ÉCOLE SUPÉRIEURE DES SCIENCES ÉCONOMIQUES ET COMMERCIALES

Etablissement Privé d'Enseignement Supérieur Reconnu par l'Etat

MATHEMATIQUES

2ème épreuve - (Coef. 4)

VENDREDI 25 MAI 1979 de 8 h à 12 h.

Les parties I - II (sauf II-5) et III sont indépendantes.

NOTATIONS

Si Z est une variable aléatoire, on note :

$E(Z)$ son espérance mathématique, $V(Z)$ sa variance, et, pour tout z réel, $P(Z=z)$ la probabilité que Z prenne la valeur z.

. $n \in \mathbb{N}$, $p \in]0,1[$, $\mathcal{B}(n,p)$ désigne la loi binomiale de paramètres n et p,

. $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{U}_n$ désigne la loi de probabilité d'une variable aléatoire réelle dont l'ensemble des valeurs prises est $\{0,1,\dots,n\}$, à chacune de ces valeurs étant associée la même probabilité $\frac{1}{n+1}$.

DONNEES

. Dans tout le problème, p désigne un nombre réel vérifiant $0 < p < 1$ (on notera $q = 1-p$).

. Dans les parties I et II seulement : n désignant un entier naturel supérieur ou égal à 1, un triplet (X,Y,N) de variables aléatoires réelles est défini par les conditions :

(1) N est une variable aléatoire discrète dont l'ensemble des valeurs prises est $\{0,1,2,\dots,n\}$.

on note, pour tout entier k tel que $0 \leqslant k \leqslant n$: $\alpha_k = P(N=k)$

pour tout x réel : $F(x) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k x^k$.

(2) Pour tout entier naturel k inférieur ou égal à n :

- la loi conditionnelle de X, sachant que $N = k$ est réalisé, est $\mathcal{U}_k$.
- la loi conditionnelle de Y, sachant que $N = k$ est réalisé, est $\mathcal{B}(k,p)$.

PARTIE I

1 $(i,k) \in \mathbb{N}^2$, calculer en fonction des données la probabilité de l'évènement : "$X=i$ et $N=k$". En déduire la loi de probabilité de la variable aléatoire X .

2. Calculer $E(X)$, $E(X^2)$, $V(X)$ en fonction de $E(N)$ et $V(N)$.
   Si X' désigne la variable aléatoire $N-X$, que valent $E(X')$ et $V(X')$?

3. Déterminer la loi de probabilité de N pour que la loi conditionnelle de N sachant que $X=0$ est réalisé, soit $\mathfrak{U}_n$.

   Cette condition étant satisfaite :

   - comparer les deux variables aléatoires N et $n-X$;
   - déterminer en fonction de n : $E(N)$, $V(N)$, $E(X)$, $V(X)$;
   - déterminer, pour tout i appartenant à $\{1,2,\dots,n\}$ la loi conditionnelle de N sachant que $X=i$ est réalisé.

4. On revient au cas général et l'on note, pour tout x réel : $G(x) = \sum_{i=0}^{n} P(X=i)x^i$

   Démontrer que, pour tout x différent de 1 :

$$G(x) = \frac{1}{x-1}\int_1^x F(t)dt .$$

PARTIE II

1. $(i,k) \in \mathbb{N}^2$, calculer en fonction des données la probabilité de l'évènement : "$Y=i$ et $N=k$". En déduire la loi de probabilité de la variable aléatoire Y .

2. Calculer $E(Y)$, $E(Y^2)$, $V(Y)$ en fonction de $E(N)$ et $V(N)$.
   Si Y' désigne la variable aléatoire $N-Y$, que valent $E(Y')$ et $V(Y')$?

3. q' appartenant à $]0,1[$, déterminer la loi de probabilité de N pour que la loi conditionnelle de N sachant que $Y=0$, soit $\mathfrak{B}(n,q')$.

   Cette condition étant satisfaite, déterminer en fonction de $q,p,p'=1-q'$

   a) la loi de probabilité de la variable aléatoire Y ;

   b) $E(N)$, $V(N)$, $E(Y)$, $V(Y)$;

.../...

c) pour tout $i \in \{1,2,\dots,n\}$ la loi conditionnelle de N sachant que $Y=i$ est réalisé.

4. On revient au cas général, et l'on note, pour tout x réel, $H(x) = \sum_{i=0}^{n} P(Y=i)x^i$

   Démontrer que, pour tout x réel : $H(x) = F(px+q)$.

5. Montrer que la loi de probabilité de X quand N suit la loi $\mathcal{B}(n,p)$ est égale à celle de Y quand N suit la loi $\mathcal{U}_n$.

   (on pourra utiliser les fonctions G et H).

PARTIE III

On note C_0 l'ensemble des applications continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$

C_∞ l'ensemble des applications indéfiniment dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$

et, pour tout λ réel, E_λ l'ensemble des éléments f de C_0 tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(px+q) = \lambda f(x).$$

1. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la donnée de u_0 réel et pour tout n entier naturel $u_{n+1} = p\,u_n+q$.

   Déterminer u_n en fonction de u_0. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et donner sa limite.

   Si $f\in E_\lambda$ exprimer $f(u_n)$ en fonction de λ et $f(u_0)$.

2. Soit λ réel tel que E_λ ne soit pas réduit à la seule fonction nulle.

   Montrer que nécessairement $|\lambda| < 1$ ou $\lambda = 1$.

   Déterminer E_1.

   Si $f\in E_\lambda$ et $\lambda \neq 1$, que vaut $f(1)$?

3. a) Montrer que, si $f\in E_\lambda \cap C_\infty$, il existe un entier naturel k tel que $f^{(k+1)}$ soit la fonction nulle (on pourra raisonner par l'absurde en remarquant que si $f\in E_\lambda$ alors pour tout entier n supérieur ou égal à 1, $f^{(n)} \in E_{\lambda/p^n}$).

   b) On suppose qu'il existe λ réel et f non constante tels que $f\in E_\lambda \cap C_\infty$.
   Soit n_0 le plus petit entier naturel tel que $f^{(n_0+1)}$ soit la fonction nulle.
   Montrer que $\lambda=p^{n_0}$, $f(1) = f'(1) = \dots = f^{(n_0-1)}(1) = 0$. Déterminer f.

c) En déduire, pour toute valeur de λ , $E_\lambda \cap C_\infty$.

4. Soit $\Phi : C_0 \longrightarrow C_0$ $\quad \forall x \neq 1 \quad h(x) = \dfrac{1}{x-1}\displaystyle\int_1^x f(t)dt$

$f \longmapsto h \qquad h(1) = f(1)$

a) Vérifier que, pour tout élément f de C_0 , $h = \Phi(f)$ appartient bien à C_0 , que $h = \Phi(f)$ est dérivable sur $\mathbb{R} - \{1\}$ et exprimer sa dérivée en fonctin de f et h .

Montrer que Φ est linéaire.

5. On dit que f élément de C_0 est propre pour Φ si $h = \Phi(f)$ est proportionnelle à f .

a) Montrer que, si f est propre pour Φ , g définie par : $\forall x \in \mathbb{R}$ $g(x) = f(px+q)$ l'est également.

b) Déterminer les fonctions propres pour Φ , non nulles (on cherchera leur restriction à chacun des intervalles $]-\infty , 1[,]1,+\infty[$ et on tiendra compte de leur nécessaire continuité au point 1).

c) En déduire que, pour tout λ appartenant à $]0,1]$, E_λ n'est pas réduit à la à la fonction nulle et donner un élément non nul de E_λ .

6. On suppose ici que $p=q=\frac{1}{2}$ et on considère la fonction f définie par :

$f(x) = \lambda^{-k} \times \sin\left[\dfrac{\pi}{2^k}(x-1)\right]$ si $x \in]1+2^k , 1+2^{k+1}]$ $\quad k \in \mathbb{Z}$, $\lambda \in \mathbb{R}^*$,

$f(1) = 0$,

$f(x) = f(2-x)$ si $x < 1$.

Vérifier que f est bien définie pour tout x réel. A quelle condition nécessaire et suffisante sur λ est-elle continue au point 1 ? λ étant ainsi choisi, montrer que f appartient à E_λ . En déduire, pour $p = \frac{1}{2}$ l'ensemble Λ des λ réels tels que E_λ ne soit pas réduit à la fonction nulle.

Que peut-on dire si $\lambda \in \Lambda - \{1\}$ de la dimension de E_λ ?
