Jean-François COSSUTTA.

ESSEC 2002

PRELIMINAIRE

a) • $F \subset E$! !

• $\forall a \in F,\ < a, 0_{\mathbb{R}^n} >= 0$; alors $0_{\mathbb{R}^n}$ appartient à $F^\perp$. $F^\perp$ n'est pas vide.

• Soient x et y deux éléments de $F^\perp$ et λ un réel.

$\forall a \in F,\ < a, x >=< a, y >= 0$. $\forall a \in F,\ < a, \lambda\, x + y >= \lambda\ < a, x > + < a, y >= 0$.

Ainsi $\lambda\, x + y$ est un élément de $F^\perp$.

$\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall (x, y) \in (F^\perp)^2,\ \lambda\, x + y \in F^\perp$. Ceci achève de montrer que :

$$\boxed{F^\perp \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathbb{R}^n}.$$

b) *Remarque* *Il est clair que le résultat* $F^\perp = \mathrm{Vect}(e_{p+1}, e_{p+2}, \ldots, e_n)$ *et presque toutes les démonstrations proposées dans la suite supposent* $0 < p < n$. $\dim F^\perp = \dim E - \dim F$ *et* $\left(F^\perp\right)^\perp = F$ *sont bien évidemment encore vrai(e)s pour* $p = 0$ *et* $p = n$.

Soit x un élément de $\mathbb{R}^n$ et $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ la famille de ses coordonnées dans la base $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$.

x appartient à $F^\perp$ si et seulement si x est orthogonal aux éléments de la base $(e_1, e_2, \ldots, e_p)$ de F.

Remarquons que $\forall i \in [\![1, p]\!],\ < x, e_i >=< \displaystyle\sum_{k=1}^{p} x_k\, e_k, e_i >= \sum_{k=1}^{p} x_k\ < e_k, e_i > = x_i$ car $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ est une base orthonormale.

Ainsi : $x \in F^\perp \Longleftrightarrow \forall i \in [\![1, p]\!],\ < x, e_i >= 0 \Longleftrightarrow \forall i \in [\![1, p]\!],\ x_i = 0 \Longleftrightarrow x \in \mathrm{Vect}(e_{p+1}, e_{p+2}, \ldots, e_n)$.

Par conséquent : $F^\perp = \mathrm{Vect}(e_{p+1}, e_{p+2}, \ldots, e_n)$.

$(e_{p+1}, e_{p+2}, \ldots, e_n)$ est alors une famille orthonormale et génératrice de $F^\perp$ donc une base orthonormale de $F^\perp$ (toute famille orthonormale est libre). $F^\perp$ est de dimension $n - p$.

Alors $\boxed{F^\perp = \mathrm{Vect}(e_{p+1}, e_{p+2}, \ldots, e_n) \text{ et la dimension de } F^\perp \text{ est } \dim E - \dim F.}$

c) $(e_{p+1}, e_{p+2}, \ldots, e_n)$ est une base orthonormale de $F^\perp$ et $(e_{p+1}, e_{p+2}, \ldots, e_n, e_1, \ldots, e_p)$ est une base orthonormale de E. Le résultat de b) (appliqué à $F^\perp$) nous permet alors de dire que :

$$\boxed{\left(F^\perp\right)^\perp = \mathrm{Vect}(e_1, e_2, \ldots, e_p)} \text{ et } \boxed{\left(F^\perp\right)^\perp = F.}$$

PARTIE I

1) Exemple d'une telle matrice

a) Soit $x=(x_1,x_2,x_3)$ un élément de $\mathbb{R}^3$.

$${}^t x C_0 x = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1+x_2+x_3 \\ x_1+2x_2+2x_3 \\ x_1+2x_2+3x_3 \end{pmatrix}.$$

${}^t x C_0 x = x_1(x_1+x_2+x_3)+x_2(x_1+2x_2+2x_3)+x_3(x_1+2x_2+3x_3) = x_1^2+2x_2^2+3x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3+4x_2x_3.$

$$\boxed{\forall x=(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3,\ {}^t x C_0 x = x_1^2+2x_2^2+3x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3+4x_2x_3.}$$

b) Soit $x=(x_1,x_2,x_3)$ un élément de $\mathbb{R}^3$.

${}^t x C_0 x-(x_1+x_2+x_3)^2 = x_1^2+2x_2^2+3x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3+4x_2x_3-x_1^2-x_2^2-x_3^2-2x_1x_2-2x_1x_3-2x_2x_3.$

${}^t x C_0 x-(x_1+x_2+x_3)^2 = x_2^2+2x_3^2+2x_2x_3=(x_2+x_3)^2+x_3^2$. Alors ${}^t x C_0 x=(x_1+x_2+x_3)^2+(x_2+x_3)^2+x_3^2$.

${}^t x C_0 x$ est donc un réel positif ou nul. Supposons que ce réel soit nul.

Alors $(x_1+x_2+x_3)^2=(x_2+x_3)^2=x_3^2=0$. Ainsi $x_1+x_2+x_3=x_2+x_3=x_3=0$ et $x_1=x_2=x_3=0$. $x=0_{\mathbb{R}^3}$.

Par conséquent ${}^t x C_0 x=0$ donne $x=0_{\mathbb{R}^n}$. Donc ${}^t x C_0 x$ est strictement positif si x n'est pas nul.

$$\boxed{\text{Pour tout vecteur } x \text{ non nul de } \mathbb{R}^n,\ {}^t x C_0 x>0.}$$

c) Soit x un élément de $\mathbb{R}^3$ tel que $C_0x=0_{\mathbb{R}^3}$. Alors ${}^t x C_0 x={}^t x 0_{\mathbb{R}^3}=0$ et nécessairement x est nul.

Par conséquent : $\forall x\in\mathbb{R}^3,\ C_0x=0_{\mathbb{R}^3}\Rightarrow x=0_{\mathbb{R}^3}$.

$$\boxed{C_0 \text{ est inversible.}}$$

Soit $x=(x_1,x_2,x_3)$. Posons $y=(y_1,y_2,y_3)=C_0x$. Alors : $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=y_1 \\ x_1+2x_2+2x_3=y_2 \\ x_1+2x_2+3x_3=y_3 \end{cases}$.

Les opérations $L_1\leftarrow 2L_1-L_2$ et $L_3\leftarrow L_3-L_2$ conduisent à : $\begin{cases} x_1=2y_1-y_2 \\ x_1+2x_2+2x_3=y_2 \\ x_3=y_3-y_2 \end{cases}$.

On obtient alors sans difficulté : $\begin{cases} x_1=2y_1-y_2 \\ x_2=-y_1+2y_2-y_3 \\ x_3=-y_2+y_3 \end{cases}$. Ainsi :

$$\boxed{C_0^{-1}=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.}$$

d) Soit $x=(x_1,x_2,x_3)$ un élément de $\mathbb{R}^3$.

${}^t x C_0^{-1} x = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2x_1 - x_2 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 \\ -x_2 + x_3 \end{pmatrix}.$

${}^t x C_0 x = x_1(2x_1 - x_2) + x_2(-x_1 + 2x_2 - x_3) + x_3(-x_2 + x_3) = 2x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_2x_3.$

$$\boxed{\forall x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3,\ {}^t x C_0 x = 2x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_2x_3.}$$

e) Soit $x = (x_1, x_2, x_3)$ un élément de $\mathbb{R}^3$.

${}^t x C_0^{-1} x = 2x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_2x_3 = (x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2) + (x_2^2 - 2x_2x_3 + x_3^2) + x_1^2 = (x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + x_1^2.$

Alors ${}^t x C_0^{-1} x \geqslant 0$. Supposons que ${}^t x C_0^{-1} x = 0$. $(x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + x_1^2 = 0$.

Ce qui donne $(x_1 - x_2)^2 = (x_2 - x_3)^2 = x_1^2 = 0$, puis $x_1 - x_2 = x_2 - x_3 = x_1 = 0$ et enfin $x_1 = x_2 = x_3 = 0$.

${}^t x C_0^{-1} x \geqslant 0$ et ${}^t x C_0^{-1} x = 0$ donne $x = 0_{\mathbb{R}^3}$.

$$\boxed{\text{Pour tout réel } x \text{ non nul, } {}^t x C_0^{-1} x > 0}.$$

2) Inversibilité de la matrice C

a) Soient x et y deux éléments de $\mathbb{R}^n$.

${}^t x C y$ qui est égal à $< x, Cy >$ est sans aucun doute un nombre réel.

${}^t x C y = < x, Cy > = < Cy, x > = {}^t(Cy) x = {}^t y\, {}^t C x = {}^t y C X$ car C est symétrique.

$$\boxed{\text{Pour tout couple } (x, y) \text{ de vecteur de } \mathbb{R}^n,\ {}^t x C y \text{ est un nombre réel et } {}^t x C y = {}^t y C x}.$$

b) Soit x un élément de $\mathbb{R}^n$ tel que $Cx = 0_{\mathbb{R}^n}$. Alors ${}^t x C x = {}^t x 0_{\mathbb{R}^n} = 0$ et nécessairement x est nul d'après l'hypothèse faite sur C (ou sur Q).

Par conséquent : $\forall x \in \mathbb{R}^n,\ Cx = 0_{\mathbb{R}^n} \Rightarrow x = 0_{\mathbb{R}^n}$.

$$\boxed{C \text{ est inversible.}}$$

c) $CC^{-1} = C^{-1}C = I_n$. Ainsi ${}^t(CC^{-1}) = {}^t(C^{-1}C) = {}^t I_n = I_n$.

Ceci donne encore : ${}^t C^{-1}\, {}^t C = {}^t C\, {}^t C^{-1} = I_n$.

Comme C est symétrique, ${}^t C^{-1}\, C = C\, {}^t C^{-1} = I_n$. Alors ${}^t C^{-1}$ est l'inverse de C.

$$\boxed{{}^t C^{-1} = C^{-1}.\ C^{-1} \text{ est symétrique.}}$$

d) Soit x un élément non nul de $\mathbb{R}^n$. Posons $y = C^{-1}x$.

$x = Cy$. Comme x n'est pas nul y ne l'est pas davantage.

Alors $0 < {}^t yCy = {}^t(C^{-1}x)CC^{-1}x = {}^t x^t(C^{-1})x = {}^t xC^{-1}x$.

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^n,\ x \neq 0_{\mathbb{R}^n} \Longrightarrow {}^t xC^{-1}x > 0.}$$

Soient u et v deux éléments de $\mathbb{R}^n$ linéairement indépendants.

$\forall \lambda \in \mathbb{R},\ {}^t(u+\lambda\, v)C^{-1}(u+\lambda\, v) =< u+\lambda\, v, C^{-1}(u+\lambda\, v) >=< u+\lambda\, v, C^{-1}u+\lambda\, C^{-1}v >$.

$\forall \lambda \in \mathbb{R},\ {}^t(u+\lambda\, v)C^{-1}(u+\lambda\, v) =< u, C^{-1}u > +\lambda\ < u, C^{-1}v > +\lambda\ < v, C^{-1}u > +\lambda^2\ < v, C^{-1}v >$.

$\forall \lambda \in \mathbb{R},\ {}^t(u+\lambda\, v)C^{-1}(u+\lambda\, v) = {}^t uC^{-1}u + \lambda\, {}^t uC^{-1}v + \lambda\, {}^t vC^{-1}u + \lambda^2\, {}^t vC^{-1}v$.

La matrice C^{-1} est symétrique donc ${}^t vC^{-1}u = {}^t uC^{-1}v$ (même démonstration que pour a)). Il vient alors :

$$\boxed{\forall \lambda \in \mathbb{R},\ {}^t(u+\lambda\, v)C^{-1}(u+\lambda\, v) = {}^t uC^{-1}u + 2\lambda\, {}^t uC^{-1}v + \lambda^2\, {}^t vC^{-1}v.}$$

Posons $\forall \lambda \in \mathbb{R},\ P(\lambda) = {}^t(u+\lambda\, v)C^{-1}(u+\lambda\, v)$.

Notons $\forall \lambda \in \mathbb{R},\ P(\lambda) = ({}^t vC^{-1}v)\, \lambda^2 + 2\, ({}^t uC^{-1}v)\, \lambda + {}^t uC^{-1}u$.

(u, v) est libre donc $v \neq 0_{\mathbb{R}^n}$ et $\forall \lambda \in \mathbb{R}, u + \lambda\, v \neq 0_{\mathbb{R}^n}$.

Ceci montre que P est un trinôme du second degré (${}^t vC^{-1}v > 0$) et que pour tout réel λ :

$P(\lambda) = {}^t(u+\lambda\, v)C^{-1}(u+\lambda\, v) > 0$.

P n'a donc aucune racine dans $\mathbb{R}$ et son discriminant réduit est alors nécessairement strictement négatif.

Ainsi $\left(2^t uC^{-1}v\right)^2 - 4\left({}^t uC^{-1}u\right)\left({}^t vC^{-1}v\right) < 0$. Donc $\left({}^t uC^{-1}v\right)^2 - \left({}^t uC^{-1}u\right)\left({}^t vC^{-1}v\right) < 0$.

$$\boxed{\text{Si } u \text{ et } v \text{ sont deux éléments linéairement indépendants de } \mathbb{R}^n,\ \left({}^t vC^{-1}u\right)^2 < \left({}^t uC^{-1}u\right)\left({}^t vC^{-1}v\right)}.$$

► *Exercice de contrôle Montrer que $\varphi : (x, y) \to {}^t xC^{-1}y$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$ et retouver alors le résultat précédent.* ◄

3) Condition pour que $Q(x) \leqslant Q(x+h)$ lorsque $< u, h >= 0$.

a) Soit (x, h) un couple d'éléments de $\mathbb{R}^n$ et soit λ un réel.

$Q(x+\lambda\, h) = {}^t(x+\lambda\, h)C(x+\lambda\, h) =< x+\lambda\, h, C(x+\lambda\, h) >=< x+\lambda\, h, Cx+\lambda\, Ch >$.

$Q(x+\lambda\, h) =< x, Cx > +\lambda\ < x, Ch > +\lambda\ < h, Cx > +\lambda^2\ < h, Ch >$.

Comme C est symétrique : $< x, Ch >=< Cx, h >=< h, Cx >$. Ainsi :

$$\boxed{Q(x+\lambda\, h) = Q(x) + 2\lambda\ < h, Cx > +\lambda^2\, Q(h).}$$

b) On suppose donc dans cette question que, pour tout élément h de $\mathbb{R}^n$ orthogonal à $u : Q(x) \leqslant Q(x+h)$.

• Soit h un élément de $\mathbb{R}^n$ tel que $< u, h >= 0$. Notons que : $\forall \lambda \in \mathbb{R},\ < u, \lambda\, h >= 0$.

Alors, par hypothèse : $\forall \lambda \in \mathbb{R},\ Q(x) \leqslant Q(x + \lambda\, h)$.

Ceci permet d'écrire : $\forall \lambda \in \mathbb{R},\ 0 \leqslant Q(x + \lambda\, h) - Q(x) = 2\lambda\ < h, Cx > +\lambda^2\, Q(h)$. Finalement :

$$\boxed{\text{Si } h \text{ est un élément de } \mathbb{R}^n \text{ tel que } < u, h >= 0 \text{ on a} : \forall \lambda \in \mathbb{R},\ 2\lambda\ < h, Cx > +\lambda^2\, Q(h) \geqslant 0.}$$

• Reprenons un élément h de $\mathbb{R}^n$ orthogonal à u.

$\forall \lambda \in \mathbb{R},\ 2\lambda\ < h, Cx > +\lambda^2\, Q(h) \geqslant 0$ donc $\forall \lambda \in]0, +\infty[,\ 2\ < h, Cx > +\lambda\, Q(h) \geqslant 0$.

En faisant tendre λ vers 0 par valeurs supérieures on obtient : $2\ < h, Cx > \geqslant 0$ ou $< h, Cx > \geqslant 0$.

$\forall \lambda \in \mathbb{R},\ 2\lambda\ < h, Cx > +\lambda^2\, Q(h) \geqslant 0$ donc $\forall \lambda \in]-\infty, 0[,\ 2\ < h, Cx > +\lambda\, Q(h) \leqslant 0$.

En faisant tendre λ vers 0 par valeurs inférieures on obtient : $2\ < h, Cx > \leqslant 0$ ou $< h, Cx > \leqslant 0$.

Ce qui précède donne alors : $< h, Cx >= 0$.

$$\boxed{\text{Si } h \text{ est un élément de } \mathbb{R}^n \text{ tel que } < u, h >= 0 \text{ on a} : < h, Cx >= 0.}$$

$\forall h \in \mathbb{R}^n,\ < u, h >= 0 \Rightarrow < h, Cx >= 0$ donc $\forall h \in \big(\mathrm{Vect}(u)\big)^{\perp},\ < h, Cx >= 0$.

Ainsi Cx appartient à $\Big(\big(\mathrm{Vect}(u)\big)^{\perp}\Big)^{\perp}$.

Le préliminaire donne $\Big(\big(\mathrm{Vect}(u)\big)^{\perp}\Big)^{\perp} = \mathrm{Vect}(u)$. Donc Cx appartient à $\mathrm{Vect}(u)$ et Cx est colinéaire à u.

Il existe un réel α tel que $Cx = \alpha\, u$. Alors $x = \alpha\, C^{-1}u$ et x est colinéaire à $C^{-1}u$.

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Si pour tout élément } h \text{ de } \mathbb{R}^n, \text{ orthogonal à } u,\ Q(x) \leqslant Q(x+h) \text{ alors } Cx \text{ est colinéaire à } u \text{ ou } x \text{ est} \\ \text{colinéaire à } C^{-1}u.\end{array}}$$

c) Réciproquement supposons que Cx est colinéaire à u. Il existe un réel α tel que $Cx = \alpha\, u$.

Soit h un élément de $\mathbb{R}^n$ orthogonal à u. $Q(x+h) = Q(x) + 2\ < h, Cx > +Q(h)$ (d'après a)).

$Q(x+h) = Q(x) + 2\ < h, \alpha\, u > +Q(h) = Q(x) + 2\,\alpha\ < h, u > +Q(h) = Q(x) + Q(h)$.

Par conséquent $Q(x+h) = Q(x) + Q(h)$. Or $Q(h) = {}^t hCh \geqslant 0$, donc $Q(x+h) \geqslant Q(x)$.

$$\boxed{\text{Si } Cx \text{ est colinéaire à } u, \text{ pour tout élément } h \text{ de } \mathbb{R}^n \text{ orthogonal à } u : Q(x) \leqslant Q(x+h).}$$

d) Ici x est un élément de $\mathbb{R}^n$ tel que Cx est colinéaire à u. Plus précisément $Cx = \alpha\, u$ avec α dans $\mathbb{R}$.

• $Cx = \alpha\, u$ donc $x = \alpha\, C^{-1}u$. Alors $< u, x >=< u, \alpha\, C^{-1}u >= \alpha\ < u, C^{-1}u >= \alpha\, {}^t uC^{-1}u$.

Comme u n'est pas le vecteur nul, ${}^t uC^{-1}u$ est strictement positif.

Ceci permet d'écrire que : $\alpha = \dfrac{1}{{}^t u C^{-1} u} < u, x >$. Alors

$$\boxed{\alpha = a < u, x > \text{ avec } a = \dfrac{1}{{}^t u C^{-1} u}.}$$

• $Cx = \alpha\, u$ donc $Q(x) = {}^t x C x = \alpha\, {}^t x u = \alpha < x, u >= a < u, x >< u, x >$.

$$\boxed{Q(x) = a\left(< u, x > \right)^2.}$$

4) Condition pour que $Q(x) \leqslant Q(x+h)$ lorsque $< u, h >=< v, h >= 0$

a) On suppose donc ici que $Q(x) \leqslant Q(x+h)$ pour tout élément h de $\mathbb{R}^n$ orthogonal à u et à v.

Reprenons les arguments de 3).

Soit h un élément de $\mathbb{R}^n$ orthogonal à u et à v. Pour tout réel λ, $\lambda\, h$ est également orthogonal à u et à v.

Ainsi $\forall \lambda \in \mathbb{R}, Q(x + \lambda\, h) - Q(x) \geqslant 0$ ou $\forall \lambda \in \mathbb{R},\ 2\lambda < h, Cx > +\lambda^2\, Q(h) \geqslant 0$.

$\forall \lambda \in \mathbb{R},\ 2\lambda < h, Cx > +\lambda^2\, Q(h) \geqslant 0$ donc $\forall \lambda \in]0, +\infty[,\ 2 < h, Cx > +\lambda\, Q(h) \geqslant 0$.

En faisant tendre λ vers 0 par valeurs supérieures on obtient : $2 < h, Cx >\geqslant 0$ ou $< h, Cx >\geqslant 0$.

$\forall \lambda \in \mathbb{R},\ 2\lambda < h, Cx > +\lambda^2\, Q(h) \geqslant 0$ donc $\forall \lambda \in]-\infty, 0[,\ 2 < h, Cx > +\lambda\, Q(h) \leqslant 0$.

En faisant tendre λ vers 0 par valeurs inférieures on obtient : $2 < h, Cx >\leqslant 0$ ou $< h, Cx >\leqslant 0$.

Ce qui précède donne alors : $< h, Cx >= 0$.

$$\boxed{\text{Si } h \text{ est un élément de } \mathbb{R}^n \text{ tel que } < u, h >=< v, h >= 0 \text{ on a} : < h, Cx >= 0.}$$

$\forall h \in \mathbb{R}^n,\ < u, h >=< v, h >= 0 \Rightarrow < h, Cx >= 0$ donc $\forall h \in \big(\mathrm{Vect}(u, v)\big)^{\perp},\ < h, Cx >= 0$.

Ainsi Cx appartient à $\Big(\big(\mathrm{Vect}(u, v)\big)^{\perp}\Big)^{\perp}$.

Le préliminaire donne $\Big(\big(\mathrm{Vect}(u, v)\big)^{\perp}\Big)^{\perp} = \mathrm{Vect}(u, v)$. Alors Cx appartient à $\mathrm{Vect}(u, v)$.

Il existe deux réels α et β tels que $Cx = \alpha\, u + \beta\, v$. Ce qui donne encore $x = \alpha\, C^{-1} u + \beta\, C^{-1} v$.

Si pour tout élément h de $\mathbb{R}^n$, orthogonal à u et à v, $Q(x) \leqslant Q(x+h)$ alors Cx appartient à $\mathrm{Vect}(u, v)$ ou x appartient à $\mathrm{Vect}\big(C^{-1}u, C^{-1}v\big)$.

b) Réciproquement supposons que Cx appartient à $\mathrm{Vect}(u, v)$.

Soit h un élément de $\mathbb{R}^n$ orthogonal à u et à v. h est alors orthogonal à Cx donc $< h, Cx >= 0$.

$Q(x+h) = Q(x) + 2 < h, Cx > + Q(h) = Q(x) + Q(h)$. Or $Q(h) = {}^t h C h \geqslant 0$, donc $Q(x+h) \geqslant Q(x)$.

$$\boxed{\text{Si } Cx \text{ appartient à } \mathrm{Vect}(u, v), \text{ pour tout élément } h \text{ de } \mathbb{R}^n \text{ orthogonal à } u \text{ et à } v : Q(x) \leqslant Q(x+h).}$$

► *Remarque Retrouvons ce résultat à l'aide de "de la caractérisation de la projection orthogonale par minimisation de la norme.".*

u et v sont toujours deux vecteurs linéairement indépendants de $\mathbb{R}^n$.

Posons $\forall (x,y) \in \left(\mathbb{R}^n\right)^2,\ \psi(x,y) = {}^t xCy$. Il est aisé de montrer que ψ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$.

Notons N la norme associée. $\forall x \in \mathbb{R}^n,\ N(x) = \sqrt{{}^t xCx} = \sqrt{Q(x)}$.

Dès lors $\boxed{\text{raisonnons dans l'espace vectoriel euclidien } (\mathbb{R}^n, \psi)}$.

Soit h un élément de $\mathbb{R}^n$. $< u, h >=< h, u >= {}^t hu = {}^t hC(C^{-1}u) = \psi(h, C^{-1}u)$.

De même $< v, h >= \psi(h, C^{-1}v)$.

Alors $< u, h >=< v, h >= 0$ si et seulement si $\psi(h, C^{-1}v) = \psi(h, C^{-1}v) = 0$.

$< u, h >=< v, h >= 0$ si et seulement si $h \in \left(\mathrm{Vect}(C^{-1}u, C^{-1}u)\right)^{\perp}$ (dans $(\mathbb{R}^n, \psi)$ et nous ne le redirons plus...)

Posons $F = \left(\mathrm{Vect}(C^{-1}u, C^{-1}u)\right)^{\perp}$ Soit x un élément de $\mathbb{R}^n$.

$Q(x) \leqslant Q(x+h)$ pour tout élément h de $\mathbb{R}^n$ tel que $< u, h >=< v, h >= 0$ équivaut alors à :

$$Q(x) = \operatorname*{Min}_{h\in F} Q(x+h) = \operatorname*{Min}_{h\in F} Q(x-h)0$$

$Q(x) = \operatorname*{Min}_{h\in F} Q(x-h) \Longleftrightarrow \left(N(x)\right)^2 = \operatorname*{Min}_{h\in F} \left(N(x-h)\right)^2 \Longleftrightarrow N(x - 0_{\mathbb{R}^n}) = \operatorname*{Min}_{h\in F} N(x-h)$.

Alors notre cours nous permet de dire que $Q(x) = \operatorname*{Min}_{h\in F} Q(x-h)$ si et seulement si $0_{\mathbb{R}^n}$ est la projection orthogonale de x sur F ; autrement dit si et seulement si x appartient à $F^{\perp} = \mathrm{Vect}(C^{-1}u, C^{-1}u)$.

Nous retrouvons alors : $Q(x) \leqslant Q(x+h)$ pour tout élément h de $\mathbb{R}^n$ tel que $< u, h >=< v, h >= 0$ si et seulement si x appartient à $\mathrm{Vect}(C^{-1}u, C^{-1}u)$. ◄

c) • $Cx = \alpha\, u + \beta\, v$ donc $x = \alpha\, C^{-1}u + \beta\, C^{-1}v$.

Alors $< u, x >= {}^t ux = \alpha\, {}^t uC^{-1}u + \beta\, {}^t uC^{-1}v$ et $< v, x >= {}^t vx = \alpha\, {}^t vC^{-1}u + \beta\, {}^t vC^{-1}v$.

$$\boxed{\begin{cases} \alpha\, {}^t uC^{-1}u + \beta\, {}^t uC^{-1}v =< u, x > \\ \alpha\, {}^t vC^{-1}u + \beta\, {}^t vC^{-1}v =< v, x > \end{cases}.}$$

• Pour simplifier les écritures, posons $r = {}^t uC^{-1}u$, $s = {}^t uC^{-1}v = {}^t vC^{-1}u$ et $t = {}^t vC^{-1}v$.

Comme u et v sont non nuls : $r = {}^t uC^{-1}u > 0$ et $t = {}^t vC^{-1}v > 0$.

Remarquons que I 2) d) donne : $s^2 - rt = \left({}^t uC^{-1}v\right)^2 - \left({}^t uC^{-1}u\right)\left({}^t vC^{-1}v\right) < 0$. Donc $rt - s^2 > 0$.

$$\begin{cases} \alpha\, {}^t uC^{-1}u + \beta\, {}^t uC^{-1}v =< u, x > \\ \alpha\, {}^t vC^{-1}u + \beta\, {}^t vC^{-1}v =< v, x > \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} r\,\alpha + s\,\beta =< u, x > \\ s\,\alpha + t\,\beta =< v, x > \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \alpha = \dfrac{1}{r}\,(< u, x > -s\,\beta) \\ \dfrac{s}{r}\,\big(< u, x > -s\,\beta\big) + t\,\beta =< v, x > \end{cases}.$$

$$\left\{\begin{array}{l}\alpha\,{}^t uC^{-1}u+\beta\,{}^t uC^{-1}v=<u,x>\\ \alpha\,{}^t vC^{-1}u+\beta\,{}^t vC^{-1}v=<v,x>\end{array}\right.\iff\left\{\begin{array}{l}\alpha=\dfrac{1}{r}\Big(<u,x>-s\,\beta\Big)\\ \left(t-\dfrac{s^2}{r}\right)\beta=<v,x>-\dfrac{s}{r}\,<u,x>\end{array}\right..$$

$$\left\{\begin{array}{l}\alpha\,{}^t uC^{-1}u+\beta\,{}^t uC^{-1}v=<u,x>\\ \alpha\,{}^t vC^{-1}u+\beta\,{}^t vC^{-1}v=<v,x>\end{array}\right.\iff\left\{\begin{array}{l}\beta=\dfrac{-s\,<u,x>+r\,<v,x>}{rt-s^2}\\ \alpha=\dfrac{1}{r}\left(<u,x>-s\,\dfrac{-s\,<u,x>+r\,<v,x>}{rt-s^2}\right)\end{array}\right..$$

$$\left\{\begin{array}{l}\alpha\,{}^t uC^{-1}u+\beta\,{}^t uC^{-1}v=<u,x>\\ \alpha\,{}^t vC^{-1}u+\beta\,{}^t vC^{-1}v=<v,x>\end{array}\right.\iff\left\{\begin{array}{l}\beta=\dfrac{-s\,<u,x>+r\,<v,x>}{rt-s^2}\\ \alpha=\dfrac{t\,<u,x>-s\,<v,x>}{rt-s^2}\end{array}\right..$$

Posons $a=\dfrac{t}{rt-s^2}=\dfrac{{}^t vC^{-1}v}{\left({}^t uC^{-1}u\right)\left({}^t vC^{-1}v\right)-\left({}^t uC^{-1}v\right)^2}$, $b=\dfrac{s}{rt-s^2}=\dfrac{{}^t uC^{-1}v}{\left({}^t uC^{-1}u\right)\left({}^t vC^{-1}v\right)-\left({}^t uC^{-1}v\right)^2}$ et $c=\dfrac{r}{rt-s^2}=\dfrac{{}^t vC^{-1}v}{\left({}^t uC^{-1}u\right)\left({}^t uC^{-1}u\right)-\left({}^t uC^{-1}v\right)^2}$.

a et b sont deux réels strictement positifs et $(a\,<u,x>-b\,<v,x>,-b\,<u,x>+c\,<v,x>)$ est l'unique solution du système $\left\{\begin{array}{l}\alpha\,{}^t uC^{-1}u+\beta\,{}^t uC^{-1}v=<u,x>\\ \alpha\,{}^t vC^{-1}u+\beta\,{}^t vC^{-1}v=<v,x>\end{array}\right.$.

> Le système $\left\{\begin{array}{l}\alpha\,{}^t uC^{-1}u+\beta\,{}^t uC^{-1}v=<u,x>\\ \alpha\,{}^t vC^{-1}u+\beta\,{}^t vC^{-1}v=<v,x>\end{array}\right.$ admet une solution et une seule :
>
> $$\Big((a\,<u,x>-b\,<v,x>),(-b\,<u,x>+c\,<v,x>)\Big)$$
>
> avec $a=\dfrac{{}^t vC^{-1}v}{\left({}^t uC^{-1}u\right)\left({}^t vC^{-1}v\right)-\left({}^t uC^{-1}v\right)^2}$, $\quad b=\dfrac{{}^t uC^{-1}v}{\left({}^t uC^{-1}u\right)\left({}^t vC^{-1}v\right)-\left({}^t uC^{-1}v\right)^2}$ et
> $c=\dfrac{{}^t uC^{-1}u}{\left({}^t uC^{-1}u\right)\left({}^t vC^{-1}v\right)-\left({}^t uC^{-1}v\right)^2}$.

$Q(x)={}^t xCx={}^t x(\alpha\,u+\beta\,v)=\alpha\,<u,x>+\beta\,<v,x>$.

$Q(x)=(a\,<u,x>-b\,<v,x>)\,<u,x>+(-b\,<u,x>+c\,<v,x>)\,<v,x>$.

$Q(x)=a\,(<u,x>)^2-2b\,<u,x><v,x>+c\,(<v,x>)^2$.

$$\boxed{Q(x)=a\,(<u,x>)^2-2b\,<u,x><v,x>+c\,(<v,x>)^2.}$$

<u>Remarque</u>

Dans cette remarque a, b et c sont les réels définis plus haut.

Soit δ et γ deux réels. Il convient d'observer que le système $\left\{\begin{array}{l}\alpha\,{}^t uC^{-1}u+\beta\,{}^t uC^{-1}v=\delta\\ \alpha\,{}^t vC^{-1}u+\beta\,{}^t vC^{-1}v=\gamma\end{array}\right.$ admet une solution et une seule : $(\alpha,\beta)=(a\,\delta-b\,\gamma,-b\,\delta+c\,\gamma)$.

Notons encore que si l'on pose $x = \alpha\, C^{-1}u + \beta\, C^{-1}v$, alors $< u, x >= \alpha\, {}^t u C^{-1} u + \beta\, {}^t u C^{-1} v = \delta$ et $< v, x >= \alpha\, {}^t v C^{-1} u + \beta\, {}^t v C^{-1} v = \gamma$.

On est maintenant en mesure de dire que si δ et γ sont deux réels, il existe un élément x de $\mathrm{Vect}(C^{-1}u, C^{-1}v)$ et un seul tel que $< u, x >= \delta$ et $< v, x >= \gamma$.

x est égal à $\alpha\, C^{-1}u + \beta\, C^{-1}v$ avec : $\alpha = a\,\delta - b\,\gamma$ et $\beta = -b\,\delta + c\,\gamma$.

Notons pour finir que, dans ces conditions $Q(x) = a\,\delta^2 - 2b\,\delta\,\gamma + c\,\gamma^2$

PARTIE II

5) Covariance des variables aléatoires X et Y

a) Soit λ un réel. $V(\lambda\, X + Y) = V(\lambda\, X) + V(Y) + 2\,\mathrm{cov}(\lambda\, X, Y) = \lambda^2\, V(X) + V(Y) + 2\lambda\,\mathrm{cov}(X, Y)$.

$$\boxed{\forall \lambda \in \mathbb{R},\ V(\lambda\, X + Y) = \lambda^2\, V(X) + 2\lambda\,\mathrm{cov}(X, Y) + V(Y).}$$

b) Posons $\forall \lambda \in \mathbb{R},\ H(\lambda) = V(\lambda\, X + Y) = \lambda^2\, V(X) + 2\lambda\,\mathrm{cov}(X, Y) + V(Y)$.

H est un polynôme du second degré ($V(X) > 0$) et $\forall \lambda \in \mathbb{R},\ H(\lambda) \geqslant 0$ (une variance est un réel positif ou nul).

Ainsi H ne peut avoir deux racines distinctes (dans le cas contraire H change de signe deux fois). Le discriminant réduit de H est donc négatif ou nul.

Par conséquent $\big(\mathrm{cov}(X, Y)\big)^2 - V(X)\, V(Y) \leqslant 0$. Finalement :

$$\boxed{\big(\mathrm{cov}(X, Y)\big)^2 \leqslant V(X)\, V(Y).}$$

- Supposons que $\big(\mathrm{cov}(X, Y)\big)^2 = V(X)\, V(Y)$. Alors le discriminant réduit de H est nul. Ainsi H possède une racine réelle et une seule.

Par conséquent il existe un réel λ tel que $H(\lambda) = 0$. Alors $V(\lambda\, X + Y) = 0$. Donc il existe un réel μ tel que l'on ait $\lambda\, X + Y = \mu$ avec la probabilité 1.

- Réciproquement supposons qu'il existe deux réels λ et μ tels que l'on ait $\lambda\, X + Y = \mu$ avec la probabilité 1.

Alors $H(\lambda) = V(\lambda\, X + Y) = 0$. H admet au moins un zéro dans $\mathbb{R}$; son discriminant réduit $\big(\mathrm{cov}(X, Y)\big)^2 - V(X)\, V(Y)$ est alors positif ou nul. Or nous avons vu plus haut que $\big(\mathrm{cov}(X, Y)\big)^2 - V(X)\, V(Y) \leqslant 0$.

Alors $\big(\mathrm{cov}(X, Y)\big)^2 - V(X)\, V(Y) = 0$. Ainsi $\big(\mathrm{cov}(X, Y)\big)^2 = V(X)\, V(Y)$.

$\boxed{\big(\text{cov}(X,Y)\big)^2 = V(X)\,V(Y)}$ si et seulement s'il existe deux nombres réels λ et μ tels que $\lambda\,X + Y = \mu$ avec une probabilité égale à 1.

c) On suppose sans doute ici que $V(Y) > 0$.

$\big(\text{cov}(X,Y)\big)^2 \leqslant V(X)\,V(Y)$ donc $-\sqrt{V(X)\,V(Y)} \leqslant \text{cov}(X,Y) \leqslant \sqrt{V(X)\,V(Y)}$.

Alors $-1 \leqslant \rho = \dfrac{\text{cov}(X,Y)}{\sqrt{V(X)\,V(Y)}} \leqslant 1$.

$$\boxed{-1 \leqslant \rho \leqslant 1.}$$

$$\rho = 1 \text{ ou } -1 \Longleftrightarrow \rho^2 = 1 \Longleftrightarrow \frac{\big(\text{cov}(X,Y)\big)^2}{V(X)\,V(Y)} = 1 \Longleftrightarrow \big(\text{cov}(X,Y)\big)^2 = V(X)\,V(Y).$$

$\rho = 1$ ou -1 si et seulement s'il existe deux nombres réels λ et μ tels que $\lambda\,X + Y = \mu$ avec une probabilité égale à 1.

On peut encore écrire :

$\rho = 1$ ou -1 si et seulement s'il existe deux nombres réels λ' et μ tels que $Y = \lambda'\,X + \mu$ avec une probabilité égale à 1.

$\rho = 1$ ou -1 si et seulement s'il existe deux nombres réels γ et δ tels que $X = \gamma\,Y + \delta$ avec une probabilité égale à 1.

$\rho = 1$ ou -1 si et seulement X (resp. Y) est une fonction quasi-affine de Y (resp. X) !

6) Etude des portefeuilles dans le cas $n = 2$

a) $R = x\,R_1 + (1-x)\,R_2$. La linéarité de l'espérance donne $E(R) = x\,E(R_1) + (1-x)\,E(R_2)$. Ainsi

$$\boxed{E(R) = x\,m_1 + (1-x)\,m_2.}$$

$V(R) = V(x\,R_1) + V((1-x)\,R_2) + 2\,\text{cov}(x\,R_1, (1-x)\,R_2) = x^2\,V(R_1) + (1-x)^2\,V(R_2) + 2x(1-x)\ \text{cov}(R_1, R_2)$.

Comme $V(R_1) = \sigma_1^2$, $V(R_2) = \sigma_2^2$ et $\text{cov}(R_1, R_2) = \rho\,\sigma_1\,\sigma_2$ on obtient :

$$\boxed{V(R) = x^2\,\sigma_1^2 + (1-x)^2\,\sigma_2^2 + 2x(1-x)\,\rho\,\sigma_1\,\sigma_2.}$$

b) Ici m_1 et m_2 sont distincts. $m = E(R) = x\,m_1 + (1-x)\,m_2$.

Alors $x = \dfrac{m - m_2}{m_1 - m_2}$ et $1 - x = 1 - \dfrac{m - m_2}{m_1 - m_2} = \dfrac{m_1 - m}{m_1 - m_2}\cdot$

$$V = V(R) = \left(\frac{m - m_2}{m_1 - m_2}\right)^2 \sigma_1^2 + \left(\frac{m_1 - m}{m_1 - m_2}\right)^2 \sigma_2^2 + 2\,\frac{m - m_2}{m_1 - m_2}\,\frac{m_1 - m}{m_1 - m_2}\ \rho\,\sigma_1\,\sigma_2.$$

$$V=\frac{1}{(m_1-m_2)^2}\Big[(m^2+m_2^2-2m\,m_2)\,\sigma_1^2+(m_1^2+m^2-2m_1\,m)\,\sigma_2^2+2\,(-m^2+m\,m_1+m\,m_2-m_1m_2)\,\rho\,\sigma_1\,\sigma_2\Big].$$

$$V=\frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2-2\,\rho\,\sigma_1\,\sigma_2}{(m_1-m_2)^2}\,m^2-2\,\frac{m_2\,\sigma_1^2+m_1\,\sigma_2^2-\rho\,(m_1+m_2)\,\sigma_1\,\sigma_2}{(m_1-m_2)^2}\,m+\frac{m_2^2\,\sigma_1^2+m_1^2\,\sigma_2^2-2\rho\,m_1\,m_2\,\sigma_1\,\sigma_2}{(m_1-m_2)^2}.$$

$V=a-2bm+cm^2$ avec $a=\dfrac{m_2^2\,\sigma_1^2+m_1^2\,\sigma_2^2-2\rho\,m_1\,m_2\,\sigma_1\,\sigma_2}{(m_1-m_2)^2}$, $b=\dfrac{m_2\,\sigma_1^2+m_1\,\sigma_2^2-\rho\,(m_1+m_2)\,\sigma_1\,\sigma_2}{(m_1-m_2)^2}$

et $c=\dfrac{\sigma_1^2+\sigma_2^2-2\,\rho\,\sigma_1\,\sigma_2}{(m_1-m_2)^2}$.

Notons que a, b et c sont des réels indépendants de x. Ne reste plus qu'à vérifier que a et c sont strictement positifs.

Pour cela il suffit de vérifier que $a'=m_2^2\,\sigma_1^2+m_1^2\,\sigma_2^2-2\rho\,m_1\,m_2\,\sigma_1\,\sigma_2$ et $c'=\sigma_1^2+\sigma_2^2-2\,\rho\,\sigma_1\,\sigma_2$ sont strictement positifs.

C'est assez clair pour c' car $c'=(\sigma_1-\sigma_2)^2+2(1-\rho)\,\sigma_1\sigma_2$ et σ_1, σ_2, $1-\rho$ sont des réels strictement positifs.

Montrons que a' est strictement positif. Si $m_1=0$, $a'=m_2^2\,\sigma_1^2$ est strictement positif car $m_2\neq m_1=0$. Même chose si $m_2=0$. Supposons maintenant $m_1\,m_2\neq 0$.

$2\rho\,m_1\,m_2\,\sigma_1\,\sigma_2\geqslant -2|\rho|\,|m_1|\,|m_2|\,\sigma_1\,\sigma_2\boxed{>}-2\,|m_1|\,|m_2|\,\sigma_1\,\sigma_2$ (car $-|\rho|>-1$ et $|m_1|\,|m_2|\,\sigma_1\,\sigma_2>0$).

Alors $a'=m_2^2\,\sigma_1^2+m_1^2\,\sigma_2^2-2\rho\,m_1\,m_2\,\sigma_1\,\sigma_2\boxed{>}m_2^2\,\sigma_1^2+m_1^2\,\sigma_2^2-2|m_1|\,|m_2|\,\sigma_1\,\sigma_2=(|m_2|\,\sigma_1-|m_1|\,\sigma_2)^2\geqslant 0$.

Finalement a' et c' sont strictement positifs.

$a=\dfrac{m_2^2\,\sigma_1^2+m_1^2\,\sigma_2^2-2\rho\,m_1\,m_2\,\sigma_1\,\sigma_2}{(m_1-m_2)^2}$ et $c=\dfrac{\sigma_1^2+\sigma_2^2-2\,\rho\,\sigma_1\,\sigma_2}{(m_1-m_2)^2}$ sont des réels strictement positifs

7) Matrice de variances-covariances des variables aléatoires R_1, ..., R_n

a) Soit x un élément de $\mathbb{R}^n$ de composantes x_1, x_2, ..., x_n dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

Posons, pour simplifier les écritures : $\forall(i,j)\in[\![1,n]\!]^2$, $c_{ij}=\mathrm{cov}(R_i,R_j)$ et $R=\displaystyle\sum_{i=1}^n x_i\,R_i$.

$V(R)=\mathrm{cov}(R,R)=\mathrm{cov}\left(\sum\limits_{i=1}^n x_i\,R_i,\ \sum\limits_{j=1}^n x_j\,R_j\right)$. Par bilinéarité de la covariance il vient :

$$V(R)=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n x_i\,x_j\ \mathrm{cov}(R_i,R_j)=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n x_i\,x_j\,c_{ij}=\sum_{i=1}^n\left(x_i\sum_{j=1}^n c_{ij}\,x_j\right)={}^t xCx.$$

$$\forall x=(x_1,x_2,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n,\ V\left(\sum_{i=1}^n x_i\,R_i\right)={}^t xCx.$$

b) Soit $x=(x_1,x_2,\dots,x_n)$ un élément de $\mathbb{R}^n$. ${}^t xCx=V\left(\sum\limits_{i=1}^n x_i\,R_i\right)\geqslant 0$.

${}^t xCx$ est nul si et seulement si $V\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\, R_i\right) = 0$; autrement dit si et seulement si il existe une constante μ telle que $\sum_{i=1}^{n} x_i\, R_i = \mu$ avec une probabilité égale à 1.

$\forall x \in \mathbb{R}^n,\ {}^t xCx \geqslant 0$. ${}^t xCx$ est strictement positif pour tout élément x non nul de $\mathbb{R}^n$ si et seulement si il n'existe pas de combinaison linéaire de $(R_1, R_2, \ldots, R_n)$ qui soit constante avec une probabilité 1 autre que la combinaison linéaire dont tous les coefficients sont nuls.

8) Etude des portefeuilles efficaces dans le cas général

a) x_1, x_2, ..., x_n sont les proportions des n actifs A_1, A_2, ..., A_n du portefeuille. Ainsi $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1$.

$m = E(R) = E(x_1\, R_1 + x_2\, R_2 + \cdots + x_n\, R_n) = x_1\, E(R_1) + x_2\, E(R_2) + \cdots + x_n\, E(R_n)$.

$m = x_1\, m_1 + x_2\, m_2 + \cdots + x_n\, m_n$.

$$\boxed{x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1 \text{ et } m_1\, x_1 + m_2\, x_2 + \cdots + m_n\, x_n = m.}$$

b) Posons $\mathcal{S} = \{y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n \mid y_1 + y_2 + \cdots + y_n = 1 \text{ et } m_1\, y_1 + m_2\, y_2 + \cdots + m_n\, y_n = m\}$.

Le portefeuille considéré ici est efficace si et seulement si :

$$\forall y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathcal{S},\ V\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\, R_i\right) \leqslant V\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\, R_i\right).$$

Autrement dit si et seulement si $\forall y \in \mathcal{S},\ {}^t xCx \leqslant {}^t yCy$ ou $\forall y \in \mathcal{S},\ Q(x) \leqslant Q(y)$.

Soit $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ un élément de $\mathbb{R}^n$. Posons $h = (h_1, h_2, \ldots, h_n) = y - x$. $y = x + h$.

$y \in \mathcal{S} \Leftrightarrow (x_1 + h_1) + (x_2 + h_2) + \cdots + (x_n + h_n) = 1$ et $m_1\,(x_1 + h_1) + m_2\,(x_2 + h_2) + \cdots + m_n\,(x_n + h_n) = m$.

Or $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1$ et $m_1\, x_1 + m_2\, x_2 + \cdots + m_n\, x_n = m$.

Par conséquent $y \in S \Longleftrightarrow h_1 + h_2 + \cdots + h_n = 0$ et $m_1\, h_1 + m_2\, h_2 + \cdots + m_n\, h_n = 0$.

Ainsi $\mathcal{S} = \{x + h \mid h = (h_1, h_2, \ldots, h_n) \in \mathbb{R}^n, h_1 + h_2 + \cdots + h_n = 0 \text{ et } m_1\, h_1 + m_2\, h_2 + \cdots + m_n\, h_n = 0\}$.

Le portefeuille considéré ici est efficace si et seulement si on a $Q(x) \leqslant Q(x + h)$ pour tout vecteur h de $\mathbb{R}^n$ de composantes h_1, h_2, ..., h_n telles que :

$$h_1 + h_2 + \cdots + h_n = 0 \text{ et } m_1\, h_1 + m_2\, h_2 + \cdots + m_n\, h_n = 0.$$

c) Considérons les éléments $u = (1, 1, \ldots, 1)$ et $v = (m_1, m_2, \ldots, m_n)$ de $\mathbb{R}^n$. u et v sont linéairement indépendants car, par hypothèse, les espérances m_1, m_2, ..., m_n ne sont pas toutes égales.

Notons que : $\mathcal{S} = \{y \in \mathbb{R}^n \mid < u, y >= 1 \text{ et } < v, y >= m\}$.

Ou $\mathcal{S} = \{x + h \mid h = (h_1, h_2, \ldots, h_n) \in \mathbb{R}^n,\ < u, h >=< v, h >= 0\}$.

Ainsi le portefeuille considéré ici est efficace si et seulement si on a $Q(x) \leqslant Q(x+h)$ pour tout vecteur h de $\mathbb{R}^n$ tel que $< u, h >=< v, h >= 0$. Nous nous retrouvons alors dans la situation de I 4).

I 4) indique alors que le portefeuille considéré est efficace si et seulement si x appartient à $\text{Vect}(C^{-1}u, C^{-1}v)$.

N'oublions pas que $< u, x >= 1$ et $< v, x >= m$.

La dernière remarque de I 4) nous permet de dire qu'il existe un unique élément de $\text{Vect}(C^{-1}u, C^{-1}v)$ dont le produit scalaire avec u est 1 et le produit scalaire avec v est m.

Alors il existe un unique portefeuille efficace.

Posons $a = \dfrac{{}^t v C^{-1} v}{\left({}^t u C^{-1} u\right)\left({}^t v C^{-1} v\right) - \left({}^t u C^{-1} v\right)^2}$, $b = \dfrac{{}^t u C^{-1} v}{\left({}^t u C^{-1} u\right)\left({}^t v C^{-1} v\right) - \left({}^t u C^{-1} v\right)^2}$ et $c = \dfrac{{}^t u C^{-1} u}{\left({}^t u C^{-1} u\right)\left({}^t v C^{-1} v\right) - \left({}^t u C^{-1} v\right)^2}$.

Rappelons que a et c sont des réels strictemen positifs.

I 4) nous permet encore de dire que pour ce portefeuille efficace : $x = \alpha\, C^{-1}u + \beta\, C^{-1}v$ avec $\alpha = a - b\,m$ et $\beta = -b + c\,m$.

De plus $V = Q(x) = a - 2b\,m + c\,m^2$.

Il existe un portefeuille efficace et un seul.

Pour ce portefeuille il existe trois réels a, b et c, avec $a > 0$ et $c > 0$ tels que $V = V(R) = a - 2b\,m + c\,m^2$.

d) La courbe représentative de la fonction $f : m \to a - 2b\,m + c\,m^2$ est une parabole.

Notons que cette fonction est continue et strictement décroissante (resp. croissante) sur $]-\infty, b/c]$ (resp. $[b/c, +\infty[$). Notons également que : $\lim\limits_{m \to -\infty} f(m) = \lim\limits_{m \to +\infty} f(m) = +\infty$.

Alors f définie une bijection de $]-\infty, b/c]$ (resp. $[b/c, +\infty[$) sur $[f(b/c), +\infty[$.

Tout élément V de $[f(b/c), +\infty[$ possède par f deux antécédents ; l'un m_1 dans $]-\infty, b/c]$ et l'autre m_2 dans $[b/c, +\infty[$).

On veut donc bien croire que l'investisseur soucieux du rendement maximum sera plus intéressé par m_2 que par m_1 pour un risque identique.

Seuls les portefeuilles dont l'espérance m et la variance V appartiennent à la portion de la courbe représentative de f telle que $m \geqslant b/c$ sont intéressants pour les investisseurs.