ESSEC

Ecole Supérieure des Sciences Economiques et Commerciales

Etablissement d'enseignement supérieur privé reconnu par l'Etat

CONCOURS D'ADMISSION 1987

toutes options

MATHEMATIQUES - 2ème épreuve

Mardi 19 mai 1987 de 8 h à 12 h

Le but du problème est l'étude du nombre moyen de retours à l'origine lors d'une promenade aléatoire sur une droite, dans un plan, ou dans l'espace, ce qui fait l'objet de la partie II. La partie I permet d'obtenir quelques résultats préliminaires d'Analyse.

La qualité de la rédaction et de l'expression, la rigueur des raisonnements et le soin apporté aux calculs numériques (qui nécessitent l'emploi d'une calculatrice programmable) interviennent dans le barême.

PARTIE I

Le but de cette partie est l'étude de la suite $(C_{2n}^n / 4^n)$ à l'aide de la suite (u_n) définie pour $n \geq 1$ par: $u_n = \sqrt{n}\, C_{2n}^n / 4^n$.

1°) ETUDE DE LA SUITE (u_n).

a) Calculer u_1 et u_{n+1} / u_n.

b) Prouver par récurrence que:

$$u_n < \sqrt{n / (2n+1)}$$

c) Etudier le sens de variation de la suite (u_n), et montrer qu'elle converge vers un nombre réel L tel que: $1/2 \leq L \leq 1/\sqrt{2}$.

2°) RAPIDITE DE CONVERGENCE DE (u_n).

a) En appliquant l'inégalité des accroissements finis à la fonction $t \mapsto \sqrt{t}$ sur un intervalle convenable, prouver la double inégalité suivante pour tout réel x strictement positif:

$$\frac{1}{8(x+1/2)} \leq (x+1/2) - \sqrt{x(x+1)} \leq \frac{1}{8\sqrt{x(x+1)}}$$

b) En déduire que:

$$\frac{u_k}{8(k+1/2)} - \frac{u_k}{8(k+3/2)} \leq u_{k+1} - u_k \leq \frac{u_k}{8k} - \frac{u_k}{8(k+1)}$$

c) Par sommation de ces inégalités, trouver un encadrement de $u_p - u_n$ pour $p > n$, puis établir la double inégalité suivante:

$$(1) \qquad u_n / 8(n+1/2) \leq L - u_n \leq L / 8n.$$

d) En déduire que:

$$(2) \qquad |L - (1 + 1/8n).u_n| \leq L/16n^2$$

3°) <u>CALCUL APPROCHE DE L.</u>

a) Comment suffit-il de choisir n pour que u_n soit une valeur approchée de L à 10^{-5} près?

b) Comment suffit-il de choisir n pour que $(1 + 1/8n).u_n$ soit une valeur approchée de L à 10^{-5} près?
Ecrire un algorithme permettant le calcul de cette valeur approchée et donner la valeur numérique obtenue avec toutes les décimales fournies par la calculatrice (*On peut montrer, ce que l'on ne demande pas, que : $L = 1/\sqrt{\pi}$).*

PARTIE II.

(A) PROMENADE ALEATOIRE SUR UNE DROITE.

Une droite est rapportée à un repère orthonormé $(O, \vec{i})$. Un individu se trouve à l'origine O à l'instant 0, et son abscisse à l'instant n ($n \in \mathbb{N}$) est une variable aléatoire X_n.
Pour tout entier $n \geq 1$, on pose: $A_n = X_n - X_{n-1}$. Ainsi: $X_n = A_1 + A_2 + ... + A_n$.
On suppose que les variables aléatoires A_n sont indépendantes et que l'on a pour tout entier $n \geq 1$:

$$P([A_n = 1]) = 1/2 \qquad \text{et} \qquad P([A_n = -1]) = 1/2$$

Enfin, pour $n \geq 1$, U_n est la variable aléatoire indiquant le nombre des passages à l'origine de l'individu entre les instants 1 et 2n compris.

1°) <u>CALCUL DU NOMBRE MOYEN DES RETOURS A L'ORIGINE.</u>

a) Quelle est la probabilité pour que l'individu se trouve de nouveau à l'origine à l'instant 2n? Peut-il etre à l'origine à un instant impair?

b) Pour $k \geq 1$, soit O_k la variable aléatoire égale à 1 si l'individu est à l'origine O à l'instant k et 0 sinon. Calculer les espérances $E(O_{2k})$ et $E(O_{2k+1})$.

c) Exprimer U_n à l'aide des variables aléatoires O_k ($1 \leq k \leq 2n$) et calculer l'espérance $E(U_n)$.

2°) ETUDE ASYMPTOTIQUE DU NOMBRE MOYEN DES RETOURS A L'ORIGINE.

a) Etablir par récurrence que l'on a: $E(U_n) = (2n + 1)C_{2n}^{n} / 4^{n} - 1$.

b) Exprimer $E(U_n)$ à l'aide de u_n; en déduire la limite de la suite $(E(U_n) / \sqrt{n})$ et, à l'aide de l'inégalité (1), la limite de la suite $(E(U_n) - 2L\sqrt{n})$.

B PROMENADE ALEATOIRE DANS LE PLAN.

Un plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Un individu se trouve à l'origine O à l'instant 0, et ses coordonnées à l'instant n ($n \in \mathbb{N}$) sont des variables aléatoires X_n et Y_n.

Pour tout entier $n \geq 1$, on pose: $A_n = X_n - X_{n-1}$, $B_n = Y_n - Y_{n-1}$.

On suppose:

1. que les variables aléatoires A_n (resp. B_n) sont indépendantes et que l'on a pour tout entier $n \geq 1$:

$$P([A_n = 1]) = 1/2 \quad \text{et} \quad P([A_n = -1]) = 1/2$$
$$P([B_n = 1]) = 1/2 \quad \text{et} \quad P([B_n = -1]) = 1/2$$

2. que les variables X_n et Y_n sont indépendantes pour tout entier $n \geq 1$.

Enfin, pour $n \geq 1$, V_n est la variable aléatoire indiquant le nombre des passages à l'origine de l'individu entre les instants 1 et 2n compris.

1°) CALCUL DU NOMBRE MOYEN DES RETOURS A L'ORIGINE.

a) Quelle est la probabilité pour que l'individu se trouve de nouveau à l'origine à l'instant 2n? Peut-il être à l'origine à un instant impair?

b) En raisonnant comme en A, calculer l'espérance $E(V_n)$.

2°) ETUDE ASYMPTOTIQUE DU NOMBRE MOYEN DES RETOURS A L'ORIGINE.

On rappelle les deux résultats classiques suivants:

- $\lim [(1 + 1/2 + 1/3 + \ldots + 1/n) / \ln(n)] = 1$.
- $\lim [1 + 1/4 + 1/9 + \ldots + 1/n^2]$ existe dans $\mathbb{R}$.

Déduire de l'inégalité (1) l'encadrement suivant:

$$0 < L^2/n - (C_{2n}^{n} / 4^{n})^2 < L^2/4n^2$$

En déduire la limite de la suite $(E(V_n) / \ln(n))$ quand n tend vers l'infini.

(C) PROMENADE ALEATOIRE DANS L'ESPACE.

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Un individu se trouve à l'origine O à l'instant 0, et ses coordonnées à l'instant n ($n \in \mathbb{N}$) sont des variables aléatoires X_n, Y_n, Z_n.
Pour tout entier $n \geq 1$, on pose: $A_n = X_n - X_{n-1}$, $B_n = Y_n - Y_{n-1}$, $C_n = Z_n - Z_{n-1}$.
On suppose:
1. que les variables aléatoires A_n (resp. B_n, resp. C_n)) sont indépendantes et que l'on a pour tout entier $n \geq 1$:

$$P([A_n = 1]) = 1/2 \quad \text{et} \quad P([A_n = -1]) = 1/2$$
$$P([B_n = 1]) = 1/2 \quad \text{et} \quad P([B_n = -1]) = 1/2$$
$$P([C_n = 1]) = 1/2 \quad \text{et} \quad P([C_n = -1]) = 1/2$$

2. que les variables X_n, Y_n et Z_n sont indépendantes pour tout entier $n \geq 1$.

Enfin, pour $n \geq 1$, W_n est la variable aléatoire indiquant le nombre des passages à l'origine de l'individu entre les instants 1 et 2n compris.

1°) CALCUL DU NOMBRE MOYEN DES RETOURS A L'ORIGINE.

a) Quelle est la probabilité pour que l'individu se trouve de nouveau à l'origine à l'instant 2n? Peut-il etre à l'origine à un instant impair?

b) En raisonnant comme en (A), calculer l'espérance $E(W_n)$.

2°) ETUDE ASYMPTOTIQUE DU NOMBRE MOYEN DES RETOURS A L'ORIGINE.

Dans toute la suite, n désigne un entier naturel non nul, et l'on convient de poser (sous réserve d'existence):

$$s = \sum_{k=1}^{+\infty} (C_{2k}^{k} / 4^{k})^{3} \qquad s_n = \sum_{k=1}^{n} (C_{2k}^{k} / 4^{k})^{3} \qquad r_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} (C_{2k}^{k} / 4^{k})^{3}$$

a) Résultats préliminaires.
A l'aide de l'inégalité des accroissements finis, établir pour $n \geq 1$ les inégalités suivantes:

(i) $$\frac{1}{(n+1)\sqrt{n+1}} \leq \frac{2}{\sqrt{n}} - \frac{2}{\sqrt{n+1}} \leq \frac{1}{n\sqrt{n}}.$$

(ii) $$\frac{1}{(n+1)^{2}.\sqrt{n+1}} \leq \frac{2}{3n\sqrt{n}} - \frac{2}{3(n+1)\sqrt{n+1}} \leq \frac{1}{n^{2}.\sqrt{n}}$$

et en déduire des encadrements des sommes suivantes (dont on justifiera l'existence):

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} 1/k\sqrt{k} \quad \text{et} \quad \sum_{k=n+1}^{+\infty} 1/k^{2}\sqrt{k}$$

b) Existence de $\lim(E(W_n))$.

Déduire de l'inégalité (1) la double inégalité suivante:

$$0 < L^3/n\sqrt{n} - (C_{2n}^n / 4^n)^3 < 3L^3/8n^2\sqrt{n}$$

Donner une majoration de $(C_{2n}^n / 4^n)^3$ et prouver l'existence de s, donc de $\lim(E(W_n))$. A l'aide d'une majoration de r_n, indiquer comment il suffit de choisir n pour que s_n soit une valeur approchée de s à 10-3 près.

c) Accélération de convergence et calcul approché de s.

A l'aide des résultats établis ci-dessus, montrer que:

$$0 \leq s_n + 2L^3/\sqrt{n} - s \leq 5L^3 / 4n\sqrt{n}$$

Comment suffit-il alors de choisir n pour que $s_n + 2L^3/\sqrt{n}$ soit une valeur approchée de s à 10-3 près? Ecrire un algorithme permettant le calcul de cette valeur approchée $s_n + 2L^3/\sqrt{n}$, et donner la valeur numérique obtenue.

D CONCLUSION

A l'aide des résultats obtenus dans le problème, comparer le nombre moyen des retours à l'origine pour les promenades aléatoires sur une droite, dans un plan et dans l'espace.

Note d'information concernant l'épreuve de maths II.

Il est rappelé aux candidats qui ne seraient pas habitués au traitement de texte utilisé pour la rédaction du problème que la notation a/b désigne le quotient $\frac{a}{b}$.

Exemples :

Question I.2°.c : l'inégalité (1) se lit : $\dfrac{Un}{8(n + \frac{1}{2})} \leq L - Un \leq \dfrac{L}{8n}$.

Question II.2°.a : E(Un) se lit : $E(Un) = \dfrac{(2n + 1).C_{2n}^{n}}{4^{n}} - 1$.

Enfin, dans les calculs numériques, une valeur approchée à 10-5 près désigne bien entendu une valeur approchée à 10^{-5} près.