Barème sur 71. On divise par 3. On note sur 23,7. Il faut 30 pts (moy. 60pt) pour avoir la (moy. 10) p 1

PARTIE 1 Sur 23

Q1 Lois de la durée de marche X_i d'une machine. Sur 18

3 a) Soient t et h deux réels tels que $t \geq 0$ et $h > 0$.

$[t, +\infty[= [t, t+h[\cup [t+h, +\infty[$ (réunion disjointe).

Par conséquent $\underline{\{X_i \geq t\} = \{t \leq X_i < t+h\} \cup \{X_i \geq t+h\}}$ et cette réunion est disjointe.

Il en résulte que $p(X_i \geq t) = p(t \leq X_i < t+h) + p(X_i \geq t+h)$.

Donc $p(t \leq X_i < t+h) = p(X_i \geq t) - p(X_i \geq t+h)$. $\underline{p(t \leq X_i < t+h) = g_i(t) - g_i(t+h)}$.

$p(t \leq X_i < t+h) = p(X_i < t+h / X_i \geq t)\, p(X_i \geq t) = (ah + h\varepsilon(h))\, g_i(t)$

$\{t \leq X_i < t+h\} = \{t \leq X_i\} \cap \{X_i < t+h\}$

$\underline{\underline{p(t \leq X_i < t+h) = (ah + h\varepsilon(h))\, g_i(t)}}$. $\underline{\underline{g_i(t) - g_i(t+h) = (ah + h\varepsilon(h))\, g_i(t)}}$.

8 b) $\{X_i \geq t\} \supset \{X_i \geq t+h\}$ donc $p(X_i \geq t+h) \leq p(X_i \geq t)$, $\underline{g_i(t+h) \leq g_i(t)}$.

De plus : $g_i(t) = p(X_i \geq t) \leq 1$ et $(ah + h\varepsilon(h)) = p(X_i < t+h / X_i \geq t) \geq 0$

donc $\underline{g_i(t)\,(ah + h\varepsilon(h)) \leq ah + h\varepsilon(h) = [a + \varepsilon(h)]\, h}$.

Par conséquent : $\underline{\underline{0 \leq g_i(t) - g_i(t+h) \leq [a + \varepsilon(h)]\, h}}$ ... pour $(t, h) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^*$.

Supposons maintenant que : $0 < h \leq t$; $t - h \geq 0$. En remplaçant t par $t-h$ dans ce qui précède on obtient : $\underline{\underline{0 \leq g_i(t-h) - g_i(t) \leq [a + \varepsilon(h)]\, h}}$ pour $(t, h) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ et $h \leq t$

Soit $t \in \mathbb{R}_+$. $\forall h \in \mathbb{R}_+^*$, $0 \leq g_i(t) - g_i(t+h) \leq [a + \varepsilon(h)]\, h$

Par encadrement il vient : $\lim_{h \to 0^+} (g_i(t) - g_i(t+h)) = 0$ ou $\lim_{h \to 0^+} g_i(t+h) = g_i(t)$ c'est à dire : $\lim_{x \to t^+} g_i(x) = g_i(t)$. $\underline{\underline{g_i \text{ est continue à droite en } t}}$.

$\forall h \in \mathbb{R}_+^*$, $\dfrac{g_i(t) - g_i(t+h)}{t - (t+h)} = \dfrac{ah + h\varepsilon(h)}{-h}\, g_i(t) = -(a + \varepsilon(h))\, g_i(t)$

$\forall h \in \mathbb{R}_+^*$, $\dfrac{g_i(t+h) - g_i(t)}{(t+h) - t} = -(a + \varepsilon(h))\, g_i(t)$; Par conséquent $\lim_{h \to 0^+} \dfrac{g_i(t+h) - g_i(t)}{(t+h) - t} = -a\, g_i(t)$

$\underline{\underline{\text{Pour tout } t \in \mathbb{R}_+, \ g_i \text{ est dérivable à droite en } t \text{ et } (g_i)'_d(t) = -a\, g_i(t).}}$

<u>Remarque</u>.. la continuité à droite n'était pas indispensable et résultait de la dérivabilité à droite ... à gauche c'est autre chose. Voyons.

Soit $t \in \mathbb{R}_+^*$.

$\forall h \in]0,t]$, $0 \leq g_i(t-h) - g_i(t) \leq [a+\varepsilon(h)]h$

Par encadrement on obtient : $\lim\limits_{h \to 0^+} (g_i(t-h) - g_i(t)) = 0$; c'est à dire $\lim\limits_{h \to 0^+} g_i(t-h) = g_i(t)$.

Donc $\lim\limits_{x \to t^-} g_i(x) = g_i(t)$; <u>g_i est continue à gauche en t.</u>

$\forall h \in]0,t]$, $\dfrac{g_i(t-h) - g_i(t)}{(t-h)-t} = \dfrac{(ah + h\varepsilon(h))g_i(t-h)}{(t-h)-t} = -(a+\varepsilon(h))g_i(t-h)$

Or $\lim\limits_{h \to 0^+} [-(a+\varepsilon(h))g_i(t-h)] = -a g_i(t)$; $\lim\limits_{h \to 0^+} \dfrac{g_i(t-h) - g_i(t)}{(t-h)-t} = -a g_i(t)$

Pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, g_i est dérivable à gauche en t et <u>$(g_i)'_g(t) = -a g_i(t)$.</u>

c) Soit $t \in \mathbb{R}_+^*$. g_i est dérivable à droite et à gauche en t et $(g_i)'_g(t) = (g_i)'_d(t) = -a g_i(t)$.

Par conséquent g_i est dérivable en t et $g_i'(t) = -a g_i(t)$.

De plus g_i est dérivable à droite en 0 et $(g_i)'_d(0) = -a g_i(0)$.

Ceci autorise à dire que <u>g_i est dérivable sur $[0,+\infty[$ et que $\forall t \in [0,+\infty[$, $g_i'(t) = -a g_i(t)$.</u>

(Ne pas oublier que g_i est une application de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$).

Pour $\forall t \in \mathbb{R}_+$, $h_i(t) = e^{at} g_i(t)$. h_i est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ comme produit de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+$.

$\forall t \in \mathbb{R}_+$, $h_i'(t) = a e^{at} g_i(t) + e^{at}(-a g_i(t)) = 0$. h_i est donc de dérivée nulle sur l'intervalle $[0,+\infty[$ donc h_i est constante.

En particulier : $\forall t \in [0,+\infty[$, $h_i(t) = h_i(0) = g_i(0) = p(X_i \geq 0) = 1$.

$\forall t \in \mathbb{R}_+$, $e^{at} g_i(t) = 1$.

<u>$\forall t \in \mathbb{R}_+$, $g_i(t) = e^{-at}$.</u>

d) Notons F_i la fonction de répartition de X_i.

5 $\forall t\in\mathbb{R}_-^*$, $F_i(t)=p(X_i\leq t)=0$.

$\forall t\in\mathbb{R}_+$, $F_i(t)=p(X_i\leq t)=p(X_i=t)+p(X_i<t)=p(X_i=t)+1-p(X_i\geq t)$.

Calculons alors $p(X_i=t)$ pour tout $t\in\mathbb{R}_+$.

Soit $t\in\mathbb{R}_+$. $\forall h\in\mathbb{R}_+^*$, $\{X_i=t\}\subset\{t\leq X_i<t+h\}$

$$\forall h\in\mathbb{R}_+^*,\ 0\leq p(X_i=t)=p(t\leq X_i<t+h)=g_i(t)-g_i(t+h)$$

Comme $\lim_{h\to 0^+}(g_i(t)-g_i(t+h))=0$, nécessairement : $p(X_i=t)=0$.

Ainsi $\forall t\in\mathbb{R}_+$, $F_i(t)=p(X_i=t)+1-p(X_i\geq t)=1-p(X_i\geq t)=1-g_i(t)=1-e^{-at}$

$$\forall t\in\mathbb{R},\ F_i(t)=\begin{cases}0 \text{ si } t\in]-\infty,0[\\ 1-e^{-at} \text{ si } t\in[0,+\infty[\end{cases}$$

X_i suit une loi exponentielle de paramètre a.

Posons $\forall t\in\mathbb{R}_-^*$, $\varphi(t)=0$ et $\forall t\in\mathbb{R}_+$, $\varphi(t)=ae^{-at}$. φ est une densité de X_i.

(Q2) Etude de la loi de la variable aléatoire $N(t)$. 5

$N(t)$ compte le nombre de machines en panne à l'instant t et une machine est en panne à l'instant t avec la probabilité $1-e^{-at}$

Ainsi $N(t)$ suit une loi binômiale de paramètres n et $1-e^{-at}$

$E(N(t))=n(1-e^{-at})$. $\forall k\in[\![0,n]\!]$, $p_k(t)=C_n^k(1-e^{-at})^k(e^{-at})^{n-k}$

$\lim_{t\to+\infty}e^{-at}=0$ et $\lim_{t\to+\infty}(1-e^{-at})=1$; ainsi $\lim_{t\to+\infty}p_k(t)=\begin{cases}0 \text{ si } k\in[\![0,n-1]\!]\\ 1 \text{ si } k\end{cases}$

Ce résultat est prévisible ! Si on ne répare pas il arrivera un instant où toutes les machines seront en panne non ?

1o (Q1) $\frac{1}{a)}$ si $k<i$: $p(N(t+h)=k / N(t)=i) = 0$ puisque l'on ne répare pas !

$\frac{3}{}$ b) Rappelons que : $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $p(X_i < t+h / X_i \geq t) = ah + h\,\varepsilon(h)$

Ainsi $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $p(X_i \geq t+h / X_i \geq t) = 1 - p(X_i < t+h / X_i \geq t) = 1 - ah - h\,\varepsilon(h)$.

Cela signifie que, si $i \in [\![1,n]\!]$, la probabilité pour que la $i^{ème}$ machine fonctionne à l'instant $t+h$ sachant qu'elle n'était pas en panne à l'instant t est : $1-ah-h\,\varepsilon(h)$

Supposons que $\{N(t)=k\}$ soit réalisé. Exactement k machines sont en panne à l'instant t. Exactement $n-k$ machines fonctionnent à l'instant : $\Pi_{i_1}, \Pi_{i_2}, \dots, \Pi_{i_{n-k}}$

Alors $\{N(t+h)=k\}$ se réalise si et seulement si $\Pi_{i_1}, \Pi_{i_2}, \dots, \Pi_{i_{n-k}}$ fonctionnent encore à l'instant $t+h$.

1) les machines fonctionnent de manière indépendantes

2) La probabilité que Π_{i_j} fonctionne à l'instant $t+h$ sachant qu'elle fonctionnait à l'instant t est $1-ah-h\,\varepsilon(h)$

Ainsi : $p(N(t+h)=k / N(t)=k) = (1-ah-h\,\varepsilon(h))^{n-k}$.

$$(1+u)^{n-k} = 1 + (n-k)u + u\varphi(u) \text{ avec } \lim_{u \to 0} \varphi(u) = 0$$

$$(1-ah-h\,\varepsilon(h))^{n-k} = 1 + (n-k)(-ah-h\,\varepsilon(h)) + (-ah-h\,\varepsilon(h))\varphi(-ah-h\,\varepsilon(h))$$

$$(1-ah-h\,\varepsilon(h))^{n-k} = 1 - a(n-k)h + h\underbrace{\left[-(n-k)\varepsilon(h) - (a-\varepsilon(h))\varphi(-ah-h\,\varepsilon(h))\right]}_{\varepsilon'(h).}$$

$\lim_{h \to 0} \varepsilon'(h) = 0$ car $\lim_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0$ et $\lim_{u \to 0} \varphi(u) = 0$

Ainsi $(1-ah-h\,\varepsilon(h))^{n-k} = 1 - a(n-k)h + h\,\varepsilon'(h)$ avec $\lim_{h \to 0} \varepsilon'(h) = 0$.

$\frac{3}{}$ c) Supposons $\{N(t)=k-1\}$ réalisé ; à l'instant t : $n-(k-1)$ machines fonctionnent. $\{N(t+h)=k\}$ se réalise alors si l'une de ces machines tombe en panne et si les $n-k$ autres restent en fonctionnement. Alors $p(N(t+h)=k / N(t)=k-1) = (n-k+1)(ah+h\,\varepsilon(h))(1-ah-h\,\varepsilon(h))^{n-k}$.

$ah + h\varepsilon(h) = ah + o(h)$ et $(1 - ah - h\varepsilon(h))^{n-k} = 1 - a(n-k)h + o(h)$.

Alors $p(N(t+h)=k / N(t)=k-1) = (n-k+1)(ah)(1 - a(n-k)h) + o(h)$.

$p(N(t+h)=k/N(t)=k-1) = a(n-k+1)\,h + o(h)$ ou

$p(N(t+h)=k/N(t)=k-1) = a(n-k+1)h + h\,\varepsilon''(h)$ avec $\lim\limits_{h\to 0} \varepsilon''(h) = 0$.

3 d) $k \geq i+2$. Supposons que $\{N(t)=i\}$ soit réalisé. $n-i$ machines fonctionnent à l'instant t.

$\{N(t+h)=k\}$ réalise alors si parmi ces $n-i$ machines :

→ $k-i$ tombent en panne → $n-k$ continuent à fonctionner.

Alors $p(N(t+h)=k / N(t)=i) = C_{n-i}^{k-i}\ (ah + h\,\varepsilon(h))^{k-i}\ (1 - ah - h\,\varepsilon(h))^{n-k}$

$p(N(t+h)=k / N(t)=i) = h^2 \left[C_{n-i}^{k-i}\ h^{k-i-2} (a + \varepsilon(h))^{k-i} (1 - ah - h\,\varepsilon(h))^{n-k} \right]$

Ainsi $\lim\limits_{h\to 0} \frac{1}{h}\left[p(N(t+h)=k/N(t)=i)\right] = 0$; $p(N(t+h)=k/N(t)=i) = o(h)$ si $k \geq i+2$

$p(N(t+h)=k/N(t)=i) = h\,\varepsilon'''(h)$ avec $\lim\limits_{h\to 0} \varepsilon'''(h) = 0$ pour $k \geq i+2$.

II (Q2) Etude des probabilités de panne $P_k(t)$ $(0 \leq k \leq n)$.

3 a) $(\{N(t)=i\})_{i \in [\![0,n]\!]}$ est un système complet d'événements.

donc $p(N(t+h)=k) = \sum\limits_{i=0}^{n} p(N(t+h)=k/N(t)=i)\, p(N(t)=i)$

$p(N(t+h)=k) = \sum\limits_{i=0}^{k} p(N(t+h)=k/N(t)=i)\, p(N(t)=i)$

$p(N(t+h)=k) = \sum\limits_{i=0}^{k} p(N(t+h)=k/N(t)=i)\, P_i(t)$

$$p(N(t+h)=k/N(t)=i) = \begin{cases} 1-(n-k)ah + o(h) & \text{si } i=k \\ (n-k+1)ah + o(h) & \text{si } i=k-1 \\ o(h) & \text{si } i \leq k-2 \end{cases}$$

Ainsi $p(N(t+h)=k)=(1-(n-k)ah)p_k(t)+(n-k+1)ah\,p_{k-1}(t)+o(h)$.

$$p_k(t+h)=(1-(n-k)ah)\,p_k(t)+(n-k+1)ah\,p_{k-1}(t)+o(h).$$

$$\underline{\underline{p_k(t+h)-p_k(t)=-(n-k)ah\,p_k(t)+(n-k+1)ah\,p_{k-1}(t)+o(h).}}$$

$$\underline{\underline{p_k(t-h)-p_k(t)=-(n-k)ah\,p_k(t-h)+(n-k+1)ah\,p_{k-1}(t-h)+o(h).}}$$

5 b) Soit $t\in[0,+\infty[$. $\lim_{h\to0^+}\left[-(n-k)ah\,p_k(t)+(n-k+1)ah\,p_{k-1}(t)+o(h)\right]=0$;

donc $\lim_{h\to0^+}(p_k(t+h)-p_k(t))=0$; ainsi $\underline{\underline{p_k \text{ est continue à droite en } 0.}}$

Soit $t\in]0,+\infty[$.

$p_k(t-h)-p_k(t)=-(n-k)ah\,p_k(t-h)+(n-k+1)ah\,p_{k-1}(t-h)+h\,\check{\varepsilon}(h)$ avec $\lim_{h\to0}\check{\varepsilon}(h)=0$.

$$|p_k(t-h)-p_k(t)|\leq(n-k)a|h|\,|p_k(t-h)|+(n-k+1)a|h|\,|p_{k-1}(t-h)|+|h|\,|\check{\varepsilon}(h)|$$

$$|p_k(t-h)-p_k(t)|\leq(n-k)a|h|+(n-k+1)a|h|+|h|\,|\check{\varepsilon}(h)|.$$

$\lim_{h\to0}\left[(n-k)a|h|+(n-k+1)a|h|+|h|\,|\check{\varepsilon}(h)|\right]=0$ donc $\lim_{h\to0^+}(p_k(t-h)-p_k(t))=0$.

$\lim_{h\to0^+}p_k(t-h)=p_k(t)$; $\underline{\underline{p_k \text{ est continue à gauche en } t.}}$

Finalement $\underline{\underline{p_k \text{ est continue sur } [0,+\infty[.}}$

Soit $t\in\mathbb{R}_+$ et soit $h\in\mathbb{R}_+^*$.

$$\frac{p_k(t+h)-p_k(t)}{h}=-(n-k)a\,p_k(t)+(n-k+1)a\,p_{k-1}(t)+o(1).$$

Ainsi $\lim_{h\to0}\frac{p_k(t+h)-p_k(t)}{h}=-(n-k)a\,p_k(t)+(n-k+1)a\,p_{k-1}(t)$.

p_k est dérivable à droite en t et $(p_k)'_d(t)=-(n-k)a\,p_k(t)+(n-k+1)a\,p_{k-1}(t)$.

Soit $t \in]0,+\infty[$. Soit $h \in]0,t[$

$$\frac{p_\ell(t-h)-p_\ell(t)}{h} = -(n-\ell)a\,p_\ell(t-h)+(n-\ell+1)a\,p_{\ell-1}(t-h)+o(1).$$

Ainsi $$\lim_{h\to 0}\frac{p_\ell(t-h)-p_\ell(t)}{h} = -(n-\ell)a\,p_\ell(t)+(n-\ell+1)a\,p_{\ell-1}(t)$$

p_ℓ est alors dérivable à gauche en t et $(p_\ell)'_g(t) = -(n-\ell)a\,p_\ell(t)+(n-\ell+1)a\,p_{\ell-1}(t)$

4) Nous avons que $\forall t\in]0,+\infty[$, $(p_\ell)'_d(t)=(p_\ell)'_g(t)$.

Ce qui précède autorise à dire que p_ℓ est dérivable sur $[0,+\infty[$ et

$\forall t\in [0,+\infty[$, $p'_\ell(t) = -(n-\ell)a\,p_\ell(t)+(n-\ell+1)a\,p_{\ell-1}(t)$

Soit $t\in\mathbb{R}_+$ et soit $x\in\mathbb{R}$.

$$\frac{\partial G}{\partial t}(x,t)=\sum_{\ell=0}^{n}p'_\ell(t)x^\ell = -\sum_{\ell=0}^{n}(n-\ell)a\,p_\ell(t)x^\ell+\sum_{\ell=0 \text{ ou } \boxed{1}}^{n}(n-\ell+1)a\,p_{\ell-1}(t)x^\ell$$

$$\frac{\partial G}{\partial t}(x,t)=-a\sum_{\ell=0}^{n}(n-\ell)p_\ell(t)x^\ell+a\sum_{\ell=0}^{n-1 \text{ ou } \boxed{n}}(n-\ell)\,p_\ell(t)x^{\ell+1}$$

$$\frac{\partial G}{\partial t}(x,t)=na\sum_{\ell=0}^{n}(x^{\ell+1}-x^\ell)p_\ell(t)+a\sum_{\ell=0 \text{ ou } \underline{1}}^{n}(x^\ell-x^{\ell+1})\ell\,p_\ell(t)$$

$$\frac{\partial G}{\partial t}(x,t)=na(x-1)\sum_{\ell=0}^{n}p_\ell(t)x^\ell+ax(1-x)\sum_{\ell=1}^{n}\ell\,p_\ell(t)x^{\ell-1}$$

$$\frac{\partial G}{\partial t}(x,t)=na(x-1)\,G(x,t)-ax(x-1)\frac{\partial G}{\partial x}(x,t).$$

$\forall t\in[0,+\infty[$, $\forall x\in\mathbb{R}$, $\dfrac{\partial G}{\partial t}(x,t)=na(x-1)\,G(x,t)-ax(x-1)\dfrac{\partial G}{\partial x}(x,t).$

⚠ Dans la suite j'utiliserai des polynômes plus que des fonctions polynômes donc des X à la place de x lorsque cela sera possible …

B (Q3) Etude d'un endomorphisme auxiliaire.

2 a) Soit $U \in \mathbb{R}_n[X]$. $\deg U \leq n$ donc $\deg(na(X-1)U) \leq n+1$ et $\deg(aX(1-X)U') \leq n+1$

Ainsi $V = na(1-X)U - aX(1-X)U'$ a un degré inférieur ou égal à $n+1$.

Notons α_n le coefficient de X^n dans U.

Le coefficient de X^{n+1} dans V est alors : $na(-\alpha_n) - a(-1)(n\alpha_n) = 0$

Alors $\deg V \leq n$.

Ainsi f est une application de $\mathbb{R}_n[X]$ dans lui-même.

$\forall (U_1,U_2) \in \mathbb{R}_n[X]^2, \forall \lambda \in \mathbb{R}, f(\lambda U_1 + U_2) = na(X-1)(\lambda U_1 + U_2) - aX(X-1)(\lambda U_1 + U_2)'$

$= na(X-1)(\lambda U_1 + U_2) - aX(X-1)(\lambda U_1' + U_2')$

$= \lambda[na(X-1)U_1 - aX(X-1)U_1'] + [na(X-1)U_2 - aX(X-1)U_2']$.

$\forall (U_1,U_2) \in \mathbb{R}_n[X]^2, \forall \lambda \in \mathbb{R}, f(\lambda U_1 + U_2) = \lambda f(U_1) + f(U_2)$.

f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

6 b) $na(X-1)P - aX(X-1)P' = \lambda P$

Ainsi $na(0-1)P(0) - a\times 0\times(0-1)P'(0) = \lambda P(0)$; $-naP(0) = \lambda P(0)$; $(\lambda + na)P(0) = 0$.

$na(1-1)P(1) - a\,1\,(1-1)P'(1) = \lambda P(1)$; $\lambda P(1) = 0$.

Si $\lambda \neq -na$: $P(0) = 0$ et si $\lambda = -na$: $\lambda \neq 0$ et ainsi $P(1) = 0$.

Donc $P(0) = 0$ ou $P(1) = 0$

$\lambda X^h(X-1)^k R = na(X-1)X^h(X-1)^k R - aX(X-1)[hX^{h-1}(X-1)^k R + kX^h(X-1)^{k-1}R + X^h(X-1)^k R']$

En divisant les deux polynômes par $X^h(X-1)^k$ il vient :

$\lambda R = na(X-1)R - ah(X-1)R - akXR - aX(X-1)R'$ ou $\forall x \in \mathbb{R}, \lambda R(x) = na(x-1)R(x) - akxR(x) - ax(x-1)R'(x) - ah(x-1)R(x)$.

En faisant tendre x vers 0 (resp. 1) on obtient :

$\lambda R(0) = -naR(0) - ahR(0)$ (resp. $\lambda R(1) = -akR(1)$)

Ainsi $\begin{cases} \lambda = -na + ah \\ \lambda = -ak \end{cases}$ car $R(0) \neq 0$ et $R(1) \neq 0$. Ainsi $\begin{cases} \lambda = -ak \\ na = ah - \lambda = ah + ak \end{cases}$

Alors $\underline{\underline{A=-ak \text{ et } h=m-k}}$

Ainsi $P = X^{m-k}(X-1)^k R$. $\deg P = m-k+k+\deg R = m+\deg R$ et $\deg P \leq m$.

Donc $\deg R \leq 0$. Alors R est constant. Ainsi $\exists C \in \mathbb{R}$, $P = X^{m-\ell}(X-1)^\ell \times C$.

Comme P est unitaire : $\underline{\underline{P = X^{m-k}(X-1)^k}}$.

3 c) $f(W_\ell) = ma(X-1)W_\ell - aX(X-1)W'_\ell = ma(X-1)W_\ell - aX(X-1)\left[(m-\ell)X^{m-\ell-1}(X-1)^\ell + \ell X^{m-\ell}(X-1)^{\ell-1}\right]$.

$f(W_\ell) = ma(X-1)W_\ell - a(X-1)(m-\ell)W_\ell - aX\ell W_\ell = [maX - ma - a(m-\ell)X + a(m-\ell) - a\ell X]W_\ell$.

$f(W_\ell) = [(ma - am + \ell a - a\ell)X - ma + am - a\ell]W_\ell$.

$\underline{\underline{f(W_\ell) = -\ell a W_\ell}}$.

$\forall \ell \in [\![0,m]\!]$, $f(W_\ell) = -\ell a W_\ell$ et $W_\ell \neq 0_{\mathbb{R}_m[X]}$.

Donc pour tout $\ell \in [\![0,m]\!]$, $-a\ell$ est une valeur propre de f.

$0, -a, -2a, \dots, -ma$ sont alors $m+1$ valeurs propres distinctes de f qui est un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension $m+1$; alors $0, -a, -2a, \dots, -ma$ sont LES valeurs propres de f. $\underline{\underline{Sp(f) = \{-\ell a \,;\, \ell \in [\![0,m]\!]\}}}$.

f ayant $m+1$ valeurs propres distinctes et $\mathbb{R}_m[X]$ étant de dimension $m+1$:

→ $\underline{\underline{f \text{ est diagonalisable}}}$ → les sous-espaces propres de f sont des droites vectorielles.

$\forall \ell \in [\![0,m]\!]$, $W_\ell \neq 0$, $W_\ell \in SEP(f, -\ell a)$ et $\dim SEP(f, -\ell a) = 1$.

Ainsi $\underline{\underline{\forall \ell \in [\![0,m]\!],\ SEP(f, -\ell a) = Vect(W_\ell)}}$.

3 d) $W_0, W_1, \dots, W_m$ sont $m+1$ vecteurs propres de f associés à $m+1$ valeurs propres distinctes de f ; la famille $(W_0, W_1, \dots, W_m)$ est alors libre. Comme elle est constituée de $m+1$ éléments de $\mathbb{R}_m[X]$ et que $\dim \mathbb{R}_m[X] = m+1$: c'est une base de $\mathbb{R}_m[X]$.

$\underline{\underline{(W_0, W_1, \dots, W_m) \text{ est une base de } \mathbb{R}_m[X]}}$.

$U=1=(X-(X-1))^n=\sum_{k=0}^{n} C_n^k X^{n-k}(-1)^k(X-1)^k=\sum_{k=0}^{n} C_n^k(-1)^k W_k$.

$U=\sum_{k=0}^{n} C_n^k(-1)^k W_k$. Les coordonnées de $U=1$ dans la base $(W_0, W_1, \dots, W_n)$ sont :

$(C_n^0(-1)^0, C_n^1(-1)^1, \dots, C_n^n(-1)^n)$.

12 Q4 a) Π est la matrice de passage de $(W_0, W_1, \dots, W_n)$ à $(1, X, \dots, X^n)$. Soit $t\in\mathbb{R}^+$

2 $\begin{pmatrix} q_0(t) \\ q_1(t) \\ \vdots \\ q_n(t) \end{pmatrix}$ est la matrice de $\sum_{k=0}^{n} q_k(t) W_k$ dans $(W_0, W_1, \dots, W_n)$ et $\begin{pmatrix} p_0(t) \\ p_1(t) \\ \vdots \\ p_n(t) \end{pmatrix}$ est la matrice de $\sum_{k=0}^{n} p_k(t) X^k$ dans la base $(1, X, \dots, X^n)$. Comme ces deux polynômes sont égaux :

$$\Pi\begin{pmatrix} p_0(t) \\ p_1(t) \\ \vdots \\ p_n(t) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} q_0(t) \\ q_1(t) \\ \vdots \\ q_n(t) \end{pmatrix} \qquad (\text{" } PX'=X \text{" or !})$$

Posons $\Pi=(d_{ij})_{\substack{0\le i\le n \\ 0\le j\le n}}$. Ce qui précède donne : $\forall i\in[\![0,n]\!]$, $q_i=\sum_{j=0}^{n} d_{ij}\, p_j$

Ainsi pour tout $i\in[\![0,n]\!]$, q_i est une combinaison linéaire de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}^+$.

Pour tout $i\in[\![0,n]\!]$, q_i est dérivable sur $\mathbb{R}_+$.

5 b) $\forall (x,t)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+$, $\frac{\partial G}{\partial t}(x,t)=na(x-1)\,G(x,t)-ax(x-1)\frac{\partial G}{\partial x}(x,t)$

$\Updownarrow$

$\forall t\in\mathbb{R}^+$, $\sum_{k=0}^{n} q_k'(t) W_k = f\left(\sum_{k=0}^{n} q_k(t) W_k\right)=\sum_{k=0}^{n} q_k(t) f(W_k)$

$\Updownarrow$

$\forall t\in\mathbb{R}^+$, $\sum_{k=0}^{n} q_k'(t) W_k=\sum_{k=0}^{n} q_k(t)(-ka) W_k$

$\Updownarrow \leftarrow (W_0,\dots,W_n)$ est libre

$\forall k\in[\![0,n]\!]$, $\forall t\in\mathbb{R}^+$, $q_k'(t)=-ka\,q_k(t)$.

Ainsi $\underline{(R) \Leftrightarrow \forall k\in[\![0,n]\!],\ q_k'=-ka\,q_k}$.

(R) étant vérifié on a bien : $\forall k\in[\![0,n]\!]$, $q_k'=-ka\,q_k$.

Fixons ℓ dans $[\![0,n]\!]$ et posons $\forall t\in\mathbb{R}^+$, $\varphi(t)=e^{a\ell t}q_\ell(t)$.
φ est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ comme produit de deux facteurs dérivables sur $\mathbb{R}^+$
$\forall t\in\mathbb{R}^+$, $\varphi'(t)=\ell a e^{a\ell t}q_\ell(t)+e^{a\ell t}q_\ell'(t)=e^{a\ell t}(\ell a q_\ell(t)-\ell a q_\ell(t))=0$.

Ainsi $\exists C_\ell\in\mathbb{R}$, $\forall t\in\mathbb{R}^+$, $\varphi(t)=C_\ell$. $\forall t\in\mathbb{R}^+$, $e^{a\ell t}q_\ell(t)=C_\ell$.

$\forall \ell\in[\![0,n]\!]$, $\exists C_\ell\in\mathbb{R}$, $\forall t\in\mathbb{R}^+$, $q_\ell(t)=C_\ell e^{-a\ell t}$.

3 c) $\forall x\in\mathbb{R}$, $G(x,0)=\sum_{\ell=0}^{n}p_\ell(0)x^\ell=1$ car $p_\ell(0)=\begin{cases}0 \text{ si } \ell\in[\![1,n]\!]\\ 1 \text{ si } \ell=0.\end{cases}$

$\forall x\in\mathbb{R}$, $G(x,0)=1=U(x)$.

$\forall x\in\mathbb{R}$, $1=G(x,0)=\sum_{\ell=0}^{n}p_\ell(0)x^\ell=\sum_{\ell=0}^{n}q_\ell(0)W_\ell(x)=\sum_{\ell=0}^{n}C_\ell e^{-a\ell\times 0}W_\ell(x)$.

Ainsi $\sum_{\ell=0}^{n}C_\ell W_\ell=1$.

Alors $\sum_{\ell=0}^{n}C_\ell W_\ell=1=\sum_{\ell=0}^{n}C_n^\ell(-1)^\ell W_\ell$; $\forall\ell\in[\![0,n]\!]$, $C_\ell=C_n^\ell(-1)^\ell$.

$\forall(x,t)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+$, $G(x,t)=\sum_{\ell=0}^{n}q_\ell(t)W_\ell(x)=\sum_{\ell=0}^{n}C_n^\ell(-1)^\ell e^{-a\ell t}x^{n-\ell}(x-1)^\ell$.

$\forall(x,t)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+$, $G(x,t)=\sum_{\ell=0}^{n}C_n^\ell x^{n-\ell}\left(-e^{-at}(x-1)\right)^\ell=\left(x-(x-1)e^{-at}\right)^n$.

$\forall(x,t)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+$, $G(x,t)=\left[(1-e^{-at})x+e^{-at}\right]^n$.

2 d) Ainsi $\forall t\in\mathbb{R}^+$, $\sum_{\ell=0}^{n}p_\ell(t)X^\ell=\left[(1-e^{-at})X+e^{-at}\right]^n=\sum_{\ell=0}^{n}C_n^\ell\left((1-e^{-at})X\right)^\ell\left(e^{-at}\right)^{n-\ell}$

$\forall t\in\mathbb{R}^+$, $\sum_{\ell=0}^{n}p_\ell(t)X^\ell=\sum_{\ell=0}^{n}C_n^\ell(1-e^{-at})^\ell e^{-a(n-\ell)t}X^\ell$. La liberté de $(1,X,\dots,X^n)$ donne pour finir :

$\forall\ell\in[\![0,n]\!]$, $\forall t\in\mathbb{R}^+$, $P(N(t)=\ell)=C_n^\ell(1-e^{-at})^\ell(e^{-at})^{n-\ell}=p_\ell(t)$.

Ainsi : $\forall t\in\mathbb{R}^+$, $N(t)\hookrightarrow\mathcal{B}(n,1-e^{-at})$. $\forall t\in\mathbb{R}^+$, $E(N(t))=n(1-e^{-at})$.