PARTIE I

Q1 Etude de la fonction F sur $[0,1]$.

a) Soit t un élément de $[0,1]$. $\forall j \in \mathbb{N}$, $0 \leq p_j t^j \leq p_j$

La convergence de la série de terme général p_j et les règles de comparaison des séries à termes positifs montrent que la série de terme général $p_j t^j$ converge.

La série définissant $F(t)$ est convergente pour tout t appartenant à $[0,1]$.

b) • Montrons la croissance de F en utilisant la définition.

Soit $(t,t') \in [0,1]^2$ tel que : $t \leq t'$.

$\forall j \in \mathbb{N}$, $p_j t^j \leq p_j t'^j$. $\forall n \in \mathbb{N}$, $\sum_{j=0}^{n} p_j t^j \leq \sum_{j=0}^{n} p_j t'^j$. En faisant tendre n vers l'infini il vient : $F(t) \leq F(t')$.

$\forall t \in [0,1]^2$, $t \leq t' \Rightarrow F(t) \leq F(t')$. F est croissante sur $[0,1]$.

• Soit $t_0 \in]0,1]$

F est croissante sur $[0,t_0]$ et majorée par $F(t_0)$; le théorème de la limite monotone montre alors que F admet une limite finie à gauche en t_0.

Soit $t_0 \in [0,1[$

F est croissante sur $]t_0,1]$ et minorée par $F(t_0)$, ce même théorème prouve alors que F admet une limite finie à droite en t_0.

Donc F admet une limite finie à droite en tout point de $[0,1[$ et à gauche en tout point de $]0,1]$.

c) $t_0 \in [0,1[$. Soit $t \in]t_0,1]$. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$F(t)-F(t_0) = \sum_{j=0}^{+\infty} p_j t^j - \sum_{j=0}^{+\infty} p_j t_0^j = \sum_{j=0}^{n} p_j (t^j - t_0^j) + \sum_{j=n+1}^{+\infty} p_j (t^j - t_0^j).$$

$\forall j \in \mathbb{N}$, $0 \leq t^j - t_0^j \leq 1$ (ok ?)

$\forall j \in \mathbb{N}$, $0 \leq p_j (t^j - t_0^j) \leq p_j$. $\forall q \in [\![n+1,+\infty[\![$, $0 \leq \sum_{j=n+1}^{q} p_j (t^j - t_0^j) \leq \sum_{j=n+1}^{q} p_j$

En faisant tendre q vers $+\infty$ on obtient : $0 \leq \sum_{j=n+1}^{+\infty} p_j (t^j - t_0^j) \leq \sum_{j=n+1}^{+\infty} p_j$ (ces deux sommes existant)

Finalement $0 \leq F(t)-F(t_0) = \sum_{j=0}^{n} p_j (t^j - t_0^j) + \sum_{j=n+1}^{+\infty} p_j (t^j - t_0^j) \leq \sum_{j=0}^{n} p_j (t^j - t_0^j) + \sum_{j=n+1}^{+\infty} p_j$

$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall t \in \,]t_0, 1],\ 0 \leq F(t) - F(t_0) \leq \sum_{j=0}^{n} p_j (t^j - t_0^j) + \sum_{j=n+1}^{+\infty} p_j$

$\lim\limits_{\substack{t \to t_0 \\ t > t_0}} \sum_{j=0}^{n} p_j (t^j - t_0^j) = 0$ et F admet une limite finie à droite en t_0. Nous pouvons donc faire tendre t vers t_0 par valeurs supérieures dans le résultat précédent et nous obtenons : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq \lim\limits_{\substack{t \to t_0 \\ t > t_0}} F(t) - F(t_0) \leq \sum_{j=n+1}^{+\infty} p_j$

or $\lim\limits_{n \to +\infty} \sum_{j=n+1}^{+\infty} p_j = 0$. $\lim\limits_{\substack{t \to t_0 \\ t > t_0}} F(t) - F(t_0)$ est une constante encadrée par deux suites qui convergent vers 0 ; cette constante est donc nulle. Par conséquent $\lim\limits_{\substack{t \to t_0 \\ t > t_0}} F(t) = F(t_0)$

F est donc continue à droite en t_0 pour tout t_0 appartenant à $[0,1[$

d) F est continue à droite en 0, à gauche en 1, et à droite et à gauche pour tout élément t_0 de $]0,1[$. F est donc continue sur $[0,1]$.

Q2 Etude locale de la fonction F en 0.

a) Soit $t \in [0,1]$ et soit $n \in \mathbb{N}$.

$\forall q \in [\![n+1, +\infty[\![,\ 0 \leq \sum_{j=n+1}^{q} p_j t^j \leq \sum_{j=n+1}^{q} p_j t^{n+1} = t^{n+1} \sum_{j=n+1}^{q} p_j.$

$j \geq n+1$ et $t \in [0,1]$ donnent $t^j \leq t^{n+1}$

En faisant tendre q vers l'infini il vient : $0 \leq \sum_{j=n+1}^{+\infty} p_j t^j \leq t^{n+1} \sum_{j=n+1}^{+\infty} p_j$ (les deux sommes existent).

$\forall t \in [0,1],\ 0 \leq \sum_{j=n+1}^{+\infty} p_j t^j \leq t^{n+1} \sum_{j=n+1}^{+\infty} p_j.$

b) Fixons n dans $\mathbb{N}$.

$\forall t \in \,]0,1],\ \varepsilon_n(t) = \frac{1}{t^n}\left(F(t) - \sum_{j=0}^{n} p_j t^j\right) = \frac{1}{t^n} \sum_{j=n+1}^{+\infty} p_j t^j$

donc $\forall t \in \,]0,1],\ 0 \leq \varepsilon_n(t) \leq \frac{1}{t^n} \times t^{n+1} \sum_{j=n+1}^{+\infty} p_j = t \sum_{j=n+1}^{+\infty} p_j$

Par encadrement il vient : $\lim\limits_{t \to 0^+} \varepsilon_n(t) = 0.$

Q3 Etude locale de la fonction F en 1.

a) Soit $t\in[0,1[$. $F(t)-F(1)=\sum_{j=0}^{+\infty} p_j(t^j-1)=\sum_{j=1}^{+\infty} p_j(t^j-1)=\sum_{j=1}$

Donc $\forall t\in[0,1[$, $\dfrac{F(t)-F(1)}{t-1}=\sum_{j=1}^{+\infty} p_j(1+t+\dots+t^{j-1})$

b) On suppose que la série de terme général jp_j converge.

Posons $\forall t\in[0,1[$, $\varphi(t)=\dfrac{F(t)-F(1)}{t-1}$. Montrons que φ est croissante sur $[0,1[$.

Soit $(t,t')\in[0,1[^2$ tel que $t\leqslant t'$

$\varphi(t')-\varphi(t)=\sum_{j=1}^{+\infty} p_j\left[1+t'+\dots+t'^{j-1}-1-t-\dots-t^{j-1}\right]$

$\varphi(t')-\varphi(t)=\sum_{j=1}^{+\infty} p_j\left[(t'-t)+(t'^2-t^2)+\dots+(t'^{j-1}-t^{j-1})\right]$

$\forall j\in\mathbb{N}^*,\ (t'-t)+(t'^2-t^2)+\dots+(t'^{j-1}-t^{j-1})\geqslant 0$ et $p_j\geqslant 0$

Donc $\varphi(t')-\varphi(t)\geqslant 0$; $\varphi(t')\geqslant\varphi(t)$.

Par conséquent : $\varphi: t\mapsto \dfrac{F(t)-F(1)}{t-1}$ est croissante sur $[0,1[$. Montrons qu'elle est majorée.

$\forall t\in[0,1[$, $\varphi(t)=\sum_{j=1}^{+\infty} p_j(1+t+\dots+t^{j-1})$

$\forall t\in[0,1[$, $\forall j\in\mathbb{N}^*$, $p_j(1+t+\dots+t^{j-1})\leqslant p_j(1+1+\dots+1)=jp_j$

Donc $\forall t\in[0,1[$, $\varphi(t)=\sum_{j=1}^{+\infty} p_j(1+t+\dots+t^{j-1})\leqslant\sum_{j=1}^{+\infty} jp_j$ car les deux séries sont convergentes.

φ est donc majorée par $\sum_{j=1}^{+\infty} jp_j$ sur $[0,1[$.

Etant croissante sur $[0,1[$ elle admet en 1 une limite finie elle même majorée par $\sum_{j=1}^{+\infty} jp_j$. Ce qui signifie que F est dérivable en 1 et que $F'(1)\leqslant\sum_{j=1}^{+\infty} jp_j$

F est dérivable en 1 et $F'(1)\leqslant\sum_{j=1}^{+\infty} jp_j$ lorsque la série de terme général jp_j converge

c) On suppose ici F dérivable en 1.

Soit $t \in [0,1[$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\frac{F(t)-F(1)}{t-1} = \sum_{j=1}^{+\infty} p_j(1+t+\dots+t^{j-1}) = \sum_{j=1}^{n} p_j(1+t+\dots+t^{j-1}) + \sum_{j=n+1}^{+\infty} p_j(1+t+\dots+t^{j-1})$$

$$\frac{F(t)-F(1)}{t-1} \geqslant \sum_{j=1}^{n} p_j(1+t+\dots+t^{j-1}) \quad \text{car} \quad \sum_{j=n+1}^{+\infty} p_j(1+t+\dots+t^{j-1}) \geqslant 0 .$$

$$\underline{\underline{\forall t \in [0,1[,\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\quad \frac{F(t)-F(1)}{t-1} \geqslant \sum_{j=1}^{n} p_j(1+t+\dots+t^{j-1})}}$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. F étant dérivable en 1 : $\lim_{t \to 1} \frac{F(t)-F(1)}{t-1} = F'(1)$. De plus $\lim_{t\to 1} \sum_{j=1}^{n} p_j(1+t+\dots+t^{j-1}) = \sum_{j=1}^{n} j p_j$

Par conséquent l'inégalité précédente donne : $\underline{\underline{F'(1) \geqslant \sum_{j=1}^{n} j p_j}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

La suite $\left(\sum_{j=1}^{n} j p_j\right)_{n \geqslant 1}$ est croissante $\left(\sum_{j=1}^{n+1} j p_j - \sum_{j=1}^{n} j p_j = (n+1)p_{n+1} \geqslant 0\right)$ et majorée par $F'(1)$.

Elle est donc convergente et sa limite est majorée par $F'(1)$. Ceci signifie que :

$$\underline{\underline{\text{la série de terme général } j p_j \text{ converge et } \sum_{j=1}^{+\infty} j p_j \leqslant F'(1) \text{ .. lorsque F est dérivable en 1}}}$$

d) b) et c) montrent clairement que F est dérivable en 1 si et seulement si la série de terme général $j p_j$ converge.

Supposons F dérivable en 1. La série de terme général $j p_j$ est alors convergente.

b) donne : $F'(1) \leqslant \sum_{j=1}^{+\infty} j p_j$ et c) donne $\sum_{j=1}^{+\infty} j p_j \leqslant F'(1)$.

Par conséquent : $\underline{\underline{\sum_{j=1}^{+\infty} j p_j = F'(1)}}$.

e) Application .. E(X) existe

$\Updownarrow$

la série de terme général $j p_j$ est absolument convergente

$j p_j \geqslant 0 \rightarrow \Updownarrow$

la série de terme général $j p_j$ est convergente

$\Updownarrow$

F est dérivable en 1

Donc $\underline{\underline{\text{X admet une espérance si et seulement si F est dérivable en 1. On a alors } E(X) = F'(1).}}$

Q4.- Produit de deux fonctions génératrices.

a) Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\sum_{j=0}^{n} r_j = \sum_{j=0}^{n} \sum_{k=0}^{j} p_k q_{j-k} \underset{\text{commutation des 2 } \Sigma}{=} \sum_{k=0}^{n} \Big(p_k \sum_{j=k}^{n} q_{j-k} \Big) = \sum_{k=0}^{n} \Big(p_k \sum_{\ell=0}^{n-k} q_\ell \Big)$$

$\forall k \in [\![0,n]\!]$, $\displaystyle\sum_{\ell=0}^{n-k} q_\ell \leq \sum_{\ell=0}^{n} q_\ell$ (car q_ℓ est positif pour tout $\ell \in \mathbb{N}$).

$\forall k \in [\![0,n]\!]$, $\displaystyle p_k \sum_{\ell=0}^{n-k} q_\ell \leq p_k \sum_{\ell=0}^{n} q_\ell$ (car p_k est positif pour tout $k \in \mathbb{N}$)

donc $\displaystyle\sum_{j=0}^{n} r_j = \sum_{k=0}^{n} \Big(p_k \sum_{\ell=0}^{n-k} q_\ell \Big) \leq \sum_{k=0}^{n} \Big(p_k \sum_{\ell=0}^{n} q_\ell \Big) = \Big(\sum_{k=0}^{n} p_k \Big) \Big(\sum_{\ell=0}^{n} q_\ell \Big)$

Finalement : $\displaystyle\sum_{j=0}^{n} r_j \leq \sum_{j=0}^{n} p_j \cdot \sum_{j=0}^{n} q_j$

$\forall j \in \mathbb{N}$, $p_j \geq 0$ et $q_j \geq 0$ donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{j=0}^{n} p_j \leq \sum_{j=0}^{+\infty} p_j$ et $\displaystyle\sum_{j=0}^{n} q_j \leq \sum_{j=0}^{+\infty} q_j$ (les deux séries sont convergentes)

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{j=0}^{n} r_j \leq \sum_{j=0}^{+\infty} p_j \cdot \sum_{j=0}^{+\infty} q_j$.

Par conséquent la série de terme général r_j converge car elle est à termes positifs et ses sommes partielles sont majorées par $\displaystyle\sum_{j=0}^{+\infty} p_j \cdot \sum_{j=0}^{+\infty} q_j$

b) Soit $n \in \mathbb{N}$.
Soit $t \in [0,1]$. Posons : $\forall j \in \mathbb{N}$, $r'_j = t^j r_j$, $p'_j = t^j p_j$ et $q'_j = t^j q_j$

1°.- $\forall j \in \mathbb{N}$, $p'_j \geq 0$ et $q'_j \geq 0$

2°.- les séries de termes généraux $p'_j = t^j p_j$ et $q'_j = t^j q_j$ convergent.

3°.- $\forall n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} p'_k q'_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} p_k t^k q_{n-k} t^{n-k} = \Big(\sum_{k=0}^{n} p_k q_{n-k} \Big) t^n = r_n t^n = r'_n$.

a) nous autorise alors à dire que : $\displaystyle\sum_{j=0}^{n} r'_j \leq \sum_{j=0}^{n} p'_j \sum_{j=0}^{n} q'_j$; c'est à dire :

$$\sum_{j=0}^{n} r_j t^j \leq \sum_{j=0}^{n} p_j t^j \sum_{j=0}^{n} q_j t^j .$$

Montrons $\sum_{j=0}^{n} p_j t^j \sum_{j=0}^{n} q_j t^j \leq \sum_{j=0}^{2n} r_j t^j$; c'est à dire que

$$\sum_{j=0}^{n} p'_j \sum_{j=0}^{n} q'_j \leq \sum_{j=0}^{2n} r'_j$$

$$\sum_{j=0}^{2n} r'_j = \sum_{j=0}^{2n} \sum_{\ell=0}^{j} p'_\ell q'_{j-\ell} = \sum_{k=0}^{2n}\Big(p'_k \sum_{j=k}^{2n} q'_{j-k}\Big) = \sum_{k=0}^{2n}\Big(p'_k \sum_{\ell=0}^{2n-k} q'_\ell\Big)$$

Par positivité des éléments des suites (p'_j) et (q'_j) il vient :

$$\sum_{j=0}^{2n} r'_j \geq \sum_{k=0}^{\boxed{n}} \Big(p'_k \sum_{\ell=0}^{2n-k} q'_\ell\Big) \underset{\substack{\uparrow \\ k \leq n \Rightarrow 2n-k \geq n}}{\geq} \sum_{k=0}^{n}\Big(p'_k \sum_{\ell=0}^{n} q'_\ell\Big) = \sum_{k=0}^{n} p'_k \sum_{\ell=0}^{n} q'_\ell$$

Donc $\sum_{j=0}^{n} p'_j \sum_{j=0}^{n} q'_j \leq \sum_{j=0}^{2n} r'_j$. Finalement :

$$\underline{\underline{\sum_{j=0}^{n} r_j t^j \leq \sum_{j=0}^{n} p_j t^j \sum_{j=0}^{n} q_j t^j \leq \sum_{j=0}^{2n} r_j t^j}} \quad \text{pour } n \in \mathbb{N} \text{ et } t \in [0,1].$$

En faisant tendre n vers $+\infty$ il vient :

$$\sum_{j=0}^{+\infty} r_j t^j \leq \sum_{j=0}^{+\infty} p_j t^j \sum_{j=0}^{+\infty} q_j t^j \leq \sum_{j=0}^{+\infty} r_j t^j \quad \text{(toutes les séries convergent).}$$

Donc $H(t) \leq F(t)G(t) \leq H(t)$.

Finalement : $\underline{\underline{\forall t \in [0,1], \quad F(t)G(t) = H(t).}}$

PARTIE II 1. Etude du cas particulier $K=1$

Q1.- Etude de la probabilité de ruine du joueur.

a) p_1 Notons P_i (resp. F_i) l'événement le $i^{ème}$ jet donne pile (resp. face).

$p_1 = p(F_1) = 1-p.$

$p_2 = 0$ ou le premier tirage donne pile et le joueur est ruiné à l'issue du 1^{er} jet
ou le premier tirage donne face et le joueur a 2^F après le 1^{er} jet et il ne peut pas être ruiné à l'issue du $2^{ème}$ jet.

$p_3 = p(F_1 \cap P_2 \cap P_3) = p(F_1)\,p(P_2/F_1)\,p(P_3/F_1 \cap P_2) = p(1-p)^2$

$\underline{p_1 = 1-p\ ,\ p_2 = 0\ ,\ p_3 = p(1-p)^2.}$

b) Notons C_1, C_2 et C_3 les trois conditions proposées par l'énoncé.

Notons que la ruine du joueur intervient à l'issue du $(n+1)^{ème}$ jet si et seulement si il existe $j \in [\![1, n-1]\!]$ tel que C_1, C_2 et C_3 soient vérifiées.

→ Supposons qu'il existe $j \in [\![1, n-1]\!]$ tel que C_1, C_2 et C_3 soient vérifiées.
C_3 indique clairement que le joueur est ruiné à l'issue du $(n+1)^{ème}$ jet.

→ Réciproquement supposons que la ruine du joueur intervient à l'issue du $(n+1)^{ème}$ jet.
$n \geqslant 2$; $n+1 \geqslant 3$. Nécessairement le premier jet donne un face ; le joueur a 2^F à l'issue du premier jet. C_1 est vérifiée.
Soit $\mathcal{S}$ l'ensemble $\{k \in [\![1, n]\!] \mid$ le joueur possède 1^F à l'issue du $k^{ème}$ jet$\}$.
$\mathcal{S}$ est non vide car $n \in \mathcal{S}$; $\mathcal{S}$ possède un plus petit élément k_0.
k_0 n'est pas 1 car C_1 est vérifiée ; par conséquent $k_0 \in [\![2, n]\!]$.
Posons $j = k_0 - 1$ et notons que C_2 et C_3 sont vérifiées.
Le capital du joueur revient à 1^F pour la première fois à l'issue du $k_0^{ème}$ jet c'est-à-dire à l'issue des $k_0 - 1 = j$ jets suivant le premier jet ; C_2 est vérifiée.
Les $(n+1) - k = n - j$ jets suivant le $k^{ème}$ jet voient voir le capital du joueur ramené à 0 ceci pour la première fois ; C_3 est vérifiée.
Il existe donc $j \in [\![1, n-1]\!]$ tel que C_1, C_2, C_3 soient vérifiées.
Ceci achève de prouver l'équivalence demandée.

Les trois "événements précédents" me laissent perplexe ! Interprétons...

Soit $j \in [\![1, n-1]\!]$. Notons C_j l'événement : les j jets suivant le premier ont ramené le capital du joueur à 1^F et ceci pour la première fois. Notons encore R_1^{n+1} l'événement le joueur est ruiné à l'issue du $(n+1)^{ième}$ jet

→ "Premier événement" . $\underline{p(F_1) = p}$

→ "Second événement" . $p(C_j) = p(C_j \cap F_1) = p(C_j / F_1)\, p(F_1)$.

$p(C_j / F_1)$ n'est autre que la probabilité pour que le joueur passe d'un capital de 2^F à un capital de 1^F en exactement j jets ; c'est encore la probabilité pour que le joueur passe d'un capital de 1^F à un capital de 0^F en exactement j jets ; c'est donc $P_j(1)$.

Par conséquent $\underline{\underline{p(C_j) = p\, P_j(1)}}$.

→ "Troisième événement" . $p(C_j \cap R_1^{n+1}) = p(R_1^{n+1} / C_j)\, p(C_j) = p(R_1^{n+1} / C_j)\; p\, P_j(1)$.

$p(R_1^{n+1} / C_j)$ est la probabilité pour que le joueur passe d'un capital de 1^F à un capital de 0^F en exactement $n-j$ jets ; c'est donc $P_{n-j}(1)$.

Par conséquent : $\underline{\underline{p(C_j \cap R_1^{n+1}) = p\, P_j(1)\, P_{n-j}(1)}}$.

L'équivalence démontrée au début de cette question nous indique que R_1^{n+1} est la réunion disjointe des événements $C_1 \cap R_{n+1}^{n+1}, C_2 \cap R_1^{n+1}, \dots, C_{n-1} \cap R_1^{n+1}$.

Donc $P_{n+1}(1) = p(R_1^{n+1}) = \sum_{j=1}^{n-1} p(C_j \cap R_1^{n+1}) = \sum_{j=1}^{n-1} p\, P_j(1)\, P_{n-j}(1)$.

Donc pour $n \geq 2$: $P_{n+1}(1) = p \sum_{j=1}^{n-1} P_j(1)\, P_{n-j}(1)$.

Or $P_0(1) = P_{n-n}(1) = 0$ par convention. Par conséquent

Pour $n \geq 2$ $\quad p \sum_{j=0}^{n} P_j(1)\, P_{n-j}(1) = P_{n+1}(1)$.

Pour $n = 0$ $\; p \sum_{j=0}^{n} P_j(1) P_{n-j}(1) = p\,(P_0(1))^2 = 0$ et pour $n = 1$, $p \sum_{j=0}^{n} P_j(1) P_{n-j}(1) = p\, P_0(1) P_1(1) + p\, P_1(1) P_0(1) = 0$.

Finalement : $\underline{\underline{p \sum_{j=0}^{n} P_j(1)\, P_{n-j}(1) = \begin{cases} P_{n+1}(1) \text{ si } n \geq 2 \quad (*) \\ 0 \text{ si } n = 0 \text{ ou } 1 \end{cases}}}$ $\qquad (*)$ et même pour $\underline{n \geq 1}$

c) Soit $t \in [0,1]$.

$$(F_1(t))^2 = F_1(t) \times F_1(t) = \sum_{j=0}^{+\infty} p_j(1)\, t^j \times \sum_{j=0}^{+\infty} p_j(1)\, t^j \underset{\uparrow\, \text{I Q4}}{=} \sum_{j=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{j} p_k(1)\, p_{j-k}(1) \right) t^j$$

Par conséquent :

$$(F_1(t))^2 = \sum_{j=0}^{+\infty} \left(\sum_{\ell=0}^{j} p_\ell(1)\, p_{j-\ell}(1) \right) t^j \underset{\substack{\uparrow \\ j \to n \\ k \to j}}{\overset{!}{=}} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{j=0}^{n} p_j(1)\, p_{n-j}(1) \right) t^n$$

$$p(F_1(t))^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(p \sum_{j=0}^{n} p_j(1)\, p_{n-j}(1) \right) t^n \underset{\substack{\uparrow \\ b)}}{=} \sum_{n=2}^{+\infty} p_{n+1}(1)\, t^n$$

Donc $pt\,(F_1(t))^2 = \sum_{n=2}^{+\infty} p_{n+1}(1)\, t^{n+1} = \sum_{n=3}^{+\infty} p_n(1)\, t^n = F_1(t) - p_0(1) - p_1(1)t - p_2(1)t^2$

or $p_0(1) = 0$, $p_1(1) = 1-p$ et $p_2(1) = 0$. Finalement :

$pt\,(F_1(t))^2 = F_1(t) - (1-p)t$. $\underline{\underline{\forall t \in [0,1],\ pt\,(F_1(t))^2 = F_1(t) - (1-p)t}}$

__Remarque__.. $F_1(t)$ est donc solution de l'équation $x \in \mathbb{R}$ et $ptx^2 - x + (1-p)t = 0$ qui pour $t \neq 0$ admet pour discriminant : $1 - 4p(1-p)t^2$.. ce qui éclaire un peu la question suivante

d) Posons $\forall t \in]0,1[$, $\varphi(t) = 1 - 4p(1-p)t^2$. φ est dérivable sur $]0,1[$ et

$\forall t \in]0,1[$, $\varphi'(t) = -8t\,p(1-p) < 0$

φ est strictement décroissante sur $]0,1[$ ... et continue. φ définit une bijection de $]0,1[$ sur $\left] \lim_{t \to 1^-} \varphi(t), \lim_{t \to 0^+} \varphi(t) \right[=]1-4p(1-p), 1[=](2p-1)^2, 1[$.

Finalement : $\underline{\underline{\forall t \in]0,1[,\ \varphi(t) = 1 - 4p(1-p)t^2 > (2p-1)^2.}}$

__Remarque__.. $1 - 4p(1-p)t^2 - (2p-1)^2 = -4p(1-p)t^2 + (4p(1-p)) = 4p(1-p)(1-t^2) > 0$ pour $t \in]0,1[$!!

Alors l'étude de fonction ...

Soit $t \in]0,1[$. Le discriminant de l'équation $x \in \mathbb{R}$ et $ptx^2 - x + (1-p)t = 0$ est $1 - 4p(1-p)t^2$, il est strictement supérieur à $(2p-1)^2$ donc strictement positif.

L'équation a donc deux solutions $x'(t)$ et $x''(t)$ $(x'(t) < x''(t))$.

Soit $t \in]0,1[$.

$\forall x \in \mathbb{R}, \quad ptx^2 - x + (1-p)t = pt\,(x - x'(t))(x - x''(t))$.

Donc $\quad pt1^2 - 1 + (1-p)t = pt\,(1-x'(t))(1-x''(t))$.

$pt\,(1-x'(t))(1-x''(t)) = pt - 1 + t - pt = t - 1 < 0$

Par conséquent $\quad (1-x'(t))(1-x''(t)) < 0$ donc $\quad 1 \in]x'(t), x''(t)[$.

Donc $\quad \underline{\underline{x''(t) > 1}}$.

F_1 est croissante sur $[0,1]$ (... partie I). $\forall t \in]0,1[, \; F(t) \leq F(1)$.

$$F(1) = \sum_{n=0}^{+\infty} P_n(1) = \sum_{n=0}^{+\infty} p(R_1^n) = p\Big(\bigcup_{n=0}^{+\infty} R_1^n\Big) = p(R_1) \leq 1$$

↑ également : le joueur est ruiné à l'issue du $n^{\text{ième}}$ jeu et la réunion est disjointe.

Donc $\forall t \in [0,1], \; F(t) \leq 1$. $\quad \underline{\underline{\forall t \in]0,1[, \; F(t) \leq 1}}$.

Soit $t \in]0,1[$

$F(t)$ est solution de $x \in \mathbb{R}$ et $ptx^2 - x + (1-p)t = 0$ et $F(t) \leq 1$ donc $F(t) = x'(t)$

$$\{x'(t), x''(t)\} = \left\{ \frac{1 - \sqrt{1-4p(1-p)t^2}}{2pt}, \frac{1 + \sqrt{1-4p(1-p)t^2}}{2pt} \right\} \text{ et } \frac{1 - \sqrt{1-4p(1-p)t^2}}{2pt} < \frac{1 + \sqrt{1-4p(1-p)t^2}}{2pt}$$

Donc $x'(t) = \dfrac{1 - \sqrt{1-4p(1-p)t^2}}{2pt}$

Vrai pour $t = 1$! $\qquad$ vrai pour $t = 0$ et 1.

$$\text{Finalement } \quad \underline{\underline{\forall t \in]0,1[, \; F_1(t) = \frac{1 - \sqrt{1-4p(1-p)t^2}}{2pt}}} \text{ ou } F_1(t) = \frac{2(1-p)t}{1 + \sqrt{1-4p(1-p)t^2}}$$

c) F_1 est continue sur $[0,1]$ (partie I)

$$F_1(1) = \lim_{t \to 1^-} F(t) = \lim_{t \to 1^-} \frac{1 - \sqrt{1-4p(1-p)t^2}}{2pt} = \frac{1 - \sqrt{1-4p(1-p)}}{2p} = \frac{1 - |2p-1|}{2p}$$

Or $\quad p(R_1) = F_1(1) \quad$ (voir plus haut).

$$\text{Donc} \quad p(R_1) = \begin{cases} \dfrac{1 - (2p-1)}{2p} = \dfrac{1-p}{p} & \text{si } p > 1/2 \\[2mm] \dfrac{1 + 2p - 1}{2p} = 1 & \text{si } p \leq 1/2 \end{cases}$$

$$\underline{\underline{\text{Si } \; p \leq \tfrac{1}{2}, \; p(R_1) = 1 \; \text{ et si } p > \tfrac{1}{2}, \; p(R_1) = \tfrac{1-p}{p}.}}$$

(Q2) Espérance du temps d'attente de la ruine du joueur pour $p \leq 1/2$.

$p \leq 1/2$. $p(R_1) = 1$. On peut donc parler de la variable aléatoire X_1 ...

D'après la partie I, $E(X_1)$ existe si et seulement si F_1 est dérivable en 1.

$\forall t \in]0,1[$, $\dfrac{F_1(t)-F_1(1)}{t-1} = \dfrac{1}{t-1}\left[\dfrac{1-\sqrt{1-4p(1-p)t^2}}{2pt} - 1\right] = \dfrac{1}{t-1}\dfrac{1}{2pt}\left((1-2pt)-\sqrt{1-4p(1-p)t^2}\right)$

$\forall t \in]0,1[$, $\dfrac{F_1(t)-F_1(1)}{t-1} = \dfrac{1}{2pt}\dfrac{1}{t-1}\dfrac{(1-2pt)^2-(1-4p(1-p)t^2)}{(1-2pt)+\sqrt{1-4p(1-p)t^2}} = \dfrac{1}{2pt}\dfrac{1}{t-1}\dfrac{4pt(t-1)}{(1-2pt)+\sqrt{1-4p(1-p)t^2}}$

$\forall t \in]0,1[$, $\dfrac{F_1(t)-F_1(1)}{t-1} = \dfrac{2}{(1-2pt)+\sqrt{1-4p(1-p)t^2}}$

$\lim\limits_{t\to 1^-}\left((1-2pt)+\sqrt{1-4p(1-p)t^2}\right) = 1-2p+|2p-1| \overset{p<1/2}{=} 1-2p+1-2p = 2(1-2p)$

Si $p < \frac{1}{2}$: $\lim\limits_{t\to 1}\dfrac{F_1(t)-F_1(1)}{t-1} = \dfrac{2}{2(1-2p)} = \dfrac{1}{1-2p}$; F_1 est dérivable en 1 et $F'(1) = \dfrac{1}{1-2p}$

Si $p = \frac{1}{2}$ $\lim\limits_{t\to 1}\dfrac{F_1(t)-F_1(1)}{t-1} = +\infty$ et F_1 n'est pas dérivable en 1.

Si $p < \frac{1}{2}$: $E(X_1) = \dfrac{1}{1-2p}$; si $p = \frac{1}{2}$, X_1 n'a pas d'espérance.

Remarque.. On pouvait aussi faire cette étude à partir de $\forall t \in]0,1]$, $F_1(t) = \dfrac{1-\sqrt{1-4p(1-p)t^2}}{2pt}$

... ou en cherchant $\lim\limits_{t\to 1^-} F_1'(t)$.

Q3.. Expression des probabilités $P_n(1)$.

a) $(1+x)^{1/2} = 1 + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)\cdots(\frac{1}{2}-k+1)}{k!}x^k + o(x^n)$.

$(1+x)^{1/2} = 1 + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1(1-2)(1-4)\cdots(1-2k+2)}{2^k k!}x^k + o(x^n)$

$(1+x)^{1/2} = 1+\frac{1}{2}x+\displaystyle\sum_{k=2}^{n}\frac{(-1)^{k-1}\,1\times3\times5\times\cdots(2k-3)}{2^k k!}x^k + o(x^n) = 1+\frac{1}{2}x+\sum_{k=2}^{n}\frac{(-1)^{k-1}(2k-2)!}{2^k k!\,2^{k-1}(k-1)!}x^k+o(x^n)$

Finalement : $(1+x)^{1/2} = 1+\frac{1}{2}x+\displaystyle\sum_{k=2}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{2^{2k-1}}\frac{(2k-2)!}{k!(k-1)!}x^k+o(x^n) = 1+\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{2^{2k-1}}\frac{(2k-2)!}{k!(k-1)!}x^k+o(x^n)$

Soit $n \in \mathbb{N}$.

Notons que pour obtenir un dl$(2n+1)$ de F_1 en 0 il est nécessaire d'avoir un dl$(2n+2)$ de $t \mapsto 1-\sqrt{1-4p(1-p)t^2}$ en 0.

Partons alors d'un dl $(n+1)$ de $x \mapsto (1+x)^{1/2}$ en 0.

$$(1+x)^{1/2} = 1 + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^{k-1}}{2^{2k-1}} \frac{(2k-2)!}{k!(k-1)!} x^k + o(x^{n+1}).$$

$$1-(1+x)^{1/2} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^k}{2^{2k-1}} \frac{(2k-2)!}{k!(k-1)!} x^k + o(x^{n+1}).$$ Posons $\alpha = 4p(1-p)$.

$$1-\sqrt{1-4p(1-p)t^2} = 1-\sqrt{1-\alpha t^2} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^k}{2^{2k-1}} \frac{(2k-2)!}{k!(k-1)!} (-\alpha)^k t^{2k} + o(t^{2n+2})$$

$$F_1(t) = \frac{1-\sqrt{1-\alpha t^2}}{2pt} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{2p} \frac{(-1)^k(-1)^k(2k-2)!}{2^{2k-1}k!(k-1)!} \alpha^k t^{2k-1} + o(t^{2n+1}).$$

$$F_1(t) = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(2k-2)!}{p\,2^{2k}k!(k-1)!} (4p(1-p))^k t^{2k-1} + o(t^{2n+1}) = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(2k-2)!}{k!(k-1)!} p^{k-1}(1-p)^k t^{2k-1} + o(t^{2n+1})$$

$$F_1(t) = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(2k-2)!}{k!(k-1)!} p^{k-1}(1-p)^k t^{2k-1} + o(t^{2n+1}) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(2k)!}{(k+1)!k!} p^k (1-p)^{k+1} t^{2k+1} + o(t^{2n+1}).$$

La partie 1 donne aussi $F_1(t) = \sum_{k=0}^{2n+1} P_k(1)\, t^k + o(t^{2n+1})$.

ou : $F_1(t) = \sum_{k=0}^{n} P_{2k}(1)\, t^{2k} + \sum_{k=0}^{n} P_{2k+1}(1)\, t^{2k+1} + o(t^{2n+1})$

L'unicité du dl $(2n+1)$ de F_1 en 0 donne :

$\forall k \in [\![0,n]\!]$, $P_{2k}(1) = 0$ et $\forall k \in [\![0,n]\!]$, $P_{2k+1}(1) = \frac{(2k)!}{k!(k+1)!} p^k (1-p)^{k+1}$ ... et pour tout $n \in \mathbb{N}$

ceci suffit pour dire que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ P_{2n}(1) = 0 \quad \text{et} \quad P_{2n+1}(1) = \frac{(2n)!}{n!(n+1)!} p^n (1-p)^{n+1}.$$

Remarque.. $n=0$ donne $P_0(1)=0$ et $P_1(1) = 1-p$

$n=1$ donne $P_2(1) = 0$ et $P_3(1) = p(1-p)^2$

Ce qui confirme Q1 a) !

PARTIE II 2.. Etude du cas général.

1°.. Etude de la probabilité de la ruine du joueur.

a) Rappel.. Si $\in \mathbb{N}$, R_K^n est l'événement le joueur est ruiné à l'issue du $n^{\text{ième}}$ jet.

Soit $n \in [\![2,+\infty[\![$

$P_n(1) = p(R_1^n) = p(R_1^n \cap F_1) + p(R_1^n \cap P_1)$

Comme $n \geq 2$: $p(R_1^n \cap P_1) = 0$.

$p(R_1^n \cap F_1) = p(R_1^n | F_1)\, p(F_1) = p(R_1^n | F_1) \times p$.

Or la probabilité de R_1^n sachant F_1 est la même que la probabilité pour que la ruine du joueur intervienne après $n-1$ jets lorsqu'au départ il a deux francs ; en effet si F_1 est réalisé il a 2F à l'issue du 1er jet.. et il ne lui reste plus que $n-1$ jets pour se ruiner.

Donc $p(R_1^n \cap F_1) = p(R_1^n | F_1)\, p = p(R_2^{n-1})\, p = P_{n-1}(2)\, p$.

$\forall n \in [\![2,+\infty[\![,\ P_n(1) = p\, P_{n-1}(2)$. ou $\forall n \in [\![1,+\infty[\![,\ P_n(2) = \frac{1}{p} P_{n+1}(1)$

Soit $t \in [0,1]$.

$\forall n \in [\![2,+\infty[\![,\ t^n P_n(1) = pt\ t^{n-1} P_{n-1}(2)$; $\sum_{n=2}^{+\infty} t^n P_n(1) = pt \sum_{n=2}^{+\infty} t^{n-1} P_{n-1}(2)$

Donc $F_1(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} t^n P_n(1) = \sum_{n=2}^{+\infty} t^n P_n(1) + P_0(1) + t\, P_1(1) = pt \sum_{n=2}^{+\infty} t^{n-1} P_{n-1}(2) + t(1-p)$

$F_1(t) = pt \sum_{n=1 \text{ ou } 0}^{+\infty} t^n P_n(2) + t(1-p) = pt\, F_2(t) - t(1-p)$. $F_1(t) = pt\, F_2(t) + t(1-p)$

Or $pt(F_1(t))^2 = F_1(t) - (1-p)t = pt\, F_2(t) + t(1-p) - (1-p t) = pt\, F_2(t)$.

$\forall t \in]0,1]$, $t(F_1(t))^2 = t F_2(t)$; $\forall t \in]0,1]$, $(F_1(t))^2 = F_2(t)$.

F_1^2 et F_2 étant continue sur $[0,1]$ la dernière égalité vaut encore pour $t=0$.

Finalement : $\forall t \in [0,1],\ F_2(t) = (F_1(t))^2$

b) $K \geq 2$. Montrons que : $P_n(K) = \begin{cases} p\, P_{n-1}(K+1) + (1-p) P_{n-1}(K-1) & \text{si } n \geq 1 \\ 0 & \text{si } n = 0 \end{cases}$

Si $n=0$ c'est clair. Si $n=1$: $P_n(K) = P_1(K) = 0$ car $K \geq 2$. Or dans ce cas :

$p\, P_{n-1}(K+1) + (1-p) P_{n-1}(K-1) = p\, P_0(K+1) + (1-p) P_0(K-1) = 0$. L'égalité vaut encore pour $n=1$.

Supposons $n \geq 1$.

$p_n(K) = p(R_K^n) = p(R_K^n \cap F_1) + p(R_K^n \cap P_1) = p(R_K^n | F_1)p(F_1) + p(R_K^n | P_1)p(P_1)$.

$p_n(K) = p \; p(R_K^n / F_1) + (1-p)\, p(R_K^n | P_1)$.

Si le 1er jet donne face le joueur dispose de K+1 francs après ce premier jet. Par conséquent la probabilité pour qu'il soit ruiné à l'issue du $n^{ième}$ jet sachant que le 1er jet donne face est encore la probabilité pour qu'il soit ruiné après $n-1$ jets en ayant comme capital de départ K+1 francs ; $p(R_K^n | F_1) = p(R_{K+1}^{n-1}) = p_{n-1}(K+1)$

Un raisonnement analogue donne : $p(R_K^n | P_1) = p(R_{K-1}^{n-1}) = p_{n-1}(K-1)$

Finalement $\underline{p_n(K) = p\, p_{n-1}(K+1) + (1-p)\, p_{n-1}(K-1)}$.

Donc $p_n(K) = \begin{cases} p\, p_{n-1}(K+1) + (1-p)\, p_{n-1}(K-1) & \text{si } n \geq 1 \\ 0 & \text{si } n = 0. \end{cases}$

Soit $t \in [0,1]$.

$$F_K(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n(K)\, t^n = \sum_{n=1}^{+\infty} p_n(K)\, t^n = p \sum_{n=1}^{+\infty} p_{n-1}(K+1)\, t^n + (1-p) \sum_{n=1}^{+\infty} p_{n-1}(K-1)\, t^n$$

$$F_K(t) = p \sum_{n=0}^{+\infty} p_n(K+1)\, t^{n+1} + (1-p) \sum_{n=0}^{+\infty} p_n(K-1)\, t^{n+1} = p\, F_{K+1}(t)\, t + (1-p)\, F_{K-1}(t)\, t$$

$\underline{\forall t \in [0,1], \quad F_K(t) = p\, t\, F_{K+1}(t) + (1-p)\, t\, F_{K-1}(t).}$

Soit $t \in]0,1]$. $(F_K(t))_{K \geq 1}$ est une suite vérifiant une relation de récurrence d'ordre 2

d'équation caractéristique : $p t x^2 - x + (1-p)t = 0$

Cette équation admet deux solutions $x'(t)$ et $x''(t)$.

Par conséquence : $\exists (\lambda_t, \mu_t) \in \mathbb{R}^2, \ \forall K \in \mathbb{N}^*, \ F_K(t) = \lambda_t (x'(t))^K + \mu_t (x''(t))^{K-1}$

$$\begin{cases} \lambda_t x'(t) + \mu_t x''(t) = F_1(t) \\ \lambda_t (x'(t))^2 + \mu_t (x''(t))^2 = (F_1(t))^2 \end{cases}$$

$(F_1(t))^2 - x''(t) F_1(t) = \lambda_t \left[(x'(t))^2 - x'(t) x''(t) \right] = \lambda_t\, x'(t) \left(x'(t) - x''(t) \right)$.

Rappelons que $F_1(t) = x'(t)$, que $x'(t) \neq x''(t)$ et que $x'(t) \neq 0$ $(t \neq 0)$.

$(x'(t)) \left[x'(t) - x''(t) \right] = \lambda_t\, x'(t) (x'(t) - x''(t))$; $\lambda_t = 1$.

$x'(t) = F_1(t) = \lambda_t x'(t) + \mu_t x''(t) = x'(t) + \mu_t x''(t)$; $\mu_t x''(t) = 0$; $\mu_t = 0$ car $x''(t) \neq 0$.

Donc $F_K(t) = (z'(t))^K = (F_1(t))^K$ pour $t \in]0,1]$ et $K \in \mathbb{N}^*$.

Examinons le cas $t = 0$. $\forall K \in \mathbb{N}^*$, $F_K(0) = p_0(K) + \sum_{n=1}^{+\infty} p_n(K)\, 0^n = 0 = 0^K = (F_1(0))^K$

Finalement : $\forall K \in \mathbb{N}^*$, $\forall t \in [0,1]$, $F_K(t) = (F_1(t))^K$.

$$\forall K \in \mathbb{N}^*, \quad F_K(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t = 0 \\ \left(\dfrac{1 - \sqrt{1 - 4p(1-p)t^2}}{2pt}\right)^K & \text{si } t \in]0,1]. \end{cases}$$

c) Soit $K \in \mathbb{N}^*$. $F_K(1) = \left(\dfrac{1 - |2p-1|}{2p}\right)^K = \begin{cases} \left(\dfrac{1-p}{p}\right)^K & \text{si } p > 1/2 \\ 1^K & \text{si } p \leq 1/2 \end{cases}$

$$\text{donc} \quad p(R_K) = \begin{cases} \left(\dfrac{1-p}{p}\right)^K & \text{si } p > 1/2 \\ 1 & \text{si } p \leq 1/2 \end{cases}$$

Q2 Espérance du temps d'attente de la ruine du joueur pour $p \leq \frac{1}{2}$.

1^er^ cas : $p < 1/2$. F_1 est dérivable en 1 et $F_1'(1) = \dfrac{1}{1-2p}$.

Donc F_1^K est dérivable en 1 et $(F_1^K)'(1) = K F_1'(1) F_1^{K-1}(1) = \dfrac{K}{1-2p}$.

Par conséquent : λ_K possède une espérance qui vaut $\dfrac{K}{1-2p}$ si $p < \frac{1}{2}$

2^ième^ cas : $p = 1/2$. Rappelons que : $\lim_{t \to 1^-} \dfrac{F_1(t) - F_1(1)}{t-1} = +\infty$

$$\forall t \in]0,1[, \quad \frac{F_K(t) - F_K(1)}{t-1} = \frac{(F_1(t))^K - 1}{t-1} = \frac{F_1(t) - 1}{t-1}\left[(F_1(t))^{K-1} + (F_1(t))^{K-2} + \cdots + 1\right]$$

Donc $\lim_{t \to 1^-} \dfrac{F_K(t) - F_K(1)}{t-1} = +\infty$ $\quad \left(\lim_{t \to 1^-} \left[(F_1(t))^{K-1} + (F_1(t))^{K-2} + \cdots + 1\right] = K\right)$

F_K n'est pas dérivable en 1.

Si $p = \frac{1}{2}$, λ_K n'a pas d'espérance.

Q3. Expression des probabilités $P_n(k)$.

a) Rappelons que : $\forall n \in \mathbb{N},\ P_{2n}(1) = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ P_{2n+1}(1) = \dfrac{(2n)!}{n!\,(n+1)!}\ p^n (1-p)^{n+1}$.

Nous avons vu que : $\forall n \in [\![2,+\infty[\![,\ P_n(1) = p\,P_{n-1}(2)$; $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ P_n(2) = \dfrac{1}{p}\,P_{n+1}(1)$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ P_{2n}(2) = \dfrac{1}{p}\,P_{2n+1}(1) = \dfrac{(2n)!}{n!\,(n+1)!}\ p^{n-1}(1-p)^{n+1}$

$\forall n \in \mathbb{N},\ P_{2n+1}(2) = \dfrac{1}{p}\,P_{2n+2}(1) = 0.$

Par conséquent : $P_0(2) = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ P_{2n}(2) = \dfrac{(2n)!}{n!\,(n+1)!}\ p^{n-1}(1-p)^{n+1}$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ P_{2n+1}(2) = 0$

b) $\forall k \in [\![2,+\infty[\![,\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ P_n(k) = p\,P_{n-1}(k+1) + (1-p)\,P_{n-1}(k-1).$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ P_n(2) = p\,P_{n-1}(3) + (1-p)\,P_{n-1}(1).$

$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ P_{n-1}(3) = \dfrac{1}{p}\big(P_n(2) - (1-p)\,P_{n-1}(1)\big)$

$\forall n \in \mathbb{N},\ P_n(3) = \dfrac{1}{p}\big(P_{n+1}(2) - (1-p)\,P_n(1)\big)$

Donc $\forall n \in \mathbb{N},\ P_{2n}(3) = \dfrac{1}{p}\big(P_{2n+1}(2) - (1-p)\,P_{2n}(1)\big) = 0.$

$\forall n \in \mathbb{N},\ P(3) = \dfrac{1}{p}\big(P\ (2) - (1-p)\,P\ (1)\big) = \dfrac{1}{p}\Big[\dfrac{(2n+2)!}{}\ p^n(1-p)^{n+2} - (1-p)\dfrac{(2n)!}{}\ p^n(1-p)^{n+1}\Big]$

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P_{2n}(6) = \dfrac{(2n)!}{n!(n+1)!} \; \dfrac{3(n-1)(n-2)}{(n+2)(n+3)} \; p^{n-3} q^{n-3}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $P_{2n+1}(6) = 0$.

$\forall n \in \mathbb{N}$, $P_{2n}(7) = 0$ et $P_{2n+1}(7) = \dfrac{(2n)!}{n!(n+1)!} \; \dfrac{7n(n-1)(n-2)}{(n+2)(n+3)(n+4)} \; p^{n-3} q^{n+4}$

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P_{2n}(8) = \dfrac{(2n)!}{n!(n+1)!} \; \dfrac{4(n-1)(n-2)(n-3)}{(n+2)(n+3)(n+4)} \; p^{n-4} q^{n+4}$!

Il reste donc plus qu'à montrer que pour tout $K \in \mathbb{N}^*$:

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P_{2n}(2K) = \dfrac{(2n)!}{n!(n+1)!} \; \dfrac{K(n-1)(n-2)\cdots(n-K+1)}{(n+2)(n+3)\cdots(n+K)} \; p^{n-K} q^{n+K}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $P_{2n+1}(2K) = 0$

et

$\forall n \in \mathbb{N}$, $P_{2n}(2K+1) = 0$ et $P_{2n+1}(2K+1) = \dfrac{(2n)!}{n!(n+1)!} \; \dfrac{(2K+1)(n-1)(n-2)\cdots(n-K+1)}{(n+2)(n+3)\cdots(n+K+1)} \; p^{n-K} q^{n+K+1}$