_n est à coefficients rationnels car U_n est à coefficients rationnels !!)

$P_n(X) - P_n(t) = \sum_{k=0}^{n} a_k (X^k - t^k) = (X-t)\sum_{k=1}^{n} a_k \left(\sum_{i=0}^{k-1} X^i t^{k-1-i}\right)$

$X^k - t^k = (X-t)\sum_{i=0}^{k-1} X^i t^{k-1-i}$ pour tout $k \geq 1$

$\frac{P_n(X)-P_n(t)}{X-t} = \sum_{k=1}^{n} a_k \left(\sum_{i=0}^{k-1} X^i t^{k-1-i}\right)$

$\forall x \in]1,+\infty[$, $\int_0^1 \frac{P_n(t)-P_n(x)}{t-x}dt = \sum_{k=1}^{n} a_k \left(\sum_{i=0}^{k-1} x^i \int_0^1 t^{k-1-i}dt\right)$

$= \sum_{k=1}^{n} a_k \left(\sum_{i=0}^{k-1} x^i \frac{1}{k-i}\right)$ ... ce qui est la restriction

à $]1,+\infty[$ d'une fonction polynome à coefficients rationnels de degré $n-1$ (" $i \leq k-1 \leq n-1$ "...)

Si $n=0$, Q_n est encore la restriction à $]1,+\infty[$ d'une fonction polynome à coefficients rationnels.

b) Soit $n\in\mathbb{N}^*$. $\forall t\in\mathbb{R},\ (n+1)P_{n+1}(t)-(2n+1)(2t-1)P_n(t)+nP_{n-1}(t)=0$

$\forall x\in\mathbb{R},\ (n+1)P_{n+1}(x)-(2n+1)(2x-1)P_n(x)+nP_{n-1}(x)=0$. Par différence et division par $t-x$:

$$\forall (t,x)\in\mathbb{R}^2,\ t\neq x \Rightarrow (n+1)\frac{P_{n+1}(t)-P_{n+1}(x)}{t-x}-(2n+1)\frac{(2t-1)P_n(t)-(2x-1)P_n(x)}{t-x}+n\frac{P_{n-1}(t)-P_{n-1}(x)}{t-x}=0$$

$$\forall (t,x)\in\mathbb{R}^2,\ t\neq x \Rightarrow (n+1)\frac{P_{n+1}(t)-P_{n+1}(x)}{t-x}-(2n+1)\frac{(2x-1)(P_n(t)-P_n(x))+2(t-x)P_n(t)}{t-x}+n\frac{P_{n-1}(t)-P_{n-1}(x)}{t-x}=0$$

En intégrant on obtient :

$$\forall x\in\,]1,+\infty[,\ (n+1)Q_{n+1}(x)-(2n+1)(2x-1)Q_n(x)-(2n+1)2\int_0^1 P_n(t)\,dt+nQ_{n-1}(x)=0$$

$\int_0^1 P_n(t)\,dt=(P_0|P_n)=0$ car $n\in\mathbb{N}^*$ ($P_0\in E_{n-1}$)

Donc $\forall x\in\,]1,+\infty[,\ (n+1)Q_{n+1}(x)-(2n+1)(2x-1)Q_n(x)+nQ_{n-1}(x)=0$

" Par abus " $(n+1)Q_{n+1}-(2n+1)(2X-1)Q_n+nQ_{n-1}$ est le polynôme nul. (on confond Q_n avec son prolongement... voir a))

$\boxed{\text{II}}$ Q1.. a) $L_i(x_j)=0$ si $i\neq j$ et 1 si $i=j$. $\forall i\in[\![1,n]\!],\ L_i\in E_{n-1}$. Montrons que $(L_1,L_2,\dots,L_n)$ est une base de E_{n-1}.

$L_1=1$

Soit $P\in E_{n-1}$. Supposons $P=\sum_{i=1}^n \alpha_i L_i$. $P(x_j)=\sum_{i=1}^n\alpha_i L_i(x_j)=\alpha_j$

Il existe au plus un $(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)\in\mathbb{R}^n$ tel que : $P=\sum_{i=1}^n\alpha_iL_i$

Montrons maintenant que : $P=\sum_{i=1}^n P(x_i)L_i$

P et $\sum_{i=1}^n P(x_i)L_i$ sont deux polynômes de degré $\leq n-1$ qui coïncident en $x_1,x_2,\dots,x_n$

$P-\sum_{i=1}^n P(x_i)L_i$ est donc un polynôme de degré $\leq n-1$ qui a n zéros ; $P-\sum_{i=1}^n P(x_i)L_i=0$

$P=\sum_{i=1}^n P(x_i)L_i$

$\forall P\in E_{n-1},\ \exists!(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n),\ P=\sum_{i=1}^n\alpha_iL_i$ .. $(L_1,L_2,\dots,L_n)$ est une base de E_{n-1}

b) Soit $P\in E_{n-1}$. $P=\sum_{i=1}^n P(x_i)L_i$

Par intégration on obtient : $\int_0^1 P(t)\,dt=\sum_{i=1}^n\left(\int_0^1 L_i(t)\,dt\right)P(x_i)=\sum_{i=1}^n\lambda_iP(x_i)$ avec

$\lambda_i=\int_0^1 L_i(t)\,dt$ pour tout $i\in[\![1,n]\!]$

c) P_n et $(X-x_i)L_i$ sont deux polynômes de degré $\leq n$ qui coïncident en $x_1,x_2,\dots,x_n$; ils sont proportionnels. $\exists k_i\in\mathbb{R},\ P_n=k_i(X-x_i)L_i$ on fait tendre x vers x_i :

$\forall x\in\mathbb{R}-\{x_i\},\ \frac{P_n(x)}{x-x_i}=k_iL_i(x)$; par passage à la limite : $P_n'(x_i)=k_iL_i(x_i)=k_i$

Donc $\frac{P_n(x)}{x-x_i}=P_n'(x_i)L_i(x)$ pour tout $x\in\mathbb{R}-\{x_i\}$

d'où : $\forall x\in\mathbb{R}-\{x_i\},\ L_i(x)=\frac{1}{P_n'(x_i)}\,\frac{P_n(x)}{x-x_i}$ ($P_n'(x_i)=0\Rightarrow x_i$ est un zéro d'ordre 2 de P_n !)

d) Nous avons vu que Q_n est définie sur $]1,+\infty[$ ... et sur $]-\infty,0[$.

Nous pouvons étendre cette définition à $[0,1]$ car pour $x\in[0,1]$, $t\mapsto\frac{P_n(t)-P_n(x)}{t-x}$ est prolongeable par continuité en x (... dans ce cas $\int_0^1\frac{P_n(t)-P_n(x)}{t-x}\,dx$ est une intégrale généralisée convergente !)

Nous pouvons maintenant intégrer c)

$$\lambda_i = \int_0^1 L_i(t)\,dt = \frac{1}{P_n'(x_i)}\int_0^1 \frac{P_n(x)}{x-x_i}\,dx = \frac{1}{P_n'(x_i)}\int_0^1 \frac{P_n(t)-\overset{0}{\overset{\shortparallel}{P_n(x_i)}}}{t-x_i}\,dt = \frac{Q_n(x_i)}{P_n'(x_i)}.$$

Q2. a) $P = SP_n + R$. $d^\circ R < n$ donc $d^\circ S + d^\circ P_n = d^\circ SP_n \leq 2n-1$; $d^\circ S \leq 2n-1-d^\circ P_n = n-1$

$$\int_0^1 P(t)\,dt = \int_0^1 S(t)P_n(t)\,dt + \int_0^1 R(t)\,dt = (S\,|\,P_n) + \int_0^1 R(t)\,dt \underset{\uparrow S \in E_{n-1}}{=} \int_0^1 R(t)\,dt$$

b) $P \in E_{2n-1}$. $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $P(x_i) = S(x_i)P_n(x_i) + R(x_i) = R(x_i)$.

$$\int_0^1 P(t)\,dt = \int_0^1 R(t)\,dt \underset{\uparrow R \in E_{n-1}}{=} \sum_{i=1}^n \lambda_i R(x_i) = \sum_{i=1}^n \lambda_i P(x_i).$$

Q3. a) $\displaystyle\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^k = \int_0^1 t^k\,dt = \frac{1}{k+1}$.

b) $$\int_0^1 \underbrace{\left(P_n^2(x) - (C_{2n}^n)^2 x^{2n}\right)}_{\text{polynome de degré } \leq 2n-1} dx = \sum_{i=1}^n \lambda_i \left(P_n^2(x_i) - ((C_{2n}^n)^2 x_i^{2n})\right) = -\sum_{i=1}^n \lambda_i (C_{2n}^n)^2 x_i^{2n}$$

$$-(C_{2n}^n)^2\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^{2n} = \int_0^1 P_n^2(x)\,dx - (C_{2n}^n)^2\int_0^1 x^{2n}\,dx = \frac{1}{2n+1} - (C_{2n}^n)^2\frac{1}{2n+1}$$

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^{2n} = \frac{1}{2n+1}\left[1 - \frac{1}{(C_{2n}^n)^2}\right]$$

c) $L_k^2 \in E_{2n-2} \subset E_{2n-1}$

$$\int_0^1 L_k^2(t)\,dt = \sum_{i=1}^n \lambda_i L_k^2(x_i) = \lambda_k\ !$$

$\forall t \in [0,1]$, $L_k^2(t) \geq 0$ et $\exists t \in [0,1]$, $L_k^2(t) > 0$; $\lambda_k = \int_0^1 L_k^2(t)\,dt > 0$.

III 1 a) Soit $x \in \mathbb{R} - \{2\}$

$$\sum_{k=0}^{2n-1} \frac{x^k}{2^{k+1}} = \frac{1}{2}\,\frac{1-\left(\frac{x}{2}\right)^{2n}}{1-\frac{x}{2}} = \frac{1}{2^{2n}}\,\frac{2^{2n}-x^{2n}}{2-x} = \frac{1}{2-x} - \frac{x^{2n}}{4^n(2-x)} \dots \text{cqfd}.$$

$$\frac{\lambda_i}{2-x_i} = \lambda_i\sum_{k=0}^{2n-1}\frac{x_i^k}{2^{k+1}} + \lambda_i\,\frac{x_i^{2n}}{4^n(2-x_i)}$$ ($x = x_i$ dans la formule précédente, multiplication par λ_i, ...)

$$u_n = \sum_{i=1}^n\left(\lambda_i \sum_{k=0}^{2n-1}\frac{x_i^k}{2^{k+1}}\right) + \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i x_i^{2n}}{4^n(2-x_i)}$$ $\left(\sum_i\sum_k a_{i,k} = \sum_k\sum_i a_{i,k}\ !\right)$

$$u_n = \sum_{k=0}^{2n-1}\frac{1}{2^{k+1}}\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^k + \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i x_i^{2n}}{4^n(2-x_i)}$$

$$u_n \underset{\uparrow\ \text{III Q3a}}{=} \sum_{k=0}^{2n-1}\frac{1}{2^{k+1}}\,\frac{1}{k+1} + \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i x_i^{2n}}{4^n(2-x_i)} \dots \text{cqfd}.$$

Intégrons la 1ère égalité de Q1 a entre 0 et 1

On obtient : $$\ln 2 = \sum_{k=0}^{2n-1}\frac{1}{2^{k+1}}\int_0^1 x^k\,dx + \int_0^1 \frac{x^{2n}}{4^n(2-x)}\,dx$$

$$\ln 2 = \sum_{k=0}^{2n-1}\frac{1}{(k+1)2^{k+1}} + \int_0^1 \frac{t^{2n}}{4^n(2-t)}\,dt = \sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{k\,2^k} + \int_0^1 \frac{t^{2n}}{4^n(2-t)}\,dt \dots \text{cqfd}.$$

Par soustraction des deux égalités obtenues on a :

$$|u_n - \ln 2| = \left| \sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda_i x_i^{2n}}{4^n(2-x_i)} - \frac{1}{4^n}\int_0^1 \frac{t^{2n}}{2-t}\,dt \right|$$

$\frac{1}{2-x_i} \le 1$ et $\frac{1}{2-t} \le 1$ pour $t \in [0,1]$

$$|u_n - \ln 2| \le \frac{1}{4^n}\int_0^1 \frac{t^{2n}}{2-t}\,dt + \sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda_i x_i^{2n}}{4^n(2-x_i)} \le \frac{1}{4^n}\left(\int_0^1 t^{2n}\,dt + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^{2n}\right)$$

$$|u_n - \ln 2| \le \frac{1}{4^n}\left(\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+1}\left(1 - \frac{1}{(C_{2n}^n)^2}\right)\right) \le \frac{2}{4^n(2n+1)}. \qquad \left(-\frac{1}{(C_{2n}^n)^2} < 0\ !\right)$$

conclusion.. $(u_n)_{n\ge 1}$ converge vers $\ln 2$.

Q2.– $Q_n \in E_{n-1}$ (I 7°). $\quad Q_n = \sum_{i=1}^{n} Q_n(x_i) L_i = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i P_n'(x_i) L_i$

$\forall x \in \mathbb{R} - \{x_i\}$, $L_i(x) = \frac{1}{P_n'(x_i)} \frac{P_n(x)}{x - x_i}$; $\forall x \in \mathbb{R} - \{x_i\}$, $P_n'(x_i) L_i(x) = \frac{P_n(x)}{x - x_i}$

Par conséquent $Q_n(2) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i P_n'(x_i) L_i(2) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \frac{P_n(2)}{2 - x_i}$

donc $\quad \frac{Q_n(2)}{P_n(2)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{2 - x_i} = u_n$.

P_n et Q_n sont des polynômes à coefficients rationnels, et $2 \in \mathbb{Q}$; par conséquent : $Q_n(2)$ et $P_n(2)$ sont dans $\mathbb{Q}$. u_n est donc dans $\mathbb{Q}$.

Q3.– (3) donne $(n+1)P_{n+1}(2) - (2n+1)\times 3 P_n(2) + n P_{n-1}(2) = 0$

(6) donne $(n+1)Q_{n+1}(2) - (2n+1)\times 3 Q_n(2) + n Q_{n-1}(2) = 0$

multiplions la première par $Q_n(2)$ et la deuxième par $P_n(2)$. Une bonne soustraction donne :

$(n+1)\left(Q_{n+1}(2)P_n(2) - P_{n+1}(2)Q_n(2)\right) + n\left(Q_{n-1}(2)P_n(2) - P_{n-1}(2)Q_n(2)\right) = 0$. Donc :

$(n+1)\left(Q_{n+1}(2)P_n(2) - P_{n+1}(2)Q_n(2)\right) = n\left(Q_n(2)P_{n-1}(2) - P_n(2)Q_{n-1}(2)\right)$ (... suite constante !)

Une récurrence simple donne (!!) : $(n+1)\left(Q_{n+1}(2)P_n(2) - P_{n+1}(2)Q_n(2)\right) = Q_1(2)P_0(2) - P_1(2)Q_0(2)$

donc : $(n+1)\left(Q_{n+1}(2)P_n(2) - P_{n+1}(2)Q_n(2)\right) = 2$!

En divisant par $P_n(2)P_{n+1}(2)$ on obtient : $(n+1)\left[u_{n+1} - u_n\right] = \frac{2}{P_n(2)P_{n+1}(2)}$, soit :

$u_{n+1} - u_n = \frac{2}{(n+1)P_n(2)P_{n+1}(2)}$.

Q4 a) $\quad Q_n(2) = \int_0^1 \frac{P_n(t) - P_n(2)}{t-2}\,dt = \int_0^1 \frac{P_n(t)}{t-2}\,dt - \int_0^1 \frac{P_n(2)}{t-2}\,dt = \int_0^1 \frac{P_n(t)}{t-2}\,dt - P_n(2)\int_0^1 \frac{1}{t-2}\,dt$

$Q_n(2) = \int_0^1 \frac{P_n(t)}{t-2}\,dt - P_n(2)(-\ln 2)$

$\ln 2 - u_n = \ln 2 - \frac{Q_n(2)}{P_n(2)} = \ln 2 - \frac{1}{P_n(2)}\int_0^1 \frac{P_n(t)}{t-2}\,dt + (-\ln 2) = \frac{1}{P_n(2)}\int_0^1 \frac{P_n(t)}{2-t}\,dt$.

$t \mapsto \frac{P_n(t) - P_n(2)}{t-2}$ est une fonction polynôme de degré $\le n-1$ (... à quelques abus près !)

donc $\int_0^1 \frac{P_n(t) - P_n(2)}{t-2} P_n(t)\,dt = 0$; $\quad \int_0^1 \frac{P_n^2(t)}{t-2}\,dt = P_n(2)\int_0^1 \frac{P_n(t)}{t-2}\,dt$

donc $\quad \ln 2 - u_n = \frac{1}{P_n^2(2)}\int_0^1 \frac{P_n^2(t)}{2-t}\,dt$

$\forall t\in[0,1],\quad 0\leq \dfrac{P_n^2(t)}{2-t}\leq P_n^2(t)$

donc $\quad 0\leq \dfrac{1}{P_n^2(2)}\displaystyle\int_0^1 \dfrac{P_n^2(t)}{2-t}dt \leq \dfrac{1}{P_n^2(2)}\int_0^1 P_n^2(t)dt = \dfrac{1}{(2n+1)P_n^2(2)}$

$\forall x\in[1,+\infty[,\quad P_n(x)\geq \dfrac{\left(4\sqrt{x(x-1)}\right)^n}{2n+1}\quad$ (I 6°)

donc $\quad \dfrac{1}{P_n^2(2)}\leq \dfrac{(2n+1)^2}{(4^2\times 2)^n}$

Donc $\quad 0\leq \ln 2-u_n\leq \dfrac{1}{(2n+1)P_n^2(2)}\leq \dfrac{2n+1}{32^n}$.

Q 5.- $\quad u_{n+1}=u_n+\dfrac{2}{(n+1)P_n(2)P_{n+1}(2)}$

$P_{n+1}(2)=\dfrac{1}{n+1}\left[(2n+1)\,3\,P_n(2)-nP_{n-1}(2)\right]$ même chose pour $Q_n(2)$

$P_0(2)=1$; $P_1(2)=3$; $P_2(2)=13$; $P_3(2)=63$; $P_4(2)=321$; $P_5(2)=1683$

$Q_0(2)=0$; $Q_1(2)=2$; $Q_2(2)=9$; $Q_3(2)=\dfrac{131}{3}$; $Q_4(2)=222{,}5=\dfrac{445}{2}$; $Q_5(2)=\dfrac{34997}{30}$

$u_1=\dfrac{\lambda_1}{2-x_1}\quad x_1=\dfrac{1}{2}$ et $\lambda_1=1$; $u_1=\dfrac{2}{3}$. ce qui est évident avec $\dfrac{Q_1(2)}{P_1(2)}$.

$u_2=\dfrac{9}{13}\quad\left(\dfrac{Q_2(2)}{P_2(2)}\right)$; $u_3=\dfrac{131}{189}$; $u_4=\dfrac{445}{642}$; $u_5=\dfrac{34997}{50490}=\dfrac{34997}{2\times3^3\times5\times11\times17}$

$0\leq \ln 2-u_1\leq 0{,}09375 \qquad u_1\simeq 0{,}66666$

$0\leq \ln 2-u_2\leq 0{,}0049 \qquad u_2\simeq 0{,}\underline{6}92307692$

$0\leq \ln 2-u_3\leq 0{,}00022 \qquad u_3\simeq 0{,}\underline{69}3121693$

$0\leq \ln 2-u_4\leq 0{,}0000086 \qquad u_4\simeq 0{,}\underline{6931}46417$

$0\leq \ln 2-u_5\leq 0{,}000000328 \qquad u_5\simeq 0{,}\underline{69314}7158$

Conclusion.- Pas du mais très long !.

Un regret : ne pas avoir eu un meilleur texte. La définition de Q_n est très malheureuse ($\forall x\in]1,+\infty[,\ Q_n(x)=\cdots\cdots\ Q_n(x_i)=!$)

On pouvait introduire Q_n au niveau de I 7 de la manière suivante

Q 7 a) Soit $n\in\mathbb{N}$. Montrer que pour tout réel x, $\displaystyle\int_0^1 \frac{P_n(t)-P_n(x)}{t-x}dt$ est convergente.

On pose $\forall x\in\mathbb{R},\ Q_n(x)=\displaystyle\int_0^1\frac{P_n(t)-P_n(x)}{t-x}dt$. Expliciter $Q_0, Q_1, Q_2,\cdots\cdots$