

## CONCOURS D'ADMISSION

### Option générale

## MATHEMATIQUES II

Année 1995

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Les candidats sont invités à **encadrer** dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.

Ils ne doivent faire usage d'aucun document; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Si au cours de l'épreuve un candidat repère ce qui lui semble une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Le problème a pour but l'étude des arrivées successives des clients à un guichet (distributeur de billets d'une banque, péage d'autoroute, etc). Dans la partie I sont établis quelques résultats préliminaires d'analyse.

### Partie I

Dans cette partie, on désigne par  $\lambda$  un nombre réel non nul donné, et l'on se propose d'étudier par récurrence la suite  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de fonctions définies sur  $[0; +\infty[$  dans  $\mathbb{R}$  vérifiant pour tout entier naturel  $n$  les deux conditions suivantes :

$R_n$  : Pour tout couple  $(x, y)$  de réels positifs,  $f_n$  vérifie la relation :

$$f_n(x + y) = \sum_{k=0}^n f_{n-k}(x) f_k(y)$$

$D_n$  :  $f_n$  est dérivable à droite en 0 et l'on a :

$$f'_n(0) = \lim_{\substack{y \rightarrow 0 \\ y > 0}} \frac{f_n(y) - f_n(0)}{y} = \begin{cases} -\lambda & \text{si } n = 0 \\ +\lambda & \text{si } n = 1 \\ 0 & \text{si } n \geq 2 \end{cases}$$

1. *Étude du signe de la fonction  $f_0$*

Dans cette question, on considère une fonction  $f_0 : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  vérifiant  $(R_0)$  et  $(D_0)$  :

$$R_0 : \forall x, y \geq 0 \quad f_0(x+y) = f_0(x) f_0(y)$$

$$D_0 : f'_0(0) = -\lambda$$

- (a) Établir que  $f_0$  n'est pas identiquement nulle sur  $\mathbb{R}^+$ .

En faisant alors  $x = 0$  dans la relation  $(R_0)$ , déterminer la valeur de  $f_0(0)$ .

- (b) En faisant  $x = y = \frac{t}{2}$  dans la relation  $(R_0)$ , établir que  $f_0(t) \geq 0$  lorsque  $t \geq 0$ .

- (c) On se propose enfin d'établir que  $f_0(t) > 0$  lorsque  $t \geq 0$ .

À cet effet, on raisonne par l'absurde et l'on suppose qu'il existe un nombre réel positif  $t_0$  tel que  $f_0(t_0) = 0$ . En déduire que  $f_0(\frac{t_0}{2}) = 0$ , puis, pour tout entier  $n \geq 1$ , que  $f_0(\frac{t_0}{2^n}) = 0$ . Montrer qu'alors  $f_0(0) = 0$  et conclure.

## 2. Existence et unicité de la fonction $f_0$

Dans cette question, on considère  $f_0 : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  vérifiant  $(R_0)$  et  $(D_0)$ .

- (a) On considère un nombre réel strictement positif  $x$ .

- En formant pour  $y > 0$  le rapport  $\frac{f_0(x+y) - f_0(x)}{y}$ , prouver que  $f_0$  est dérivable à droite en  $x$  et exprimer sa dérivée à droite en  $x$ .
- Justifier, à l'aide du résultat obtenu en 1, l'égalité  $f_0(x-y) = \frac{f_0(x)}{f_0(y)}$  pour  $0 \leq y \leq x$ .
- En formant pour  $0 < y \leq x$  le rapport  $\frac{f_0(x-y) - f_0(x)}{-y}$  à l'aide de cette expression de  $f_0(x-y)$ , prouver que  $f_0$  est dérivable à gauche en  $x$  et exprimer sa dérivée à gauche en  $x$ .

- (b) En déduire que  $f_0$  est dérivable sur  $\mathbb{R}^+$  et exprimer  $f'_0(x)$  en fonction de  $\lambda$  et de  $f_0(x)$ .

- (c) Dérivée la fonction  $x \mapsto e^{\lambda x} f_0(x)$ , puis en déduire  $f_0(x)$  en fonction de  $\lambda$  et de  $x$ .

- (d) Réciproquement, montrer que la fonction dérivable  $f_0$  ainsi obtenue vérifie  $(R_0)$  et  $(D_0)$ .

## 3. Existence et unicité de la fonction $f_1$

La fonction  $f_0$  étant ainsi obtenue, on considère  $f_1 : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  vérifiant  $(R_1)$  et  $(D_1)$  :

$$R_1 : \forall x, y \geq 0 \quad f_1(x+y) = f_1(x)f_0(y) + f_0(x)f_1(y)$$

$$D_1 : f'_1(0) = \lambda$$

- (a) Déterminer  $f_1(0)$  à l'aide de la relation  $(R_1)$ , et en déduire la limite du quotient  $\frac{f_1(y)}{y}$  quand  $y$  tend vers 0 ( $y > 0$ )

- (b) On considère un nombre réel strictement positif  $x$ .

- En formant pour  $0 < y$  le rapport  $\frac{f_1(x+y) - f_1(x)}{y}$ , prouver que  $f_1$  est dérivable à droite en  $x$  et exprimer sa dérivée à droite en  $x$ .
- Justifier l'égalité  $f_1(x) = f_1(x-y)f_0(y) + f_0(x-y)f_1(y)$  pour  $0 \leq y \leq x$  et en déduire une expression de  $f_1(x-y)$
- En formant pour  $0 < y \leq x$  le rapport  $\frac{f_1(x-y) - f_1(x)}{-y}$  à l'aide de cette expression de  $f_1(x-y)$ , prouver que  $f_1$  est dérivable à gauche en  $x$  et exprimer sa dérivée à gauche en  $x$ .

- (c) En déduire que  $f_1$  est dérivable sur  $\mathbb{R}^+$  et exprimer  $f'_1(x)$  en fonction de  $\lambda$ ,  $f_0(x)$  et  $f_1(x)$ .

- (d) Dérivée la fonction  $x \mapsto e^{\lambda x} f_1(x)$ , puis en déduire  $f_1(x)$  en fonction de  $\lambda$  et  $x$ .

- (e) Réciproquement, montrer que la fonction dérivable  $f_1$  ainsi obtenue vérifie  $(R_1)$  et  $(D_1)$ .

## 4. Existence et unicité de la fonction $f_2$

Les fonctions  $f_0$  et  $f_1$  étant ainsi obtenues, on considère  $f_2 : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  vérifiant  $(R_2)$  et  $(D_2)$ .

- (a) Déterminer  $f_2(0)$  à l'aide de la relation  $(R_2)$  et en déduire la limite du quotient  $\frac{f_2(y)}{y}$  quand  $y$  tend vers 0 ( $y > 0$ )
- (b) On considère un nombre réel strictement positif  $x$ .
- En formant pour  $0 < y$  le rapport  $\frac{f_2(x+y) - f_2(x)}{y}$ , prouver que  $f_2$  est dérivable à droite en  $x$  et exprimer sa dérivée à droite en  $x$ .
  - Justifier l'égalité  $f_2(x) = f_2(x-y)f_0(y) + f_1(x-y)f_1(y) + f_0(x-y)f_2(y)$  pour  $0 \leq y \leq x$  et en déduire une expression de  $f_2(x-y)$
  - En formant pour  $0 < y \leq x$  le rapport  $\frac{f_2(x-y) - f_2(x)}{-y}$  à l'aide de cette expression de  $f_2(x-y)$ , prouver que  $f_2$  est dérivable à gauche en  $x$  et exprimer sa dérivée à gauche en  $x$ .
- (c) En déduire que  $f_2$  est dérivable sur  $\mathbb{R}^+$  et montrer que :  $f_2'(x) = \lambda(f_1(x) - f_2(x))$ .
- (d) Dérivée la fonction  $x \mapsto e^{\lambda x} f_2(x)$ , puis en déduire  $f_2(x)$  en fonction de  $\lambda$  et  $x$ .
- (e) Réciproquement, montrer que la fonction dérivable  $f_2$  ainsi obtenue vérifie  $(R_2)$  et  $(D_2)$ .

5. *Généralisation : existence et unicité de la fonction  $f_n$  ( $n \geq 2$ )*

On suppose avoir obtenu, pour tout entier  $k$  tel que  $0 \leq k < n$ , une et une seule fonction  $f_k$  vérifiant  $(R_k)$  et  $(D_k)$ , dérivable sur  $\mathbb{R}^+$  et vérifiant  $f_k(0) = 0$  pour  $k \geq 1$ .

On considère alors une fonction  $f_n : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  vérifiant  $(R_n)$  et  $(D_n)$ .

- (a) Déterminer  $f_n(0)$  et la limite du quotient  $\frac{f_n(y)}{y}$  quand  $y$  tend vers 0 ( $y > 0$ ).
- (b) Établir la dérivabilité de  $f_n$  sur  $\mathbb{R}^+$  et exprimer  $f_n'(x)$  en fonction de  $\lambda$ ,  $f_{n-1}(x)$ ,  $f_n(x)$ .
- (c) Dérivée la fonction  $x \mapsto e^{\lambda x} f_0(x)$ , puis en déduire  $f_n(x)$  en fonction de  $\lambda$  et  $x$ , d'abord dans le cas  $n = 3$ , puis, par récurrence, dans le cas général.
- (d) Réciproquement, montrer que la fonction dérivable  $f_n$  ainsi obtenue vérifie  $(R_n)$  et  $(D_n)$ .

## Partie II

On considère les arrivées successives des clients à un guichet.

Étant donnés deux nombres réels  $t_1$  et  $t_2$  tels que  $t_1 < t_2$ , on note  $N(t_1, t_2)$  la variable aléatoire indiquant le nombre de clients se présentant au guichet dans l'intervalle de temps  $]t_1; t_2]$ .

(Par convention, on posera  $P(N(t_1, t_1) = 0) = 1$ , et, lorsque  $n \geq 1$ ,  $P(N(t_1, t_1) = n) = 0$ ). On fait, dans toute la suite du problème, les trois hypothèses suivantes :

**A)** Étant donnés quatre nombres réels  $t_1, t_2, t_3$  et  $t_4$  tels que  $t_1 \leq t_2 \leq t_3 \leq t_4$ , les variables aléatoires  $N(t_1, t_2)$  et  $N(t_3, t_4)$  sont indépendantes.

*Cette hypothèse signifie que les nombres de clients se présentant au cours de deux intervalles de temps disjoints sont indépendants*

**B)** Pour tout entier naturel  $n$ , il existe une fonction  $p_n : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  telle que, pour tout couple de nombres réels  $(t_1, t_2)$  tels que  $t_1 \leq t_2$  :

$$P(N(t_1, t_2) = n) = p_n(t_2 - t_1)$$

*Cette hypothèse signifie que la probabilité pour que  $n$  clients se présentent entre les instant  $t_1$  et  $t_2$  dépend uniquement de la durée  $t_2 - t_1$*

**C)** Il existe un réel  $\lambda > 0$  et des fonctions  $\varepsilon_1, \varepsilon : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  de limites nulles en 0 tels que, pour tout couple de nombres réels  $(t_1, t_2)$  tel que  $t_1 \leq t_2$  :

$$\begin{aligned} P(N(t_1, t_2) = 1) &= \lambda(t_2 - t_1) + (t_2 - t_1)\varepsilon_1(t_2 - t_1) \\ P(N(t_1, t_2) \geq 2) &= (t_2 - t_1)\varepsilon(t_2 - t_1) \end{aligned}$$

Cette hypothèse signifie que, pour une courte durée  $t_2 - t_1$  :

- la probabilité d'arrivée d'un seul client pendant cette courte durée  $t_2 - t_1$  est approximativement proportionnelle à  $t_2 - t_1$
- la probabilité d'arrivée de plus d'un client pendant cette courte durée  $t_2 - t_1$  est négligeable devant la probabilité d'arrivée d'un seul client

1. *Équation fonctionnelle des fonctions  $p_n$*

On considère dans cette question deux nombres réels positif  $x$  et  $y$ .

- (a) Exprimer  $P(N(0, x + y) = 0)$  en fonction de  $P(N(0, x) = 0)$  et de  $P(N(0, y) = 0)$  et en déduire que  $p_0(x + y) = p_0(x)p_0(y)$ .
- (b) Établir plus généralement que, pour tout entier naturel  $n$ , on a :

$$p_n(x + y) = \sum_{k=0}^n p_{n-k}(x) p_k(y)$$

2. *Dérivabilité en 0 des fonctions  $p_n$*

- (a) Établir l'existence d'une fonction  $\varepsilon_0 : R^+ \rightarrow R$  de limite nulle en 0 telle que :

$$P(N(t_1, t_2) = 0) = 1 - \lambda(t_2 - t_1) + (t_2 - t_1)\varepsilon_0(t_2 - t_1)$$

- (b) Établir, pour tout entier  $n \geq 2$ , l'existence d'une fonction  $\varepsilon_n : R^+ \rightarrow R$  de limite nulle en 0 telle que :

$$P(N(t_1, t_2) = n) = (t_2 - t_1)\varepsilon_n(t_2 - t_1)$$

- (c) Établir, en posant  $x = t_2 - t_1$ , que  $p_0(x) = 1 - \lambda x + x\varepsilon_0(x)$ , que  $p_1(x) = \lambda x + x\varepsilon_1(x)$  et donner de même un développement limité à l'ordre 1 de  $p_n$  pour  $n \geq 2$ .
- (d) En déduire la valeur de  $p'_0(0)$ , de  $p'_1(0)$  et de  $p'_n(0)$  pour  $n \geq 2$ .

3. *Loi de la variable aléatoire  $N(t_1, t_2)$*

- (a) Établir que les fonctions  $p_0$ ,  $p_1$  et  $p_n$  pour  $n \geq 2$  vérifient les hypothèses  $(R_n)$  et  $(D_n)$  du I.
- (b) En déduire les expressions de  $p_n(x)$  et de  $P(N(t_1, t_2) = n)$  pour tout entier naturel  $n$  et montrer que la variable aléatoire  $N(t_1; t_2)$  suit une loi de Poisson de paramètre  $\lambda(t_2 - t_1)$

4. *Loi de l'instant d'arrivée du  $n^{\text{ème}}$  client*

On fixe un instant-origine et l'on note  $T_n$  la variable aléatoire (à valeur dans  $R^+$ ) indiquant l'instant d'arrivée du  $n^{\text{ème}}$  client ( $n \geq 1$ ) à partir de cet instant-origine.

- (a) Comparer pour tout réel positif  $t$  les événements  $(N(0, t) \leq n - 1)$  et  $(T_n > t)$ .
- (b) En déduire la loi de  $T_1$  et reconnaître celle-ci.
- (c) En déduire de même la fonction de répartition et la densité de  $T_2$ , de  $T_3$ , puis de  $T_n$  (dont la loi s'appelle *loi gamma de paramètres  $n$  et  $\lambda$* )
- (d) Déterminer l'espérance et la variance de cette variable aléatoire  $T_n$ .

5. *Loi du nombre de clients procédant à un achat*

On désigne par  $p$  (où  $0 < p < 1$ ) la probabilité pour qu'un client se présentant au guichet procède à un achat et par  $A(t_2, t_1)$  la variable aléatoire indiquant le nombre de clients se présentant au guichet dans l'intervalle de temps  $]t_1; t_2]$  et procédant à un achat.

- (a) Soient  $n$  et  $k$  deux entiers tels que  $0 \leq k \leq n$ .  
Déterminer la probabilité conditionnelle  $P(A(t_2, t_1) = k : N(t_2, t_1) = n)$  et reconnaître la loi de  $A(t_2, t_1)$  conditionnée par  $N(t_2, t_1) = n$ .

- (b) À l'aide de la formule des probabilités totales, en déduire la loi de la variable aléatoire  $A(t_2, t_1)$  et préciser son espérance.
- (c) Donner, de même, la loi de la variable aléatoire  $B(t_1, t_2)$  indiquant le nombre des clients se présentant au guichet dans l'intervalle de temps  $]t_1; t_2]$  et ne procédant à aucun achat.
- (d) Étudier enfin l'indépendance des variables aléatoires  $A(t_2, t_1)$  et  $B(t_2, t_1)$ .