Quelques remarques pour une bonne pratique du texte.

R1 Plus généralement si $n\in\mathbb{N}^*$ et si $F=\{a_1,a_2,\dots,a_n\}$ est un ensemble fini ayant n éléments on appelle dérangement de F toute permutation σ de F sans point fixe c'est à dire telle que $\forall i\in[\![1,n]\!]$, $\sigma(a_i)\neq a_i$.

R2 Par convention $d_{0,0}=1$.

R3 Pour n dans $\mathbb{N}^*$ et pour ℓ dans $[\![0,n]\!]$, $d_{n,\ell}$ est le nombre de permutations d'un ensemble fini de cardinal n, ayant ℓ points fixes.

R4 Dans II nous étendons la définition de X_n $(n\geq 2\,!)$ à X_1 et par convention nous définissons X_0 comme la variable aléatoire sur $(\Omega,\mathcal{P}(\Omega))$ constante et égale à 1.

R5 Dans I 3 il est préférable de définir $\tilde{\omega}_j$ à partir de j dans $[\![1,n]\!]$ et d'une permutation quelconque ω de E_n. On suppose alors que dans a) ω est un dérangement et dans b) ω admet un point fixe et un seul j.

R6 dans I Q4 nous définissons u_n pour tout n dans $\mathbb{N}^*$ et v_n pour tout n dans $\mathbb{N}$.

de plus possible nous optimiserons la validation des résultats.

PARTIE I

Q1 $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $\omega \in \Omega$

- Si I est l'ensemble des points fixes de ω : $\ast$ $\omega_{|I} = Id_I$
  $\ast$ $\omega_{|E_n \setminus I}$ est un dérangement de $E_n \setminus I$

- Réciproquement si I est une partie de $[\![1, n]\!]$ telle que $\ast$ $\omega_{|I} = Id_I$
  $\ast$ $\omega_{|E_n \setminus I}$ est un dérangement de $E_n \setminus I$

alors I est l'ensemble des points fixes de ω.

Soit $k \in [\![0, n]\!]$. Ce qui précède permet alors d'écrire que :

$$D_{n,k} = \{\omega \in \Omega \mid \exists I \in \mathcal{P}(E_n),\ \operatorname{card} I = k,\ \omega_{|I} = Id_I,\ \omega_{|E_n \setminus I} \text{ est un dérangement de } E_n \setminus I\}$$

Alors $$\underline{\underline{D_{n,k} = \bigcup_{\substack{I \subset E_n \\ \operatorname{card}(I) = k}} \{\omega \in \Omega \mid \omega_{|I} = Id_I,\ \omega_{|E_n \setminus I} \text{ est un dérangement de } E_n \setminus I\}}}.$$

Q2 Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in [\![0, n]\!]$.

L'union précédente étant constituée d'ensembles deux à deux disjoints :

$$\operatorname{card}(D_{n,k}) = \sum_{\substack{I \subset E_n \\ \operatorname{card}(I) = k}} \operatorname{card} \{\omega \in \Omega \mid \omega_{|I} = Id_I,\ \omega_{|E_n \setminus I} \text{ est un dérangement de } E_n \setminus I\}.$$

Soit I une partie de E_n telle que $\operatorname{card}(I) = k$. Supposons $k < n$.

Posons $\mathcal{S}_I = \{\omega \in \Omega \mid \omega_{|I} = Id_I \text{ et } \omega_{|E_n \setminus I} \text{ est un dérangement de } E_n \setminus I\}$.

Construire un élément de $\mathcal{S}_I$ revient à construire sa restriction à $E_n \setminus I$ donc à construire un dérangement de $E_n \setminus I$.

Comme $\operatorname{card}(E_n \setminus I) = n - k$, $\operatorname{card} \mathcal{S}_I = d_{n-k,0}$; ceci reste vrai pour $k = n$ car $\mathcal{S}_I = \{Id_{E_n}\}$ et $d_{0,0} = 1$.

convention de R2

Alors $$\operatorname{card}(D_{n,k}) = \sum_{\substack{I \subset E_n \\ \operatorname{card}(I) = k}} d_{n-k,0}.$$

le nombre de parties I de E_n telles que $\operatorname{card}(I) = k$ est $\binom{n}{k}$.

Ainsi $\operatorname{card} D_{n,k} = \binom{n}{k} d_{n-k}$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall k \in [\![0,n]\!], d_{n,k} = \binom{n}{k} d_{n-k,0}$

mieux $\forall n \in \mathbb{N}, \forall k \in [\![0,n]\!], d_{n,k} = \binom{n}{k} d_{n-k,0}$. ($d_{0,0} = 1$ et $\binom{0}{0} = 1$).

Dans cette question $n \in \mathbb{N}^*$.

Q3 a) Soit ω un dérangement de E_n. Montrons que $\tilde{\omega}_j$ est un dérangement de E_{n+1}.

- ω est une application de $[\![1,n]\!]$ dans $[\![1,n]\!]$ donc $\tilde{\omega}_j$ est une application de $[\![1,n+1]\!]$ dans $[\![1,n+1]\!]$.

- $\tilde{\omega}_j([\![1,n+1]\!]) = \tilde{\omega}_j([\![1,n]\!]-\{j\} \cup \{j,n+1\}) = \tilde{\omega}_j([\![1,n]\!]-\{j\}) \cup \tilde{\omega}_j(\{j,n+1\})$.

  $\tilde{\omega}_j([\![1,n+1]\!]) = \omega([\![1,n]\!]-\{j\}) \cup \{\omega(j), n+1\}$.

  ω est une bijection de $[\![1,n]\!]$ sur $[\![1,n]\!]$ telle que $\omega(j) \neq j$ (ω est un dérangement)

  donc $\omega([\![1,n]\!]-\{j\}) = [\![1,n]\!] - \{\omega(j)\}$.

  Alors $\tilde{\omega}_j([\![1,n+1]\!]) = ([\![1,n]\!] - \{\omega(j)\}) \cup \{\omega(j), n+1\} = [\![1,n+1]\!]$.

  $\tilde{\omega}_j$ est donc une surjection de $[\![1,n+1]\!]$ sur $[\![1,n+1]\!]$ donc $\tilde{\omega}_j$ est une bijection de $[\![1,n+1]\!]$ sur $[\![1,n+1]\!]$ ($[\![1,n+1]\!]$ est fini...) donc une permutation de $[\![1,n+1]\!]$.

- Supposons que $\tilde{\omega}_j$ possède un point fixe k. $k \in [\![1,n+1]\!]$ et $\tilde{\omega}_j(k) = k$.

  Par définition de $\tilde{\omega}_j$, k n'est ni j ni $n+1$.

  Alors $k \in [\![1,n]\!]-\{j\}$ et $\omega(k) = \tilde{\omega}_j(k) = k$; k est un point fixe du dérangement ω !

  Alors $\tilde{\omega}_j$ n'a pas de point fixe.

Ainsi $\underline{\tilde{\omega}_j \text{ est un dérangement de } E_{n+1}}$.

b) ω est un élément de $\mathcal{S}$ ayant un point fixe j et un seul.

- $\tilde{\omega}_j$ est toujours une application de $[\![1,n+1]\!]$ dans $[\![1,n+1]\!]$.
- $\tilde{\omega}_j([\![1,n+1]\!]) = \omega([\![1,n]\!]-\{j\}) \cup \{n+1, \omega(j)\} = \omega([\![1,n]\!]-\{j\}) \cup \{n+1, j\}$

car $\omega(j)=j$ et ω est une bijection de $[\![1,n]\!]$ sur $[\![1,n]\!]$. Ainsi $\omega([\![1,n]\!]-\{j\}) = [\![1,n]\!]-\{j\}$.

Alors $\tilde{\omega}_j([\![1,n+1]\!]) = ([\![1,n]\!]-\{j\}) \cup \{n+1, j\} = [\![1,n+1]\!]$.

$\tilde{\omega}_j$ est encore une application surjective de $[\![1,n+1]\!]$ sur $[\![1,n+1]\!]$ donc une bijection de $[\![1,n+1]\!]$ sur $[\![1,n+1]\!]$ car $[\![1,n+1]\!]$ est un ensemble fini.

- Supposons que : $\exists k \in [\![1,n+1]\!]$, $\tilde{\omega}_j(k) = k$.

Par construction $k \neq j$ et $k \neq n+1$ donc $k \in [\![1,n]\!]-\{j\}$.

Mais alors $k \neq j$ et $\omega(k) = \tilde{\omega}_j(k) = k$! ceci est impossible car j est le seul point fixe de ω.

Ainsi $\tilde{\omega}_j$ n'a pas de point fixe.

<u>$\tilde{\omega}_j$ est un dérangement de $[\![1,n+1]\!]$.</u>

c) Posons pour tout j dans $[\![1,n]\!]$, $\mathcal{S}_1^j = \{\tilde{\omega}_j \; ; \; \omega \in D_{n,0}\}$ et

$\mathcal{S}_2^j = \{\tilde{\omega}_j \; ; \; \omega \in D_{n,1}$ et $\omega(j)=j\}$. Posons encore $\mathcal{S}_1 = \bigcup_{j=1}^{n} \mathcal{S}_1^j$ et $\mathcal{S}_2 = \bigcup_{j=1}^{n} \mathcal{S}_2^j$

ce qui précède indique que $\mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2 \subset D_{n+1,0}$.

- Soit $\sigma \in \mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2$. $\exists (j,j') \in [\![1,n]\!]^2$, $\exists \omega \in D_{n,0}$, $\exists \omega' \in D_{n,1}$,

$\omega'(j')=j'$ et $\sigma = \tilde{\omega}_j = \tilde{\omega}'_{j'}$.

$\sigma(n+1) = \tilde{\omega}_j(n+1) = \omega(j)$ et $\sigma(n+1) = \tilde{\omega}'_{j'}(n+1) = j'$; $\omega(j) = j'$ donc $j' \neq j$ car ω est un dérangement.

Alors $\sigma(j') = \tilde{\omega}_j(j') = \omega(j')$ et $\sigma(j') = \tilde{\omega}'_{j'}(j') = n+1$; $\omega(j') = n+1$; ce qui est impossible car $\omega(j') \in [\![1,n]\!]$.

- Soit $\sigma \in S_1^{j} \cap S_1^{j'}$ avec $(j,j') \in [\![1,n]\!]^2$ et $j \neq j'$. Il existe deux dérangements ω et ω' de E_n tels que : $\sigma = \tilde{\omega}_j = \tilde{\omega}'_{j'}$.

  $\sigma(j) = \tilde{\omega}_j(j) = n+1$ et $\sigma(j') = \tilde{\omega}'_{j'} = n+1$; $\sigma(j) \neq \sigma(j')$ donc $j \neq j'$!!

  Ainsi $\forall (j,j') \in [\![1,n]\!]^2,\ j \neq j' \Rightarrow S_1^{j} \cap S_1^{j'} = \emptyset$.

- On montre de même que : $\forall (j,j') \in [\![1,n]\!]^2, j \neq j' \Rightarrow S_2^{j} \cap S_2^{j'} = \emptyset$.

- Notons enfin que $D_{n+1,0} \subset S_1 \cup S_2$.

  σ est un dérangement

  Soit $\sigma \in D_{n+1,0}$. $\exists! j \in [\![1,n+1]\!], \sigma(j) = n+1$. $\sigma(n+1) \neq n+1$ donc $j \in [\![1,n]\!]$.

  Envisageons deux cas.

  <u>1er cas</u> : $\sigma(n+1) \neq j$. Posons $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $\omega(k) = \begin{cases} \sigma(k) & \text{si } k \neq j \\ \sigma(n+1) & \text{si } k = j \end{cases}$

  ω est une application de $[\![1,n]\!]$ dans $[\![1,n]\!]$.

  $\omega([\![1,n]\!]) = \sigma([\![1,n]\!] - \{j\}) \cup \{\sigma(n+1)\} = (\sigma([\![1,n]\!]) - \{\sigma(j)\}) \cup \{\sigma(n+1)\}$

  $\omega([\![1,n]\!]) = \sigma([\![1,n+1]\!]) - \{\sigma(j)\} = [\![1,n+1]\!] - \{n+1\} = [\![1,n]\!]$.

  ω est une application surjective de $[\![1,n]\!]$ sur $[\![1,n]\!]$ donc une bijection de $[\![1,n]\!]$ sur $[\![1,n]\!]$. Montrons que ω est un dérangement de $[\![1,n]\!]$.

  Supposons que : $\exists \ell \in [\![1,n]\!], \omega(\ell) = \ell$.

  Si $\ell \neq j$: $\ell = \omega(\ell) = \sigma(\ell)$; $\ell = \sigma(\ell)$!

  Si $\ell = j$: $j = \ell = \omega(\ell) = \sigma(n+1)$ ce qui est impossible.

  ω est un dérangement de E_n et par définition de ω : $\tilde{\omega}_j = \sigma$; $\sigma \in S_1$.

<u>2ième cas..</u> $\sigma(n+1)=j$ Posons $\forall \ell \in [\![1,n]\!]$, $\omega(\ell)=\begin{cases}\sigma(\ell) & \text{si } \ell \neq j\\ j & \text{si } \ell=j\end{cases}$.

$\omega([\![1,n]\!])=\left(\sigma([\![1,n]\!]-\{j\})\right)\cup\{j\}=\left(\sigma([\![1,n]\!])-\{\sigma(j)\}\right)\cup\{j\}$
$=\left(\left([\![1,n+1]\!]-\{j\}\right)-\{n+1\}\right)\cup\{j\}=[\![1,n]\!]$.

ω est alors une application surjective de $[\![1,n]\!]$ sur $[\![1,n]\!]$ donc une bijection de $[\![1,n]\!]$ sur $[\![1,n]\!]$. ω est une permutation de E_n. Montrons que j est le seul point fixe de ω.

Soit $\ell\in[\![1,n]\!]-\{j\}$ tel que $\omega(\ell)=\ell$. Alors $\sigma(\ell)=\omega(\ell)=\ell$!

ω est une permutation de E_n ayant j comme seul point fixe ;

Il est clair que $\tilde{\omega}_j=\sigma$ par construction de ω.

Alors $\sigma\in\mathcal{S}_2$.

Ainsi $D_{n+1,0}\subset\mathcal{S}_1\cup\mathcal{S}_2$. Mieux $D_{n+1,0}=\mathcal{S}_1\cup\mathcal{S}_2$.

<u>les dérangements de E_{n+1} construits dans 3.a) et 3.b) sont distincts et tout dérangement de E_{n+1} peut être obtenu de cette façon.</u>

<u>d)</u> $d_{n+1,0}=\operatorname{card}D_{n+1,0}=\operatorname{card}\mathcal{S}_1+\operatorname{card}\mathcal{S}_2=\sum_{i=1}^{n}\operatorname{card}\mathcal{S}_1^i+\sum_{i=1}^{n}\operatorname{card}\mathcal{S}_2^i$

$\forall i\in[\![1,n]\!]$, $\operatorname{card}\mathcal{S}_1^i=\operatorname{card}D_{n,0}$ ($\omega\mapsto\tilde{\omega}_j$ est une bijection de $D_{n,0}$ sur $\mathcal{S}_1^i$).

$\forall i\in[\![1,n]\!]$, $\operatorname{card}\mathcal{S}_2^i=\operatorname{card}D_{n-1,0}$ (il y a autant d'éléments dans $\mathcal{S}_2^i$ que de permutations de E_n ayant j pour seul point fixe).

Alors $d_{n+1,0}=\sum_{i=1}^{n}\operatorname{card}D_{n,0}+\sum_{i=1}^{n}\operatorname{card}D_{n-1,0}=n(d_{n,0}+d_{n-1,0})$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad d_{n+1,0} = n(d_{n,0} + d_{n-1,0})$.

(Q4) Posons $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = d_{n,0} - n\, d_{n-1,0}$

a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $u_{n+1} = d_{n+1,0} - (n+1)\, d_{n,0} = n(d_{n,0} + d_{n-1,0}) - (n+1) d_{n,0}$

$u_{n+1} = n\, d_{n-1,0} - d_{n,0} = -u_n$; $(u_n)_{n \geqslant 1}$ est une suite géométrique

de raison -1 et de premier terme $u_1 = d_{1,0} - 1 \times d_{0,0} = 0 - 1 \times 1 = -1$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = (-1)^{n-1} u_1 = (-1)^n$. $\quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \; u_n = (-1)^n$.

b) $\forall n \in \mathbb{N}^*, \; u_n = (-1)^n$; $\forall n \in \mathbb{N}^*, \; d_{n,0} - n\, d_{n-1,0} = (-1)^n$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \; d_{n,0} = n\, d_{n-1,0} + (-1)^n$.

c) $\forall n \in \mathbb{N}^*, \; v_n = \dfrac{d_{n,0}}{n!} = \dfrac{d_{n-1,0}}{(n-1)!} + \dfrac{(-1)^n}{n!} = v_{n-1} + \dfrac{(-1)^n}{n!}$.

$\forall k \in \mathbb{N}^*, \; v_k - v_{k-1} = \dfrac{(-1)^k}{k!}$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \; \displaystyle\sum_{\ell=1}^{n} (v_\ell - v_{\ell-1}) = \sum_{\ell=1}^{n} \frac{(-1)^\ell}{k!}$. $\quad v_n - v_0 = \displaystyle\sum_{\ell=1}^{n} \frac{(-1)^\ell}{\ell!}$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \; v_n = \displaystyle\sum_{\ell=1}^{n} \frac{(-1)^\ell}{\ell!} + v_0$ et $v_0 = \dfrac{d_{0,0}}{0!} = 1$.

Alors $\forall n \in \mathbb{N}^*, \; v_n = \displaystyle\sum_{\ell=0}^{n} \frac{(-1)^\ell}{\ell!}$; mieux $\forall n \in \mathbb{N}, \; v_n = \displaystyle\sum_{\ell=0}^{n} \frac{(-1)^\ell}{\ell!}$.

Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}, \; d_{n,0} = n! \displaystyle\sum_{\ell=0}^{n} \frac{(-1)^\ell}{\ell!}$.

PARTIE II

Rappelons que $\forall n \in \mathbb{N}$, $d_{n,0} = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$ avec la convention $d_{0,0} = 1$

Par convention X_0 désignera la variable certaine égale à 1.

(Q1) a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $X_n(\Omega) = [\![0, n]\!]$.

$$\forall k \in [\![0,n]\!],\ P(X_n = k) = \frac{\text{card}\{\omega \in \Omega \mid X_n(\omega) = k\}}{\text{card}\,\Omega} = \frac{\text{card}\, D_{n,k}}{\text{card}\,\Omega} = \frac{d_{n,k}}{n!}$$

$$\forall k \in [\![0,n]\!],\ P(X_n = k) = \frac{\binom{n}{k} d_{n-k,0}}{n!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}\frac{1}{n!} d_{n-k} = \frac{1}{k!(n-k)!}(n-k)! \sum_{i=0}^{n-k} \frac{(-1)^i}{i!}$$

$$\forall k \in [\![0,n]\!],\ P(X_n = k) = \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{n-k} \frac{(-1)^i}{i!}.$$ ceci vaut encore pour $n = 0$.

b) Soit $n \in \mathbb{N}$ $\sum_{k=0}^{n} P(X_n = k) = 1$ donc $\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{k!}\sum_{i=0}^{n-k}\frac{(-1)^i}{i!}\right) = 1$.

$$1 = \sum_{k=0}^{n}\sum_{i=0}^{n-k}\frac{1}{k!}\frac{(-1)^i}{i!} = \sum_{\substack{0 \le k \le n \\ 0 \le i \le n-k}} \frac{1}{k!}\frac{(-1)^i}{i!} = \sum_{\substack{0 \le k \le n \\ k \le n-i \le n}} \frac{1}{k!}\frac{(-1)^i}{i!} = \sum_{\substack{0 \le i \le n \\ 0 \le k \le n-i}} \frac{1}{k!}\frac{(-1)^i}{i!}$$

$$1 = \sum_{i=0}^{n}\sum_{k=0}^{n-i}\frac{1}{k!}\frac{(-1)^i}{i!} = \sum_{i=0}^{n}\frac{(-1)^i}{i!}\sum_{k=0}^{n-i}\frac{1}{k!}.$$

Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\sum_{i=0}^{n-k}\frac{(-1)^i}{i!} = \sum_{i=0}^{n}\frac{(-1)^i}{i!}\sum_{k=0}^{n-i}\frac{1}{k!} = 1.$

(Q2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$E(X_n) = \sum_{k=0}^{n} k\,P(X_n = k) = \sum_{k=0}^{n}\frac{k}{k!}\sum_{i=0}^{n-k}\frac{(-1)^i}{i!} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k-1)!}\sum_{i=0}^{n-k}\frac{(-1)^i}{i!}.$$

$$E(X_n) = \sum_{\ell=1}^{n} \frac{1}{(\ell-1)!} \sum_{i=0}^{n-\ell} \frac{(-1)^i}{i!} \underset{\ell \mapsto \ell+1}{=} \sum_{\ell=0}^{n-1} \frac{1}{\ell!} \sum_{i=0}^{n-(\ell+1)} \frac{(-1)^i}{i!} = \sum_{\ell=0}^{n-1} \frac{1}{\ell!} \sum_{i=0}^{n-1-\ell} \frac{(-1)^i}{i!} = 1$$

En appliquant Q1 b) à "n-1"

$\underline{\underline{E(X_n) = 1.}}$ ceci vaut encore pour $n=0$.

Si $n=1$. $X_n(X_n-1)(\Omega) = \{0\}$ donc $V(X_n(X_n-1)) = 0$.

Supposons $n \geqslant 2$.

$$E(X_n(X_n-1)) = \sum_{\ell=0 \text{ ou } 2}^{n} \frac{\ell(\ell-1)}{\ell!} \sum_{i=0}^{n-\ell} \frac{(-1)^i}{i!} = \sum_{\ell=2}^{n} \frac{1}{(\ell-2)!} \sum_{i=0}^{n-k} \frac{(-1)^i}{i!} \underset{k \mapsto \ell+2}{=} \sum_{i=0}^{n-2} \frac{1}{\ell!} \sum_{i=0}^{(n-2)-k} \frac{(-1)^i}{i!}$$

En appliquant de nouveau Q1 b) cette fois pour "n-2" on obtient :

$E(X_n(X_n-1)) = 1$. Alors $V(X_n) = E(X_n(X_n-1)) + E(X_n) - (E(X_n))^2 = 1+1-1^2 = 1$.

$\underline{V(X_n) = 1.}$

Si $n=1$. $V(X_n) = E(X_n(X_n-1)) + E(X_n) - (E(X_n))^2 = 0+1-1 = 0$.

$\underline{\underline{V(X_0) = V(X_1) = 0 \text{ et } \forall n \in [\![2, +\infty[\![, \ V(X_n) = 1.}}$

Q3 a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Si X_n prend la valeur k, l'entreprise perçoit nb euros et a dépensé kB ; le coût est alors de $nb - kB$ euros.

Ainsi $\underline{\underline{C_n = nb - BX_n}}$

$E(C_n) = nb - B\,E(X_n) = nb - B$.

$\underline{\underline{E(C_n) = nb - B.}}$

$\sigma(C_n) = \sqrt{V(C_n)} = \sqrt{V(nb - BX_n)} = \sqrt{B^2 V(X_n)} = B\sigma(X_n)$.

$$\sigma(C_n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n=1 \\ B & \text{si } n \geqslant 2 \end{cases}$$

b) Sans doute vise les concepteurs du jeux !

(Q4) Notons Y_n la variable aléatoire égale à 1 si l'acheteur a acquis un produit (au hasard) qui lui a permis de gagner et 0 sinon.

$(\{X_n=\ell\})_{\ell\in[\![0,n]\!]}$ est un système complet d'événements.

La formule des probabilités totales donne : $P(Y_n=1)=\sum_{\ell=0}^{n} P(Y_n=1/X_n=\ell)\,P(X_n=\ell)$

$P(Y_n=1) = \sum_{\ell=0}^{n} \frac{\ell}{n} P(X_n=\ell) = \frac{1}{n} E(X_n) = \frac{1}{n}$.

$P(Y_n=1)=\frac{1}{n}$.

Si Y_n prend la valeur 1 (resp. 0) le gain de l'acheteur est $B-b$ (resp. $-b$)

Ainsi $G_n = BY_n - b$.

$E(G_n) = B\,E(Y_n) - b$; $E(G_n) = \frac{1}{n}B - b$.

PARTIE III

(Q1) Soit $k\in\mathbb{N}$.

$\forall n\in\mathbb{N}\cap[\![k,+\infty[\![$, $P(X_n=k) = \frac{1}{k!}\sum_{i=0}^{n-k}\frac{(-1)^i}{i!}$ et $\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=0}^{n-k}\frac{(-1)^i}{i!} = e^{-1}$.

Alors $\lim_{n\to+\infty} P(X_n=\ell) = \frac{1}{\ell!}e^{-1}$.

$\forall k\in\mathbb{N}$, $\lim_{n\to+\infty} P(X_n=\ell) = \frac{1^k}{\ell!}e^{-1}$. (X_n) converge en loi vers une variable aléatoire qui suit une loi de Poisson de paramètre 1.

(Q2) Soit $n \in \mathbb{N}$.
Soit $\ell \in [\![0,n]\!]$.

$$|P(X_n=\ell) - \frac{e^{-1}}{\ell!}| = |\frac{1}{\ell!}\sum_{i=0}^{n-\ell}\frac{(-1)^i}{i!} - \frac{1}{\ell!}\sum_{i=0}^{+\infty}\frac{(-1)^i}{i!}| = |-\frac{1}{\ell!}\sum_{i=n-\ell+1}^{+\infty}\frac{(-1)^i}{i!}|$$

Ainsi $\forall \ell \in [\![0,n]\!]$, $|P(X_n=\ell) - \frac{e^{-1}}{\ell!}| = |\frac{1}{\ell!}\sum_{i=n-\ell+1}^{+\infty}\frac{(-1)^i}{i!}|$.

(Q3) Soit $m \in \mathbb{N}^*$ et soit $r \in [\![m+1,+\infty[\![$.

$$\sum_{i=m}^{r}\frac{1}{i!} = \frac{1}{m!}\left[\sum_{i=m}^{r}\frac{m!}{i!}\right] = \frac{1}{m!}\left[1+\sum_{i=m+1}^{r}\frac{m!}{i!}\right].$$

Soit $i \in [\![m+1,r]\!]$. $\quad i! = m!\prod_{\ell=m+1}^{i}\ell \geqslant m!\prod_{\ell=m+1}^{i}(m+1) = m!\,(m+1)^{i-m} > 0$

Donc $\quad \frac{1}{i!} \leqslant \frac{1}{m!\,(m+1)^{i-m}}$; $\frac{m!}{i!} \leqslant \frac{1}{(m+1)^{i-m}}$.

Alors $\sum_{i=m}^{r}\frac{1}{i!} \leqslant \frac{1}{m!}\left[1+\sum_{i=m+1}^{r}\frac{1}{(m+1)^{i-m}}\right] = \frac{1}{m!}\sum_{i=m}^{r}\frac{1}{(m+1)^{i-m}} = \frac{1}{m!}\sum_{\ell=0}^{r-m}\frac{1}{(m+1)^{\ell}}$

$|\frac{1}{m+1}| < 1$ car $m+1 \geqslant 2$ donc la série de terme général $\frac{1}{(m+1)^{\ell}}$ converge.

Alors, en faisant tendre r vers $+\infty$ il vient : $\sum_{i=m}^{+\infty}\frac{1}{i!} \leqslant \frac{1}{m!}\sum_{\ell=0}^{+\infty}\frac{1}{(m+1)^{\ell}}$.

$$\forall m \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{i=m}^{+\infty}\frac{1}{i!} \leqslant \frac{1}{m!}\sum_{\ell=0}^{+\infty}\frac{1}{(m+1)^{\ell}}.$$

Or $\forall m \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{\ell=0}^{+\infty}\frac{1}{(m+1)^{\ell}} = \frac{1}{1-\frac{1}{m+1}} = \frac{m+1}{m} \leqslant 2$.

Alors $\forall m \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{i=m}^{+\infty}\frac{1}{i!} \leqslant \frac{1}{m!}\sum_{\ell=0}^{+\infty}\frac{1}{(m+1)^{\ell}} \leqslant \frac{2}{m!}$.

(Q4) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $\ell \in [\![0,n]\!]$.

Notons que $n-\ell+1 \geqslant 1$. Donc $\displaystyle\sum_{i=n-\ell+1}^{+\infty} \frac{1}{i!} \leqslant \frac{2}{(n-\ell+1)!}$.

$$\forall r \in [\![n-\ell+1,+\infty[\![,\ \left|\frac{1}{\ell!}\sum_{i=n-\ell+1}^{r}\frac{(-1)^i}{i!}\right| \leqslant \frac{1}{\ell!}\sum_{i=n-\ell+1}^{r}\left|\frac{(-1)^i}{i!}\right| = \frac{1}{\ell!}\sum_{i=n-\ell+1}^{r}\frac{1}{i!}$$

En faisant tendre r vers $+\infty$ on obtient :

$$\left|P(X_n=\ell)-\frac{e^{-1}}{\ell!}\right| = \left|\frac{1}{\ell!}\sum_{i=n-\ell+1}^{+\infty}\frac{(-1)^i}{i!}\right| \leqslant \frac{1}{\ell!}\sum_{i=n-\ell+1}^{+\infty}\frac{1}{i!} \leqslant \frac{2}{\ell!\,(n-\ell+1)!}.$$

Alors $\displaystyle\sum_{\ell=0}^{n}\left|P(X_n=\ell)-\frac{e^{-1}}{\ell!}\right| \leqslant \sum_{\ell=0}^{n}\frac{2}{\ell!\,(n-\ell+1)!} = \frac{1}{(n+1)!}\sum_{\ell=0}^{n}\frac{2(n+1)!}{\ell!\,(n-\ell+1)!}$.

$$\sum_{\ell=0}^{n}\left|P(X_n=\ell)-\frac{e^{-1}}{\ell!}\right| \leqslant \frac{2}{(n+1)!}\sum_{\ell=0}^{n}\binom{n+1}{\ell} \leqslant \frac{2}{(n+1)!}\sum_{\ell=0}^{n+1}\binom{n+1}{\ell} = \frac{2}{(n+1)!}\times 2^{n+1}.$$

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{\ell=0}^{n}\left|P(X_n=\ell)-\frac{e^{-1}}{\ell!}\right| \leqslant \frac{2^{n+2}}{(n+1)!}$ ... ceci vaut encore pour $n=0$.

(Q5) a) Un passage dans la boucle donne à x la valeur $2\times(2/2) = \frac{2^2}{2!}$

deux passages dans la boucle donnent à x la valeur $\frac{2^2}{2!}\times\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{2^3}{3!}$ ...

clairement j passages dans la boucle donnent à x la valeur $\dfrac{2^{j+1}}{(j+1)!}$.

ce que peut aisément confirmer une récurrence simple ... mais bien posée.

b) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = \dfrac{2^{n+2}}{(n+2)!} = \dfrac{2}{n+2}\,u_n \leqslant u_n$; $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante.

$(u_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante et minorée par 0 donc converge.

Notons ℓ sa limite. $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{2}{n+2}u_n$ donc en faisant tendre n vers $+\infty$ il vient : $\ell = 0\times\ell$; $\ell = 0$. $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est convergente et a pour limite 0.

c) $\lim_{n\to+\infty} \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} = 0$. Alors $\exists p \in \mathbb{N}^*$, $\forall n \in [\![p, +\infty[\![$, $\frac{2^{n+1}}{(n+1)!} \leqslant \frac{0,00001}{2}$

$\{j \in \mathbb{N}^* \mid \frac{2^{j+1}}{(j+1)!} \leqslant \frac{0,00001}{2}\}$ est une partie non vide de $\mathbb{N}^*$ qui possède

donc un plus petit élément j_0. $j_0 \geqslant 2$ car $\frac{2^2}{2!} > \frac{0,00001}{2}$.

$\forall j \in [\![1, j_0-1]\!]$, $\frac{2^{j+1}}{(j+1)!} > \frac{0,00001}{2}$ et $\frac{2^{j_0+1}}{(j_0+1)!} \leqslant \frac{0,00001}{2}$.

Alors la boucle While se termine après j_0 "passages" dans la boucle.

d) En fait la valeur affichée par la dernière ligne est 14 !!

Elle représente le plus petit élément n de $\mathbb{N}^*$ tel que $\frac{2^{n-1}}{(n-1)!} \leqslant \frac{0,00001}{2}$

ou le plus petit élément n de $\mathbb{N}^*$ tel que $\frac{2^n}{(n-1)!} \leqslant 0,00001$.

PARTIE IV

(Q1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $k \in [\![n+1, +\infty[\![$. $k-1 \geqslant n$.

rappelons que $X_n(\Omega) = [\![0, n]\!]$.

Alors l'une des variables aléatoires $X_n, X_n-1, \dots, X_n-k+1$ prend la valeur 0.

Donc $(X_n(X_n-1)\cdots(X_n-k+1))(\Omega) = \{0\}$.

Ainsi $E(X_n(X_n-1)\cdots(X_n-\ell+1)) = 0$; $m_\ell(X_n) = 0$

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall k \in [\![n+1, +\infty[\![, m_\ell(X_n) = 0$. Si $n=0$ $\forall k \in [\![2, +\infty[\![, m_\ell(X_n) = 0$.

(Q2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in [\![0, n]\!]$.

$m_\ell(X_n) = \sum_{i=0}^{n} i(i-1)\cdots(i-\ell+1)\, P(X_n = i) = \sum_{i=0}^{n} \frac{i!}{(i-\ell)!} P(X_n = i)$

$m_\ell(X_n) = \sum_{i=k}^{n} \frac{i!}{(i-k)!} \frac{1}{i!} \sum_{\ell=0}^{n-i} \frac{(-1)^\ell}{\ell!} \underset{j=i-k}{=} \sum_{j=0}^{n-k} \frac{1}{j!} \sum_{\ell=0}^{n-k-j} \frac{(-1)^\ell}{\ell!} = \sum_{j=0}^{n-\ell} P(X_{n-k} = j)$

$$m_\ell(X_n) = \sum_{j=0}^{n-\ell} P(X_{n-\ell}=j) = 1.$$

Ceci vaut encore pour $n=0$ car $m_0(X_0) = 1 = \sum_{j=0}^{0-0} P(X_{0-0}=j)$!

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall \ell \in [\![0,n]\!],\ m_\ell(X_n) = \sum_{j=0}^{n-\ell} P(X_{n-\ell}=j) = 1.$$

(Q3) Supposons que $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$. $m_0(Z) = 1$.

Soit $\ell \in \mathbb{N}^*$. Soit $i \in \mathbb{N}$

$$i(i-1)\cdots(i-\ell+1) P(Z=i) = i(i-1)\cdots(i-\ell+1)\frac{\lambda^i}{i!}e^{-\lambda} = \begin{cases} 0 \text{ si } i \in [\![0,\ell-1]\!] \\ \dfrac{1}{(i-\ell)!}\lambda^i e^{-\lambda} \text{ si } i \in [\![\ell,+\infty[\![\end{cases}.$$

$$\forall i \in [\![\ell,+\infty[\![,\ i(i-1)\cdots(i-\ell+1)P(Z=i) = \lambda^\ell e^{-\lambda}\frac{\lambda^{i-\ell}}{(i-\ell)!}.$$

La série de terme général $i(i-1)\cdots(i-\ell+1)P(Z=i)$ est alors convergente car la série de terme général $\frac{\lambda^{i-\ell}}{(i-\ell)!}$ converge. Ainsi la série de terme général $i(i-1)\cdots(i-\ell+1)P(Z=i)$ est absolument convergente car elle est à termes positifs. Donc $E(Z(Z-1)\cdots(Z-\ell+1))$ existe ; $m_\ell(Z)$ existe.

$$m_\ell(Z) = \sum_{i=0}^{+\infty} i(i-1)\cdots(i-\ell+1)P(Z=i) = \sum_{\underline{\underline{i=\ell}}}^{+\infty}\frac{1}{(i-\ell)!}\lambda^i e^{-\lambda} = \lambda^\ell e^{-\lambda}\sum_{i=\ell}^{+\infty}\frac{\lambda^{i-\ell}}{(i-\ell)!}.$$

$m_\ell(Z) = \lambda^\ell e^{-\lambda}\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{\lambda^j}{j!} = \lambda^\ell e^{-\lambda}e^{\lambda} = \lambda^\ell$. $m_\ell(Z) = \lambda^\ell$ ... ce qui vaut pour $\ell = 0$.

$\underline{\underline{\forall \ell \in \mathbb{N},\ m_\ell(Z) = \lambda^\ell.}}$

(Q4) Soit $n \in \mathbb{N}$.

a) • $(P_\ell)_{0\le \ell\le n}$ est une famille d'éléments de $\mathbb{R}_n[X]$

• $\forall k \in [\![0,n]\!]$, $\deg P_k = k$; $(P_0, P_1, \dots, P_n)$ est une famille d'éléments non nuls de $\mathbb{R}_n[X]$ de degrés échelonnés donc cette famille est libre.

Alors $(P_\ell)_{0\leq \ell\leq n}$ est une famille libre de cardinal $n+1$ de $\mathbb{R}_n[X]$ qui est de dimension $n+1$; c'est donc une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

$(P_\ell)_{0\leq \ell\leq n}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

(Q5) Soit $n\in\mathbb{N}$. Soit $\ell\in[\![0,n]\!]$.
$(P_0, P_1, \dots, P_\ell)$ est une base de $\mathbb{R}_\ell[X]$ donc $\exists!(\hat{a}_{0,\ell}, \hat{a}_{1,\ell}, \dots, \hat{a}_{\ell,\ell})\in\mathbb{R}^{\ell+1}$ tel que $X^\ell = \sum_{j=0}^{\ell} \hat{a}_{j,\ell}\, P_j(X)$ car $X^\ell\in\mathbb{R}_\ell[X]$

Posons $\forall j\in[\![0,\ell]\!]$, $a_{j,\ell} = j!\,\hat{a}_{j,\ell}$. Alors $X^\ell = \sum_{j=0}^{\ell} a_{j,\ell}\,\frac{P_j(X)}{j!}$

$\forall n\in\mathbb{N}, \forall \ell\in[\![0,n]\!], \exists(!)(a_{0,\ell}, a_{1,\ell}, \dots, a_{\ell,\ell})\in\mathbb{R}^{\ell+1}, X^\ell = \sum_{j=0}^{\ell} a_{j,\ell}\,\frac{P_j(X)}{j!}$.

(Q6) a) Soit $n\in\mathbb{N}$ et soit $j\in[\![0,n]\!]$.

$\forall i\in\mathbb{N}, \frac{P_0(i)}{0!} = 1$

$$\forall i\in\mathbb{N}, \frac{P_j(i)}{j!} = \frac{i(i-1)\cdots(i-j+1)}{j!} = \begin{cases} 0 & \text{si } i<j \\ \frac{i!}{j!(i-j)!} & \text{si } i\geq j \end{cases}$$

$$\forall i\in\mathbb{N}, \frac{P_j(i)}{j!} = \begin{cases} 0 & \text{si } i<j \\ \binom{i}{j} & \text{si } i\geq j \end{cases}$$. Notons que ceci vaut pour $j=0$!

b) Soit $\ell\in\mathbb{N}$ (??). $\exists n\in\mathbb{N}, \ell\in[\![0,n]\!]$!!

Ainsi $X^\ell = \sum_{j=0}^{\ell} a_{j,\ell}\,\frac{P_j(X)}{j!}$.

$\forall i\in[\![0,\ell]\!], i^\ell = \sum_{j=0}^{\ell} a_{j,\ell}\,\frac{P_j(i)}{j!} = \sum_{j=0}^{i} a_{j,\ell}\binom{i}{j}$.

$$\forall i \in [\![0,\ell]\!],\ i^\ell = \sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} a_{j\ell} \qquad (*)$$

c) Soit $\ell \in \mathbb{N}^*$. $(*)$ signifie que

$$\begin{cases} a_{0,\ell} = 0^\ell \\ \binom{1}{0} a_{0\ell} + \binom{1}{1} a_{1\ell} = 1^\ell \\ \dots \\ \binom{i}{0} a_{0\ell} + \binom{i}{1} a_{1\ell} + \dots + \binom{i}{i} a_{i\ell} = i^\ell \\ \dots \\ \binom{\ell}{0} a_{0\ell} + \binom{\ell}{1} a_{1\ell} + \dots + \binom{\ell}{\ell} a_{\ell\ell} = \ell^\ell \end{cases}$$

La matrice de de ce système est $A_\ell = \begin{pmatrix} \binom{0}{0} & 0 & \cdots & & 0 \\ \binom{1}{0} & \binom{1}{1} & \ddots & & \\ \vdots & \vdots & & & \\ \binom{i}{0} & \binom{i}{1} & \cdots & \binom{i}{i} & \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 0 \\ \binom{\ell}{0} & \binom{\ell}{1} & \cdots & & \binom{\ell}{\ell} \end{pmatrix}$

c'est à dire $A_\ell = (b_{ij})$ avec

$$\forall (i,j) \in [\![0,k]\!]^2,\ b_{ij} = \begin{cases} \binom{i}{j} & \text{si } j \leq i \\ 0 & \text{si } j > i \end{cases}$$

notons que ceci vaut encore pour $\ell = 0$.

d) ${}^tA_\ell = A_\ell^T = (c_{ij})$ avec $\forall (i,j) \in [\![0,\ell]\!],\ c_{ij} = b_{ji} = \begin{cases} \binom{j}{i} & \text{si } i \leq j \\ 0 & \text{si } i > j \end{cases}$.

Soit φ_ℓ l'endomorphisme de $\mathbb{R}_\ell[X]$ de matrice A_ℓ^T dans la base $\mathcal{B}_\ell = (1, X, \dots, X^\ell)$.

$$\forall j \in [\![0,\ell]\!],\ \varphi_\ell(X^j) = \sum_{i=0}^{\ell} c_{ij} X^i = \sum_{i=0}^{\ell} b_{ji} X^i = \sum_{i=0}^{j} \binom{j}{i} X^i = (X+1)^j.$$

Pour $\forall P \in \mathbb{R}_\ell[X]$, $\psi_\ell(P) = P(X+1)$. ψ_ℓ est clairement un endomorphisme de $\mathbb{R}_\ell[X]$. ψ_ℓ coïncide avec φ_ℓ sur la base $\mathcal{B}_\ell$ de $\mathbb{R}_\ell[X]$ donc $\psi_\ell = \varphi_\ell$.

A_ℓ^T est la matrice dans la base $\mathcal{B}_\ell = (1, X, \dots, X^\ell)$ de l'endomorphisme φ_ℓ de $\mathbb{R}_\ell[X]$ défini par $\forall P \in \mathbb{R}_\ell[X],\ \varphi_\ell(P) = P(X+1)$.

e) Posons $\forall P \in \mathbb{R}_\ell[X]$, $\hat{\varphi}_\ell(P) = P(X-1)$. $\hat{\varphi}_\ell$ est une application de $\mathbb{R}_\ell[X]$ dans $\mathbb{R}_\ell[X]$ telle que : $\forall P \in \mathbb{R}_\ell[X]$, $(\varphi_\ell \circ \hat{\varphi}_\ell)(P) = \varphi_\ell(P(X-1)) = P(X-1+1) = P(X) = P$ et

$(\hat{\varphi}_\ell \circ \varphi_\ell)(P) = \hat{\varphi}_\ell(\varphi_\ell(P)) = \hat{\varphi}_\ell(P(X+1)) = P(X+1-1) = P(X) = P$.

$\varphi_\ell \circ \hat{\varphi}_\ell = \hat{\varphi}_\ell \circ \varphi_\ell = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}_\ell[X]}$. Ainsi φ_ℓ est bijective et $\varphi_\ell^{-1} = \hat{\varphi}_\ell$.

Ceci montre en particulier que $\hat{\varphi}_\ell$ est une application linéaire bijective de $\mathbb{R}_\ell[X]$ dans $\mathbb{R}_\ell[X]$.

φ_ℓ est un automorphisme de $\mathbb{R}_\ell[X]$ donc sa matrice A_ℓ^T est inversible et

$(A_\ell^T)^{-1}$ est la matrice de $\hat{\varphi}_\ell$ dans la base $\mathcal{B}_\ell$.

$\forall j \in [\![1, \ell]\!]$, $\hat{\varphi}_\ell(X^j) = (X-1)^j = \sum_{i=0}^{j} \binom{j}{i}(-1)^{j-i} X^i$.

Alors $(A_\ell^T)^{-1} = (d_{ij})$ avec $\forall (i,j) \in [\![0, \ell]\!]^2$, $a_{ij} = \begin{cases} \binom{j}{i}(-1)^{j-i} & \text{si } i \leq j \\ 0 & \text{si } i > j \end{cases}$.

f) $A_\ell^T (A_\ell^T)^{-1} = I_\ell$ donc

$\left(A_\ell^T (A_\ell^T)^{-1}\right)^T = I_\ell^T = I_\ell$; $\left((A_\ell^T)^{-1}\right)^T A_\ell = I_\ell$.

Alors A_ℓ est inversible et A_ℓ^{-1} est la transposée de $(A_\ell^T)^{-1}$.

$A_\ell^{-1} = (e_{ij})$ avec $\forall (i,j) \in [\![0, \ell]\!]$, $e_{ij} = \begin{cases} \binom{i}{j}(-1)^{i-j} & \text{si } j \leq i \\ 0 & \text{si } j > i \end{cases}$.

Soit $n\in\mathbb{N}$ et soit $\ell\in[\![0,n]\!]$.

$$A_\ell\begin{pmatrix}a_{0,\ell}\\a_{1,\ell}\\\vdots\\a_{\ell,\ell}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0^\ell\\1^\ell\\\vdots\\\ell^\ell\end{pmatrix};\quad A_\ell^{-1}\begin{pmatrix}0^\ell\\1^\ell\\\vdots\\\ell^\ell\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{0,\ell}\\a_{1,\ell}\\\vdots\\a_{\ell,\ell}\end{pmatrix}.$$

$$\forall i\in[\![0,\ell]\!],\quad a_{i\ell}=\sum_{j=0}^{\ell}e_{ij}\,j^\ell=\sum_{j=0}^{i}\binom{i}{j}(-1)^{i-j}\,j^\ell.$$

$$\forall i\in[\![0,\ell]\!],\ a_{i,\ell}=\sum_{j=0}^{i}\binom{i}{j}(-1)^{i-j}j^\ell\quad\text{ou}$$

$$\forall j\in[\![0,\ell]\!],\ a_{j,\ell}=\sum_{i=0}^{j}\binom{j}{i}(-1)^{j-i}\,i^\ell.$$

---

g) Soit $n\in\mathbb{N}^*$ et soit $\ell\in[\![1,n]\!]$. $X^\ell=\sum_{j=0}^{\ell}a_{j\ell}\frac{P_j(X)}{j!}$; $X_n^\ell=\sum_{j=0}^{\ell}a_{j\ell}\frac{P_j(X_n)}{j!}$.

$$E(X_n^\ell)=\sum_{j=0}^{\ell}a_{j\ell}\,\frac{1}{j!}\,E(P_j(X_n)).$$

$$E(X_n^\ell)=\sum_{j=0}^{\ell}\frac{a_{j\ell}}{j!}\times 1=\sum_{j=0}^{\ell}\frac{1}{j!}\sum_{i=0}^{j}\binom{j}{i}(-1)^{j-i}i^\ell.$$

PARTIE V Ici $\ell \in [\![1, n]\!]$!!

(Q1) Soit $k \in [\![1, \ell]\!]$. $1_{A_{j_k}}$ vaut 1 si l'exemplaire "j_k" est gagnant et 0 dans le cas contraire car $A_{j_k} = \{\omega \in \Omega \mid \omega(j_k) = j_k\}$.

Ainsi $1_{A_{j_1}} + 1_{A_{j_2}} + \dots + 1_{A_{j_\ell}}$ est le nombre d'exemplaires gagnants du produit parmi les ℓ acquis par l'acheteur.

$Y_n^\ell = 1_{A_{j_1}} + 1_{A_{j_2}} + \dots + 1_{A_{j_\ell}}$.

$$E(Y_n^\ell) = E\left(\sum_{k=1}^{\ell} 1_{A_{j_k}}\right) = \sum_{k=1}^{\ell} E(1_{A_{j_k}}) = \sum_{k=1}^{\ell} P(A_{j_k}) = \sum_{k=1}^{\ell} \frac{1}{n} = \frac{\ell}{n}.$$

(Q2) a) Rappelons que : $\forall r \in \mathbb{N}^*, \forall (t_1, t_2, \dots, t_r) \in \mathbb{R}^r$, $(t_1 + t_2 + \dots + t_r)^2 =$

$$\sum_{i=1}^{r} t_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} t_i t_j = \sum_{i=1}^{r} t_i^2 + \sum_{\substack{(i,k) \in [\![1,r]\!]^2 \\ i \neq k}} t_i t_k.$$

Alors $(Y_n^\ell)^2 = \left(\sum_{i=1}^{\ell} 1_{A_{j_i}}\right)^2 = \sum_{i=1}^{\ell} 1^2_{A_{j_i}} + \sum_{\substack{(i,k) \in [\![1,\ell]\!]^2 \\ i \neq k}} 1_{A_{j_i}} 1_{A_{j_k}}$

Or $\forall i \in [\![1, \ell]\!]$, $1^2_{A_{j_i}} = 1_{A_{j_i}} 1_{A_{j_i}} = 1_{A_{j_i} \cap A_{j_i}} = 1_{A_{j_i}}$ et

$\forall (i,k) \in [\![1, \ell]\!]^2$, $1_{A_{j_i}} \cap 1_{A_{j_k}} = 1_{A_{j_i} \cap A_{j_k}}$.

Alors $(Y_n^\ell)^2 = \sum_{i=1}^{\ell} 1_{A_{j_i}} + \sum_{\substack{1 \leq i \leq \ell \\ 1 \leq k \leq \ell \\ k \neq i}} 1_{A_{j_i} \cap A_{j_k}}$.

b) $E\left((Y_n^\ell)^2\right)=\sum_{i=1}^{\ell} E(1_{A_{j_i}}) + \sum_{1\le i\ne k\le \ell} E(1_{A_{j_i}\cap A_{j_k}})$

$E\left((Y_n^\ell)^2\right)=\sum_{i=1}^{\ell} P(A_{j_i}) + \sum_{1\le i\ne k\le \ell} P(A_{j_i}\cap A_{j_k})$.

$\forall i\in [\![1,\ell]\!]$, $P(A_{j_i})=\frac{1}{n}$. Soit $(j_i,j_k)\in [\![1,\ell]\!]^2$, $i\ne k$.

$A_{j_i}\cap A_{j_k}=\{\omega\in\Omega \mid \omega(j_i)=j_i \text{ et } \omega(j_k)=j_k\}$.

$P(A_{j_i}\cap A_{j_k}) \overset{j_i\ne j_k}{=} \frac{(n-2)!}{n!}=\frac{1}{n(n-1)}$.

$E\left((Y_n^\ell)^2\right)=\sum_{i=1}^{\ell}\frac{1}{n} + \sum_{1\le i\ne k\le \ell}\frac{1}{n(n-1)} = \frac{\ell}{n}+\frac{\ell^2-\ell}{n(n-1)}=\frac{\ell}{n}\left[1+\frac{\ell-1}{n-1}\right]$

$$E\left((Y_n^\ell)^2\right)=\frac{\ell}{n(n-1)}(n+\ell-2).$$

$V(Y_n)=E\left((Y_n^\ell)^2\right)-\left(E(Y_n^\ell)\right)^2=\frac{\ell}{n(n-1)}(n+\ell-2)-\frac{\ell^2}{n^2}=\frac{\ell}{n^2(n-1)}\left(n^2+n\ell-2n-\ell(n-1)\right)$

$$V(Y_n)=\frac{n^2-2n+\ell}{n^2(n-1)}.$$

Q3 **a)** Si Y_n^ℓ prend la valeur j, "le gain" de l'acheteur est $Bj-b\ell$.

Ainsi $G_n=BY_n^\ell-b\ell$.

b) $E(G_n)=B\,E(Y_n^\ell)-b\ell = B\times\frac{\ell}{n}-b\ell=\ell\left(\frac{B}{n}-b\right)$.

$$E(G_n)=\ell\left(\frac{B}{n}-b\right).$$

$V(G_n)=V(BY_n^\ell-b\ell)=B^2\,V(Y_n^\ell)$; $V(G_n)=B^2\,\frac{n^2-2n+\ell}{n^2(n-1)}$.

$\sigma(G_n)=B\sqrt{\frac{n^2-2n+\ell}{n^2(n-1)}}$.