PARTIE I

Q1 Etude du signe de la fonction f_0.

a) Supposons f_0 identiquement nulle sur $\mathbb{R}_+$.

Alors $-\lambda = \lim\limits_{y \to 0^+} \dfrac{f_0(y)-f_0(0)}{y} = 0$. $\lambda = 0$!

Donc f_0 n'est pas identiquement nulle sur $\mathbb{R}_+$.

$\forall (x,y) \in \mathbb{R}_+^2$, $f_0(x+y)=f_0(x)f_0(y)$ d'après (R_0).

Donc $\forall y \in \mathbb{R}_+$, $f_0(y)=f_0(0+y)=f_0(0)f_0(y)$. $\forall y \in \mathbb{R}_+$, $f_0(y)(1-f_0(0))=0$

Or $\exists y \in \mathbb{R}_+$, $f_0(y) \neq 0$. $f_0(y)(1-f_0(0))=0$ donne alors $f_0(0)=1$.

b) $\forall t \in \mathbb{R}_+$, $f_0(t)=f_0\left(\frac{t}{2}+\frac{t}{2}\right)=f_0\left(\frac{t}{2}\right)f_0\left(\frac{t}{2}\right)=\left(f_0\left(\frac{t}{2}\right)\right)^2$

$\forall t \in \mathbb{R}_+$, $f_0(t) \geqslant 0$.

c) Supposons que t_0 soit un réel positif tel que : $f_0(t_0)=0$.

Montrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $f_0(t_0/2^n)=0$.

- C'est clair pour $n=0$.
- Supposons la propriété vraie pour $n \in \mathbb{N}$ et montrons la pour $n+1$.

$0=f_0\left(\frac{t_0}{2^n}\right)=f_0\left(\frac{t_0}{2^{n+1}}+\frac{t_0}{2^{n+1}}\right)=\left[f_0\left(\frac{t_0}{2^{n+1}}\right)\right]^2$; donc $f_0\left(\frac{t_0}{2^{n+1}}\right)=0$. Ceci achève la récurrence.

f_0 est dérivable à droite en 0 donc continue à droite en 0.

Par conséquent : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{t_0}{2^n}=0$ donne : $\lim\limits_{n\to+\infty} f_0\left(\frac{t_0}{2^n}\right)=f_0(0)=1$

Or $\forall n \in \mathbb{N}$, $f_0\left(\frac{t_0}{2^n}\right)=0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} f_0\left(\frac{t_0}{2^n}\right)=0$ et $0=1$!

Par conséquent il n'existe pas de réel positif t_0 tel que $f_0(t_0)=0$

Donc $\forall t \in \mathbb{R}_+$, $f_0(t) \neq 0$. Comme $\forall t \in \mathbb{R}_+$, $f_0(t) \geqslant 0$:

$\forall t \in \mathbb{R}_+$, $f_0(t) > 0$.

Q2 Existence et unicité de f_0.

a) $x \in \mathbb{R}_+^*$.

$\forall y \in \mathbb{R}_+^*$, $\dfrac{f_0(x+y)-f_0(x)}{y} = \dfrac{f_0(x)f_0(y)-f_0(x)}{y} = \dfrac{f_0(y)-1}{y} f_0(x) = \dfrac{f_0(y)-f_0(0)}{y} f_0(x)$.

donc $\lim\limits_{y \to 0^+} \dfrac{f_0(x+y)-f_0(x)}{y} = -\lambda f_0(x)$; f_0 est donc dérivable à droite en x et

$(f_0')_d(x) = -\lambda f_0(x)$. Notons que ceci vaut encore pour $x=0$.

Soit $y \in]0,x[$. $\dfrac{f_0(x-y)-f_0(x)}{-y} = \dfrac{f_0(x)f_0(-y)-f_0(x)}{-y} = \dfrac{f_0(-y)-1}{-y} f_0(x) = \dfrac{f_0(-y)-f_0(0)}{-y} f_0(x)$

Or $\lim\limits_{y \to 0^+} \dfrac{f_0(-y)-f_0(0)}{-y} = -\lambda$; donc $\lim\limits_{y \to 0^+} \dfrac{f_0(x-y)-f_0(x)}{-y} = -\lambda f_0(x)$; $\lim\limits_{z \to 0} \dfrac{f_0(x+z)-f_0(x)}{z} = -\lambda f_0(x)$.

f_0 est donc dérivable à gauche en x et $(f_0')_g(x) = -\lambda f_0(x)$.

b) Finalement, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, f_0 est dérivable en x et $f_0'(x) = -\lambda f_0(x)$ car f_0 est dérivable à droite et à gauche en x ET les nombres dérivés à droite et à gauche coïncident comme f_0 est dérivable à droite en 0 et que $f_d'(0) = -\lambda = -\lambda f_0(0)$, nous pouvons dire que f_0 est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et $\forall x \in \mathbb{R}_+, f_0'(x) = -\lambda f_0(x)$.

c) Considérons $u : x \mapsto e^{\lambda x} f_0(x)$.

u est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $u'(x) = \lambda e^{\lambda x} f_0(x) + e^{\lambda x}(-\lambda f_0(x)) = 0$.

u' est nulle sur l'intervalle $\mathbb{R}_+$ donc u est constante sur $\mathbb{R}_+$. Or $u(0) = 1 \times 1 = 1$;

donc $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $u(x) = 1$; $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $e^{\lambda x} f_0(x) = 1$

Ceci donne : $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $f_0(x) = e^{-\lambda x}$.

d) Réciproquement posons $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $f_0(x) = e^{-\lambda x}$.

- $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^{+2}$, $f_0(x+y) = e^{-\lambda(x+y)} = e^{-\lambda x} e^{-\lambda y} = f_0(x) f_0(y)$; f_0 vérifie (R_0)
- f_0 est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $f_0'(x) = -\lambda e^{-\lambda x}$. En particulier f_0 est dérivable à droite en 0 et $(f_0')_d(0) = -\lambda$; f_0 vérifie (D_0)

Conclusion.. Il existe une application f_0 de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant (R_0) et (D_0) ; elle est définie par : $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $f_0(x) = e^{-\lambda x}$.

Q3 Existence et unicité de f_1.

a) $f_1(0) = f_1(0+0) = f_1(0)f_0(0) + f_0(0)f_1(0) \underset{f_0(0)=1}{=} 2f_1(0)$; $f_1(0)=0$.

$$\lim_{y\to 0^+} \frac{f_1(y)-f_1(0)}{y-0} = \lim_{y\to 0^+}\frac{f_1(y)}{y} \; ; \quad \lim_{y\to 0^+}\frac{f_1(y)}{y} = \lambda .$$

b) $x \in \mathbb{R}_+^*$

Soit $y \in \mathbb{R}_+^*$. $\dfrac{f_1(x+y)-f_1(x)}{y} = \dfrac{f_1(x)f_0(y)+f_0(x)f_1(y)-f_1(x)}{y} = f_1(x)\dfrac{f_0(y)-1}{y} + f_0(x)\dfrac{f_1(y)}{y}$

Par conséquent : $\lim\limits_{y\to 0^+}\dfrac{f_1(x+y)-f_1(x)}{y} = f_1(x)\times(-\lambda) + f_0(x)\times\lambda = \lambda(f_0(x)-f_1(x))$.

Par conséquent f_1 est dérivable à droite en x et $(f_1)'_d(x) = \lambda(f_0(x)-f_1(x))$.

Soit $y \in [0,x]$. $f_1(x) = f_1((x-y)+y) = f_1(x-y)f_0(y) + f_0(x-y)f_1(y)$

donc $f_1(x-y) = \dfrac{f_1(x) - f_0(x-y)f_1(y)}{f_0(y)}$. $\quad (f_0(y)\neq 0)$

Soit $y \in]0,x]$

$$\frac{f_1(x-y)-f_1(x)}{-y} = \frac{1}{-y}\left[\frac{f_1(x)-f_0(x-y)f_1(y)}{f_0(y)} - f_1(x)\right] = \frac{1}{-y}\,\frac{f_1(x)-f_0(x-y)f_1(y)-f_0(y)f_1(x)}{f_0(y)}$$

$$\frac{f_1(x-y)-f_1(x)}{-y} = \frac{1}{f_0(y)}\left[f_1(x)\frac{f_0(y)-1}{y} + f_0(x-y)\frac{f_1(y)}{y}\right]$$

f_0 est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ donc continue.

Notons que : $\lim\limits_{y\to 0^+}\dfrac{f_0(y)-1}{y} = -\lambda$, $\lim\limits_{y\to 0^+} f_0(x-y) = f_0(x)$, $\lim\limits_{y\to 0^+}\dfrac{f_1(y)}{y} = \lambda$ et $\lim\limits_{y\to 0^+} f_0(y) = 1$

Par conséquent : $\lim\limits_{y\to 0^+}\dfrac{f_1(x-y)-f_1(x)}{-y} = \dfrac{1}{1}\left[f_1(x)(-\lambda) + f_0(x)\times\lambda\right] = \lambda(f_0(x)-f_1(x))$

f_1 est dérivable à gauche en x et $(f_1)'_g(x) = \lambda(f_0(x)-f_1(x))$

c) f_1 est dérivable à droite et à gauche en x et $(f_1)'_d(x) = (f_1)'_g(x) = \lambda(f_0(x)-f_1(x))$ pour $x\in\mathbb{R}_+^*$

Donc f_1 est dérivable en x et $f_1'(x) = \lambda(f_0(x)-f_1(x))$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$.

De plus f_1 est dérivable à droite en x_0 et $(f_1)'_d(0) = \lambda = \lambda(f_0(0)-f_1(0))$;

Comme f_1 est une application de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$, on peut dire que :

f_1 est dérivable sur $[0,+\infty[$ et $\forall x \in [0,+\infty[$, $f_1'(x) = \lambda(f_0(x) - f_1(x))$.

d) Posons $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $u_1(x) = e^{\lambda x} f_1(x)$. u_1 est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et :

$\forall x \in \mathbb{R}_+$, $u_1'(x) = \lambda e^{\lambda x} f_1(x) + e^{\lambda x} f_1'(x) = e^{\lambda x}(\lambda f_1(x) + \lambda f_0(x) - \lambda f_1(x)) = e^{\lambda x} \lambda f_0(x) = \lambda$

Par conséquent : $\exists C_1 \in \mathbb{R}$, $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $u_1(x) = \lambda x + C_1$

Or $u_1(0) = 0$ car $f_1(0) = 0$ donc $C_1 = 0$. Donc $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $u_1(x) = \lambda x$.

$\forall x \in \mathbb{R}_+$, $e^{\lambda x} f_1(x) = \lambda x$.

$\forall x \in \mathbb{R}_+$, $f_1(x) = \lambda x e^{-\lambda x}$.

e) Réciproquement posons : $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $f_1(x) = \lambda x e^{-\lambda x}$.

$\forall (x,y) \in \mathbb{R}_+^2$, $f_1(x+y) = \lambda(x+y) e^{-\lambda(x+y)} = \lambda x e^{-\lambda x} e^{-\lambda y} + e^{-\lambda x}(\lambda y e^{-\lambda y}) = f_1(x) f_0(y) + f_0(x) f_1(y)$

f_1 vérifie (R_1)

$\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{f_1(x) - f_1(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\lambda x e^{-\lambda x}}{x} = \lambda$; f_1 est dérivable à droite en 0 et $(f_1)_d'(0) = f_1'(0) = \lambda$.

f_1 vérifie (D_1)

Conclusion.. Il existe une application f_1 de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ et une seule vérifiant (R_1) et (D_1)

Elle est définie par : $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $f_1(x) = \lambda x e^{-\lambda x}$.

Q4 Existence et unicité de la fonction f_2.

$\forall (x,y) \in \mathbb{R}_+^2$, $f_2(x+y) = f_2(x) f_0(y) + f_1(x) f_1(y) + f_0(x) f_2(y)$ et $\lim\limits_{y \to 0^+} \dfrac{f_2(y) - f_2(0)}{y - 0} = 0$.

a) $f_2(0+0) = f_2(0) f_0(0) + f_1(0) f_1(0) + f_0(0) f_2(0)$; $f_2(0) = 2 f_2(0)$; $f_2(0) = 0$.

$0 = f_2'(0) = \lim\limits_{y \to 0^+} \dfrac{f_2(y) - f_2(0)}{y - 0} = \lim\limits_{y \to 0^+} \dfrac{f_2(y)}{y}$; $\lim\limits_{y \to 0^+} \dfrac{f_2(y)}{y} = 0$.

b) Soit $x \in \mathbb{R}_+$

$\forall y \in \mathbb{R}_+^*$, $\dfrac{f_2(x+y) - f_2(x)}{y} = \dfrac{1}{y}\left[f_2(x)(f_0(y) - 1) + f_1(x) f_1(y) + f_0(x) f_2(y)\right] = f_2(x) \dfrac{f_0(y) - 1}{y} + f_1(x) \dfrac{f_1(y)}{y} + f_0(x) \dfrac{f_2(y)}{y}$

Donc $\lim\limits_{y\mapsto 0^+} \dfrac{f_2(x+y)-f_2(x)}{y} = f_2(x)\times(-\lambda)+f_1(x)\times\lambda + f_0(x)\times 0 = \lambda\,(f_1(x)-f_2(x))$.

f_2 est dérivable à droite en x et $(f_2)'_d(x)=\lambda(f_1(x)-f_2(x))$.

Soit $y\in[0,x]$. $f_2(x)=f_2((x-y)+y)=f_2(x-y)f_0(y)+f_1(x-y)f_1(y)+f_0(x-y)f_2(y)$.

donc $f_2(x-y)=\dfrac{1}{f_0(y)}\left[f_2(x)-f_1(x-y)f_1(y)-f_0(x-y)f_2(y)\right]$.

Supposons que : $y\in]0,x]$.

$\dfrac{f_2(x-y)-f_2(x)}{-y} = \dfrac{1}{-y}\,\dfrac{1}{f_0(y)}\left[f_2(x)-f_1(x-y)f_1(y)-f_0(x-y)f_2(y)-f_2(x)f_0(y)\right]$

$\dfrac{f_2(x-y)-f_2(x)}{y} = \dfrac{1}{f_0(y)}\left[f_2(x)\ \dfrac{f_0(y)-1}{y}+f_1(x-y)\ \dfrac{f_1(y)}{y}+f_0(x-y)\ \dfrac{f_2(y)}{y}\right]$

$\lim\limits_{y\mapsto 0^+} f_0(y)=1$, $\lim\limits_{y\mapsto 0^+} f_1(x-y)=f_1(x)$ et $\lim f_0(x-y)=f_0(x)$ (f_0 et f_1 sont continues sur $\mathbb{R}_+$ car dérivables).

de plus $\lim\limits_{y\mapsto 0^+}\dfrac{f_0(y)-1}{y}=-\lambda$, $\lim\limits_{y\mapsto 0^+}\dfrac{f_1(y)}{y}=\lambda$ et $\lim\limits_{y\mapsto 0^+}\dfrac{f_2(y)}{y}=0$;

Par conséquent : $\lim\limits_{y\mapsto 0^+}\dfrac{f_2(x-y)-f_2(x)}{y} = \dfrac{1}{1}\left[f_2(x)\,(-\lambda)+f_1(x)\,(\lambda)+f_0(x)\,(0)\right]$

f_2 est dérivable à gauche en x et $(f_2)'_g(x)=\lambda(f_1(x)-f_2(x))$.

c) Si $x\in\mathbb{R}_+^*$, f_2 est dérivable à droite et à gauche en x et $(f_2)'_g(x)=(f_2)'_d(x)=\lambda(f_1(x)-f_2(x))$.

Pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*$, f_2 est donc dérivable en x et $f_2'(x)=\lambda(f_1(x)-f_2(x))$

Rappelons que f_2 est dérivable à droite en 0 et $(f_2)'_d(0)=0=\lambda(f_1(0)-f_2(0))$.

f_2 étant une application de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$:

f_2 est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et $\forall x\in\mathbb{R}_+$, $f_2'(x)=\lambda(f_1(x)-f_2(x))$.

d) Posons $\forall x\in\mathbb{R}_+$, $u_2(x)=e^{\lambda x}f_2(x)$. u_2 est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et

$\forall x\in\mathbb{R}_+$, $u_2'(x)=\lambda e^{\lambda x}f_2(x)+e^{\lambda x}f_2'(x)=e^{\lambda x}(\lambda f_2(x)+\lambda f_1(x)-\lambda f_2(x))=\lambda^2 x\,e^{\lambda x}e^{-\lambda x}=\lambda^2 x$

donc $\exists C_2 \in \mathbb{R}$, $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $u_2(x) = \frac{\lambda^2 x^2}{2} + C_2$. Or $u_2(0) = \lambda f_2(0) = 0$ donc $C_2 = 0$.

$\forall x \in \mathbb{R}_+$, $e^{\lambda x} f_2(x) = \frac{\lambda^2 x^2}{2}$.

donc $\underline{\forall x \in \mathbb{R}_+,\ f_2(x) = \frac{\lambda^2 x^2}{2} e^{-\lambda x}}$.

c) Réciproquement pour $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $f_2(x) = \frac{\lambda^2 x^2}{2} e^{-\lambda x}$.

$\forall (x,y) \in \mathbb{R}_+^2$, $f_2(x+y) = \frac{\lambda^2 (x+y)^2}{2} e^{-\lambda(x+y)} = \frac{\lambda^2 x^2}{2} e^{-\lambda x} e^{-\lambda y} + \lambda x e^{-\lambda x} \lambda y e^{-\lambda y} + e^{-\lambda x} \frac{\lambda^2 y^2}{2} e^{-\lambda x}$

$\forall (x,y) \in \mathbb{R}_+^2$, $f_2(x+y) = f_2(x) f_0(y) + f_1(x) f_1(y) + f_0(x) f_2(y)$; f_2 vérifie (R_2).

$\lim_{y \to 0^+} \frac{f_2(y) - f_2(0)}{y} = \lim_{y \to 0^+} \left(\frac{\lambda^2 y}{2} e^{-\lambda y} \right) = 0$; f_2 est dérivable à droite en 0 et $f_2'(0) = 0$; f_2 vérifie alors (D_2).

conclusion... Il existe une application f_2 de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ et une seule vérifiant (R_2) et (D_2).

Elle est définie par : $\underline{\forall x \in \mathbb{R}_+,\ f_2(x) = \frac{\lambda^2 x^2}{2} e^{-\lambda x}}$.

(Q5) Généralisation : existence et unicité de la fonction f_n $(n \geq 2)$.

Pour la 4ième fois...

a) $f_n(0) = \sum_{k=0}^{n} f_{n-k}(x) f_k(y) = f_n(0) f_0(0) + f_0(0) f_n(0) = 2 f_n(0)$; $\underline{f_n(0) = 0}$.

donc $\underline{\lim_{y \to 0^+} \frac{f_n(y)}{y} = \lim_{y \to 0^+} \frac{f_n(y) - f_n(0)}{y} = 0}$.

b) Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$.

$\forall y \in \mathbb{R}_+^*$, $\frac{f_n(x+y) - f_n(x)}{y} = \frac{\sum_{k=0}^{n} f_{n-k}(x) f_k(y) - f_n(x)}{y} = \sum_{k=1}^{n} f_{n-k}(x) \frac{f_k(y)}{y} + f_n(x) \frac{f_0(y) - 1}{y}$

$\lim_{y \to 0^+} \frac{f_0(y) - 1}{y} = -\lambda$; $\lim \frac{f_1(y)}{y} = \lim \frac{f_1(y) - f_1(0)}{y} = \lambda$ et $\lim \frac{f_k(y)}{y} = \lim \frac{f_k(y) - f_k(0)}{y} = 0$ pour $k \in [\![2, n]\!]$

donc $\lim_{y \to 0^+} \frac{f_n(x+y) - f_n(x)}{y} = f_{n-1}(x) \lambda + f_n(x)(-\lambda) = \lambda (f_{n-1}(x) - f_n(x))$.

$\underline{f_n \text{ est donc dérivable à droite en } x \text{ et } (f_n)'_d(x) = \lambda (f_{n-1}(x) - f_n(x))}$.

Soit $y \in]0,x]$. $f_n(x) = f_n(x-y+y) = \sum_{k=0}^{n} f_{n-k}(x-y)f_k(y) = f_n(x-y)f_0(y) + \sum_{k=1}^{n} f_{n-k}(x-y)f_k(y)$

Donc $f_n(x-y) = \frac{1}{f_0(y)}\left[f_n(x) - \sum_{k=1}^{n} f_{n-k}(x-y)f_k(y)\right]$.

$$\frac{f_n(x-y)-f_n(x)}{-y} = \frac{1}{f_0(y)}\,\frac{1}{-y}\left[f_n(x) - \sum_{k=1}^{n} f_{n-k}(x-y)f_k(y) - f_n(x)f_0(y)\right]$$

$$\frac{f_n(x-y)-f_n(x)}{-y} = \frac{1}{f_0(y)}\left[f_n(x)\,\frac{f_0(y)-1}{y} + \sum_{k=1}^{n} f_{n-k}(x-y)\,\frac{f_k(y)}{y}\right]$$

$\lim_{y\to 0^+} f_0(y) = 1$ (f_0 est continue à droite en 0 car dérivable à droite en 0).

$\lim_{y\to 0^+} \frac{f_0(y)-1}{y} = -\lambda$ et $\lim_{y\to 0^+} \frac{f_k(y)}{y} = \begin{cases} 0 & \text{si } k \geq 2 \\ \lambda & \text{si } k = 1 \end{cases}$

Pour finir $\lim_{y\to 0^+} f_{n-k}(x-y) = f_{n-k}(x)$ pour $k \in [\![1,n]\!]$ car $f_0, f_1, \dots, f_{n-1}$ sont dérivables sur $\mathbb{R}_+$ (relire le début de la question) donc continues sur $\mathbb{R}_+$.

Finalement : $\lim_{y\to 0^+} \frac{f_n(x-y)-f_n(x)}{-y} = \frac{1}{1}\left[f_n(x)(-\lambda) + \sum_{k=2}^{n} f_{n-k}(x)\times 0 + f_{n-1}(x)\times\lambda\right]$

Par conséquent f_n est dérivable à gauche en x et : $(f_n)'_g(x) = \lambda(f_{n-1}(x) - f_n(x))$.

Pour $x \in \mathbb{R}^*$, f_n est dérivable à droite et à gauche en x et : $(f_n)'_d(x) = (f_n)'_g(x) = \lambda(f_{n-1}(x) - f_n(x))$.

Par conséquent, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, f_n est dérivable en x et $f_n'(x) = \lambda(f_{n-1}(x) - f_n(x))$.

Notons que : f_n est dérivable à droite en 0 et $(f_n)'_d(x) = 0 = \lambda(f_{n-1}(0) - f_n(0))$ car $n \geq 2$

Finalement f_n est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $f_n'(x) = \lambda(f_{n-1}(x) - f_n(x))$.

c) Posons : $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $u_n(x) = e^{\lambda x} f_n(x)$. u_n est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et

$\forall x \in \mathbb{R}_+$, $u_n'(x) = \lambda e^{\lambda x} f_n(x) + e^{\lambda x} f_n'(x) = e^{\lambda x}(\lambda f_n(x) + \lambda f_{n-1}(x) - \lambda f_n(x)) = \lambda f_{n-1}(x) e^{\lambda x}$

Supposons $n=3$

Pour tout $k \in [\![0,3]\!]$ nous avons qu'il existe une et une seule fonction f_k vérifiant (R_k) et (D_k), dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et vérifiant $f_k(0)=0$ pour $k \geqslant 1$.

Donc si f_3 vérifie (R_3) et (D_3) d'après ce qui précède on a :

$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ u_3'(x) = \lambda f_2(x) e^{\lambda x} = \lambda\ \lambda^2 \frac{x^2}{2} e^{-\lambda x} e^{\lambda x} = \lambda^3 \frac{x^2}{2}$ Q5a)

$\exists c_3 \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ u_3(x) = \lambda^3 \frac{x^3}{6} + c_3$. Or $u_3(0) = 1 \times f_3(0) = 0$

Donc $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ u_3(x) = e^{\lambda x} f_3(x) = \lambda^3 \frac{x^3}{3!}$

Par conséquent : $\underline{\underline{\forall x \in \mathbb{R}_+,\ f_3(x) = \frac{\lambda^3 x^3}{3!} e^{-\lambda x}.}}$

La récurrence que l'on nous propose n'est pas très satisfaisante. Prenons un peu de hauteur et montrons maintenant qu'il existe une suite $(f_n)_{n\geqslant 0}$ et une seule d'applications de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n vérifie (R_n) et (D_n).

Existence..

Posons $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R}_+,\ f_n(x) = \frac{\lambda^n x^n}{n!} e^{-\lambda x}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. $\forall (x,y) \in \mathbb{R}_+^2,\ \sum_{k=0}^{n} f_{n-k}(x) f_k(y) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\lambda^{n-k} x^{n-k}}{(n-k)!} e^{-\lambda x} \frac{\lambda^k y^k}{k!} e^{-\lambda y} = \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda(x+y)} \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^{n-k} y^k$

$\forall (x,y) \in \mathbb{R}_+^2,\ \sum_{k=0}^{n} f_{n-k}(x) f_k(y) = \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda(x+y)} (x+y)^n = f_n(x+y)$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n vérifie (R_n).

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $n \geqslant 2$. $\lim\limits_{y \to 0^+} \frac{f_n(y) - f_n(0)}{y} = \lim\limits_{y \to 0^+} \left(\frac{\lambda^n}{n!} y^{n-1} e^{-\lambda y} \right) = 0$.

Nous savons déjà que : $\lim\limits_{y \to 0^+} \frac{f_0(y) - f_0(0)}{y} = -\lambda$ et $\lim\limits_{y \to 0^+} \frac{f_1(y) - f_1(0)}{y} = \lambda$

Par conséquent pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n vérifie (D_n).

Ceci achève de prouver l'existence.

Unicité.. Supposons que $(\hat{f}_n)_{n\geqslant 0}$ soit une seconde suite solution du problème. Montrons par une récurrence forte que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \hat{f}_n = f_n$.

d'après Q2 nous avons $\hat{f}_0 = f_0$.

Montrons maintenant que : $\forall n \in [\![1, +\infty[\![, \hat{f}_n = f_n$

- c'est vrai pour $n = 1$ d'après Q4
- Supposons maintenant que la propriété soit vraie jusqu'à $n-1$ avec $n \geq 2$ et montrons la pour n.

  Pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, $\hat{f}_k$ vérifie (R_k) et (D_k)
  - $\hat{f}_k$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$
  - $\hat{f}_k(0) = 0$ pour $k \geq 1$

Comme $\hat{f}_n$ vérifie (R_n) et (D_n) en posant $\forall x \in \mathbb{R}_+, u_n(x) = e^{\lambda x} \hat{f}_n(x)$ on a u_n dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $u_n'(x) = \lambda \hat{f}_{n-1}(x) e^{\lambda x}$; on a encore $\hat{f}(0) = 0$.

Par conséquent : $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $u_n'(x) = \lambda \hat{f}_{n-1}(x) e^{\lambda x} = \lambda f_{n-1}(x) e^{\lambda x} = \lambda \dfrac{\lambda^{n-1} x^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda x} e^{\lambda x} = \lambda^n \dfrac{x^{n-1}}{(n-1)!}$.

$\exists C_n \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}_+, u_n(x) = \lambda^n \dfrac{x^n}{n!} + C_n$. $u_n(0) = e^{\lambda \times 0} \hat{f}_n(0) = 0$

donc $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $e^{\lambda x} \hat{f}_n(x) = u_n(x) = \lambda^n \dfrac{x^n}{n!}$. Par conséquent : $\forall x \in \mathbb{R}_+, \hat{f}_n(x) = \dfrac{\lambda^n x^n}{n!} e^{-\lambda x}$

Donc $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $\hat{f}_n(x) = f_n(x)$ ce qui achève la récurrence.

PARTIE II

Q1 a) $(x,y)\in\mathbb{R}_+^2$

$\{N(0,x+y)=0\} = \{N(0,x)=0\}\cap\{N(x,x+y)=0\}$. Comme $N(0,x)$ et $N(x,x+y)$ sont indépendantes : $p(N(0,x+y)=0) = p(N(0,x)=0)\,p(N(x,x+y)=0)$

Ceci donne : $p_0(x+y) = p_0(x)\,p_0(x+y-x)$

donc $\underline{\forall (x,y)\in\mathbb{R}_+^2,\ p_0(x+y) = p_0(x)p_0(y)}$

b) Soit $n\in\mathbb{N}$. Soit $(x,y)\in\mathbb{R}_+^2$.

L'événement $\{N(0,x+y)=n\}$ est contenu dans la réunion disjointe $\bigcup_{k=0}^{n}\{N(0,x)=k\}$

donc $\{N(0,x+y)=n\} = \bigcup_{k=0}^{n}\{N(0,x)=k\}\cap\{N(0,x+y)=n\}$

$$p_n(x+y) = p(N(0,x+y)=n) = \sum_{k=0}^{n} p\left(\{N(0,x)=k\}\cap\{N(0,x+y)=n\}\right).$$

Or pour tout $k\in[\![0,n]\!]$, $\{N(0,x)=k\}\cap\{N(0,x+y)=n\} = \{N(0,x)=k\}\cap\{N(x,x+y)=n-k\}$; notons que ces deux derniers événements sont indépendants.

Il vient alors : $p_n(x+y) = \sum_{k=0}^{n} p(\{N(0,x)=k\}\cap\{N(x,x+y)=n-k\}) = \sum_{k=0}^{n} p(N(0,x)=k)\,p(N(x,x+y)=n-k)$

ou encore : $p_n(x+y) = \sum_{k=0}^{n} p_k(x)\,p_{n-k}(x+y-x) = \sum_{k=0}^{n} p_k(x)\,p_{n-k}(y) \underset{k\to n-k}{=} \sum_{k=0}^{n} p_{n-k}(x)\,p_k(y)$.

Finalement, $\underline{\forall n\in\mathbb{N},\ \forall (x,y)\in\mathbb{R}_+^2,\ p_n(x+y) = \sum_{k=0}^{n} p_{n-k}(x)\,p_k(y)}$.

Q2 Dérivabilité en 0 des fonctions p_n :

a) Soit $(t_1,t_2)\in\mathbb{R}^2$ tel que : $t_1\leq t_2$.

$p(N(t_1,t_2)=0) = 1 - p(N(t_1,t_2)=1) - p(N(t_1,t_2)\geq 2)$

$p(N(t_1,t_2)=0) = 1 - \lambda(t_2-t_1) - (t_2-t_1)\varepsilon_1(t_2-t_1) - (t_2-t_1)\varepsilon(t_2-t_1)$.

Posons $\varepsilon_0 = -\varepsilon_1 - \varepsilon$.

Alors
- $p(N(t_1,t_2)=0) = 1-\lambda(t_2-t_1) + (t_2-t_1)\,\varepsilon_0(t_2-t_1)$
- ε_0 est une application de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$
- $\lim_{x\to 0^+}\varepsilon_0(x) = \lim_{x\to 0^+}(-\varepsilon_1(x)-\varepsilon(x)) = -0-0 = 0$

$\varepsilon_0 = -\varepsilon_1-\varepsilon$ est solution au problème posé.

b) Soit $n \in [\![2,+\infty[\![$. Posons pour $x \in \mathbb{R}_+$, $\mathcal{E}_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x=0 \\ p_n(x)/x & \text{si } x>0 \end{cases}$: $\forall x\in\mathbb{R}_+,\ p_n(x)=x\,\mathcal{E}_n(x)$

Soit $(t_1,t_2)\in\mathbb{R}^2$ tel que $t_1\leq t_2$.

$p(N(t_1,t_2)=n) = p_n(t_2-t_1) = (t_2-t_1)\,\mathcal{E}_n(t_2-t_1)$. Montrons maintenant que :

$\lim\limits_{x\mapsto 0^+}\mathcal{E}_n(x)=0$.

Soit $x\in\mathbb{R}_+^*$. $\exists (t_1,t_2)\in\mathbb{R}^2$ tel que : $x=t_2-t_1$ et $t_2\geqslant t_1$. En fait $t_2>t_1$.

$0\leq p_n(x) \underset{x=t_2-t_1}{\overset{\uparrow}{=}} p(N(t_1,t_2)=n) \leq p(N(t_1,t_2)\geqslant 2) = (t_2-t_1)\,\mathcal{E}(t_2-t_1) = x\,\mathcal{E}(x)$.

Donc $0\leq \dfrac{p_n(x)}{x}\leq\mathcal{E}(x)$. Comme $\lim\limits_{x\mapsto0^+}\mathcal{E}(x)=0$: $\lim\limits_{x\mapsto0^+}\dfrac{p_n(x)}{x}=0$, $\lim\limits_{x\mapsto0^+}\mathcal{E}_n(x)=0$

Il existe une application $\mathcal{E}_n$ de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$, de limite nulle en 0 telle que :

$p(N(t_1,t_2)=n) = (t_2-t_1)\,\mathcal{E}_n(t_2-t_1)$ pour $(t_1,t_2)\in\mathbb{R}^2$ et $t_1\leq t_2$.

c) Soit $x\in\mathbb{R}_+$. $\exists (t_1,t_2)\in\mathbb{R}^2$ tel que : $x=t_2-t_1$ et $t_2\geqslant t_1$.

$p_0(x)=p_0(t_2-t_1)=1-\lambda(t_2-t_1)+(t_2-t_1)\,\mathcal{E}_0(t_2-t_1)=1-\lambda x+x\,\mathcal{E}_0(x)$

$p_1(x)=p_1(t_2-t_1)=\lambda(t_2-t_1)+(t_2-t_1)\,\mathcal{E}_1(t_2-t_1)=\lambda x+x\,\mathcal{E}_1(x)$.

$p_n(x)=p_n(t_2-t_1)=(t_2-t_1)\,\mathcal{E}_n(t_2-t_1)=x\,\mathcal{E}_n(x)$ pour $n\in\mathbb{N}$ et $n\geqslant 2$

$\forall x\in\mathbb{R}_+$, $p_0(x)=1-\lambda x+x\,\mathcal{E}_0(x)$ avec $\lim\limits_{x\mapsto0^+}\mathcal{E}_0(x)=0$. $p_0(x)=1-\lambda x+o(x)$.

$\forall x\in\mathbb{R}_+$, $p_1(x)=\lambda x+x\,\mathcal{E}_1(x)$ avec $\lim\limits_{x\mapsto0^+}\mathcal{E}_1(x)=0$. $p_1(x)=\lambda x+o(x)$

$\forall n\in\mathbb{N}-\{0,1\}$, $\forall x\in\mathbb{R}_+$, $p_n(x)=x\,\mathcal{E}_n(x)$ avec $\lim\limits_{x\mapsto0^+}\mathcal{E}_n(x)=0$. $p_n(x)=o(x)$ pour $n\geqslant 2$

Ce qui précède donne un DL 1 en 0 à p_n pour tout $n\in\mathbb{N}$.

d) $p_0(x)=1-\lambda x+o(x)$; p_0 est dérivable à droite en 0 et $p_0'(0)=-\lambda$.

$p_1(x)=\lambda x+o(x)$; p_1 est dérivable à droite en 0 et $p_1'(0)=\lambda$.

Si $n\in[\![2,+\infty[\![$, $p_n(x)=o(x)$; p_n est dérivable à droite en 0 et $p_n'(0)=0$.

(Q3) a) et b) Q1 b) et Q2 a) montrent que pour tout $n \in \mathbb{N}$, P_n vérifie (R_n) et (D_n)

Donc $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}_+, P_n(x) = \dfrac{\lambda^n x^n}{n!} e^{-\lambda x}$.

Soit $(t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2$, tel que : $t_1 \leq t_2$. $\forall n \in \mathbb{N}$, $p(N(t_1, t_2) = n) = P_n(t_2 - t_1) = \dfrac{(\lambda(t_2-t_1))^n}{n!} e^{-\lambda(t_2-t_1)}$

ceci montre alors que : $N(t_1, t_2) \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda(t_2 - t_1))$ ... au moins pour $t_2 > t_1$.

(Q4) a) Dire que le $n^{\text{ième}}$ client arrive après l'instant t équivaut à dire qu'entre les instants 0 et t il est arrivé au plus $n-1$ clients.

Par conséquent les événements $\{N(0,t) \leq n-1\}$ et $\{T_n > t\}$ sont égaux.

b) Déterminons la fonction de répartition F_1 de T_1.

$\forall x \in \mathbb{R}_-^*$, $F_1(x) = p(T_1 \leq x) = 0$.

$\forall x \in \mathbb{R}_+$, $F_1(x) = p(T_1 \leq x) = 1 - p(T_1 > x) = 1 - p(N(0,x) \leq 0) = 1 - p(N(0,x) = 0)$

$\forall x \in \mathbb{R}_+$, $F_1(x) = 1 - \dfrac{(\lambda x)^0}{0!} e^{-\lambda x} = 1 - e^{-\lambda x}$ (à un chouïa près).

Finalement T_1 suit une loi exponentielle de paramètre λ.

c) Traitons directement du cas général. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Notons F_n la fonction de répartition de T_n.

$\forall x \in \mathbb{R}_-^*$, $F_n(x) = p(T_n \leq x) = 0$

$\forall x \in \mathbb{R}_+$, $F_n(x) = p(T_n \leq x) = 1 - p(T_n > x) = 1 - p(N(0,x) \leq n-1) = 1 - \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} p(N(0,x) = k)$

$\forall x \in \mathbb{R}_+$, $F_n(x) = 1 - \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\lambda x)^k}{k!} e^{-\lambda x}$, notons que $F_n(0) = 0$.

On peut donc écrire : $\forall x \in]-\infty, 0]$, $F_n(x) = 0$ et $\forall x \in [0, +\infty[$, $F_n(x) = 1 - \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\lambda x)^k}{k!} e^{-\lambda x}$

F_n est clairement continue et dérivable sur $]-\infty, 0]$ et sur $[0, +\infty[$.

F_n est donc continue en tout point de $\mathbb{R}$ et dérivable en tout point de $\mathbb{R}^*$

$\forall x \in]-\infty, 0[$, $F_n'(x) = 0$. $\forall x \in]0, +\infty[$, $F_n'(x) = -\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\lambda^k}{k!} [k x^{k-1} - \lambda x^k] e^{-\lambda x}$

$\forall x \in]0, +\infty[$, $F_n'(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\lambda^{k+1}}{k!} x^k e^{-\lambda x} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\lambda^k}{(k-1)!} x^{k-1} e^{-\lambda x} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\lambda^{k+1}}{k!} x^k e^{-\lambda x} - \sum_{k=0}^{n-2} \frac{\lambda^{k+1}}{k!} x^k e^{-\lambda x}$

$\forall x \in]0,+\infty[,\ F_n'(x) = \dfrac{\lambda^n x^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda x}$

Finalement : $\forall x \in \mathbb{R}_-^*$, $F_n'(x) = 0$ et $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $F_n'(x) = \dfrac{\lambda^n x^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda x}$. F_n' est continue sur $\mathbb{R}^*$.

F_n est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$. T_n est donc une var à densité.
Ce qui précède montre que l'on peut prendre pour densité de T_n la fonction f_n définie par : $\forall x \in \mathbb{R}_-^*$, $f_n(x) = 0$ et $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $f_n(x) = \dfrac{\lambda^n x^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda x}$.

d) Notons que $\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(t)\,dt$ existe et vaut 1. Ceci prouve que : $\int_0^{+\infty} \dfrac{\lambda^n}{(n-1)!} t^{n-1} e^{-\lambda t}\,dt$ existe et vaut 1. Donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\int_0^{+\infty} t^{n-1} e^{-\lambda t}\,dt$ existe et vaut $\dfrac{(n-1)!}{\lambda^n}$

$\forall t \in [0,+\infty[,\ t f_n(t) = \dfrac{\lambda^n}{(n-1)!} t^n e^{-\lambda t}$. $\int_0^{+\infty} t^n e^{-\lambda t}\,dt$ existe et vaut $\dfrac{n!}{\lambda^{n+1}}$;

par conséquent : $\int_0^{+\infty} t f_n(t)\,dt$ existe et vaut $\dfrac{\lambda^n}{(n-1)!} \times \dfrac{n!}{\lambda^{n+1}} = \dfrac{n}{\lambda}$

donc T_n possède une espérance et $E(T_n) = \dfrac{n}{\lambda}$.

$\forall t \in [0,+\infty[,\ t^2 f_n(t) = \dfrac{\lambda^n}{(n-1)!} t^{n+1} e^{-\lambda t}$. $\int_0^{+\infty} t^{n+1} e^{-\lambda t}\,dt$ existe et vaut $\dfrac{(n+1)!}{\lambda^{n+2}}$ donc

$\int_0^{+\infty} t^2 f_n(t)\,dt$ existe et vaut : $\dfrac{\lambda^n}{(n-1)!} \times \dfrac{(n+1)!}{\lambda^{n+2}} = \dfrac{n(n+1)}{\lambda^2}$

Donc T_n^2 possède une espérance qui vaut $\dfrac{n(n+1)}{\lambda^2}$. Par conséquent T_n possède une variance qui vaut : $E(T_n^2) - E(T_n)^2 = \dfrac{n(n+1)}{\lambda^2} - \dfrac{n^2}{\lambda^2} = \dfrac{n}{\lambda^2}$

T_n possède une variance et $V(T_n) = \dfrac{n}{\lambda^2}$.

▼ Remarques.. 1.. Pour $n = 1$, on retrouve l'espérance et la variance d'une var suivant une loi exponentielle de paramètre λ.

2.. Tout se passe comme si T_n était la somme de n var indépendantes suivant une loi exponentielle de paramètre λ.

(Méditer sur $T_{k+1} - T_k$ et sur $T_n = T_1 + (T_2 - T_1) + (T_3 - T_2) + \cdots + (T_n - T_{n-1})$) ▼

Q5 Loi du nombre de clients procédant à un achat.

C'est presque du cours..

a) Soit $n\in\mathbb{N}$ et soit $k\in[\![0,n]\!]$

$$p(A(t_1,t_2)=k \,/\, N(t_1,t_2)=n) = C_n^k \, p^k \, q^{n-k}$$

← probabilité pour que les $n-k$ autres n'achètent pas

← probabilité pour que ces k clients achètent

← choix des k clients qui achètent.

Par conséquent :

$$A(t_1,t_2) \,/_{N(t_1,t_2)=n} \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p).$$

b) Soit $k\in\mathbb{N}$. $(\{N(t_1,t_2)=n\})_{n\in\mathbb{N}}$ étant un système complet d'événements :

$$p(A(t_1,t_2)=k) = \sum_{n=0}^{+\infty} p(A(t_1,t_2)=k \,/\, N(t_1,t_2)=n)\, p(N(t_1,t_2)=n) = \sum_{n=k}^{+\infty} C_n^k p^k q^{n-k} \frac{(\lambda(t_2-t_1))^n}{n!} e^{-\lambda(t_2-t_1)}$$

$$p(A(t_1,t_2)=k) = \frac{1}{k!} p^k e^{-\lambda(t_2-t_1)} (\lambda(t_2-t_1))^k \underbrace{\sum_{n=k}^{+\infty} \frac{q^{n-k}(\lambda(t_2-t_1))^{n-k}}{(n-k)!}}_{=\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{q^n(\lambda(t_2-t_1))^n}{n!} = e^{q\lambda(t_2-t_1)}}$$

$$p(A(t_1,t_2)=k) = \frac{1}{k!}(\lambda p(t_2-t_1))^k e^{\lambda(t_2-t_1)(q-1)}$$

$$p(A(t_1,t_2)=k) = \frac{1}{k!}(\lambda p(t_2-t_1))^k e^{-\lambda(t_2-t_1)p}$$

$$\forall k\in\mathbb{N},\ p(A(t_1,t_2)=k) = \frac{(\lambda(t_2-t_1)p)^k}{k!} e^{-\lambda(t_2-t_1)p}.\quad A(t_1,t_2)\hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda(t_2-t_1)p).$$

$$E(A(t_1,t_2)) = \lambda(t_2-t_1)p.$$

c) De même $B(t_1,t_2)\hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda(t_2-t_1)q)$ (il suffit d'échanger les rôles de p et q).

d) Soit $(i,j)\in\mathbb{N}^2$.

$$p(\{A(t_1,t_2)=i\}\cap\{B(t_1,t_2)=j\}) = p(\{A(t_1,t_2)=i\}\cap\{N(t_1,t_2)=i+j\})$$

$$= p(A(t_1,t_2)=i \,/\, N(t_1,t_2)=i+j)\, p(N(t_1,t_2)=i+j)$$

$$= C_{i+j}^i p^i q^j \frac{(\lambda(t_2-t_1))^{i+j}}{(i+j)!} e^{-\lambda(t_2-t_1)}$$

$$= \frac{p^i}{i!}(\lambda(t_2-t_1))^i e^{-\lambda(t_2-t_1)p}\ \frac{q^j}{j!}(\lambda(t_2-t_1))^j e^{-\lambda(t_2-t_1)q}$$

$$= p(A(t_1,t_2)=i)\, p(B(t_1,t_2)=j)\ ;$$

$A(t_1,t_2)$ et $B(t_1,t_2)$ sont indépendantes.