PARTIE I

Q1 a) Les racines complexes de l'équation $z^r=1$ sont les racines $r^{\text{ièmes}}$ de l'unité, c'est à dire $z_0, z_1, \dots, z_{r-1}$ avec $z_k = e^{ik\frac{2\pi}{r}}$ pour tout $k \in [\![0, r-1]\!]$

Notons que : $\forall k \in [\![0,r-1]\!]$, $z_k = (e^{i\frac{2\pi}{r}})^k = \omega_r^k$.

Par conséquent les racines complexes de l'équation $z^r=1$ sont : $1, \omega_r, \omega_r^2, \omega_r^3, \dots, \omega_r^{r-1}$

b) $S_r(x) = \sum_{k=0}^{r-1} \omega_r^{kx} = \sum_{k=0}^{r-1} (\omega_r^x)^k$

1^{er} cas.. $\omega_r^x = 1$; $S_r(x) = r$ $\quad (\forall k \in [\![0,r-1]\!],\ (\omega_r^x)^k = 1)$

$2^{ème}$ cas.. $\omega_r^x \neq 1$. $S_r(x) = \dfrac{1-(\omega_r^x)^r}{1-\omega_r^x} = \dfrac{1-((\omega_r)^r)^x}{1-\omega_r^x} = 0$ car $(\omega_r)^r = 1$.

Notons que : $\omega_r^x = 1 \Leftrightarrow (e^{2i\pi/r})^x = 1 \Leftrightarrow e^{i\frac{2\pi x}{r}} = 1 \Leftrightarrow \frac{2\pi x}{r} \equiv 0\ [2\pi]$

$\omega_r^x = 1 \Leftrightarrow \frac{x}{r} \equiv 0\ [1] \Leftrightarrow x \equiv 0\ [r] \Leftrightarrow x$ est multiple de r.

Résumons. Si x est multiple de r : $S_r(x) = r$;
si x n'est pas multiple de r : $S_r(x) = 0$

$t_r(x,y) = \sum_{k=0}^{r-1} \omega_r^{-xk}\omega_r^{ky} = \sum_{k=0}^{r-1} \omega_r^{k(y-x)} = S_r(y-x)$.

Donc si $y-x$ est un multiple de r : $t_r(x,y) = r$;
si $y-x$ n'est pas un multiple de r : $t_r(x,y) = 0$.

Q2 a) $M_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega_4 & \omega_4^2 & \omega_4^3 \\ 1 & \omega_4^2 & \omega_4^{2\times2} & \omega_4^{2\times3} \\ 1 & \omega_4^3 & \omega_4^{3\times2} & \omega_4^{3\times3} \end{bmatrix}$ $\qquad \omega_4 = e^{2i\pi/4} = e^{i\pi/2} = i$

$\omega_4^2 = -1,\ \omega_4^3 = -i,\ \omega_4^4 = 1$

Donc $M_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \end{bmatrix}$

$\overline{M_4}M_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -i & -1 & i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & i & -1 & -i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ $\qquad \overline{M_4}M_4 = 4I_4$.

<u>Remarque</u>. Cette égalité donne $(\frac{1}{4}\overline{\Pi}_4)\Pi_4 = I_4$ ce qui prouve que Π_4 est inversible et que $\Pi_4^{-1} = \frac{1}{4}\overline{\Pi}_4$. Généralisons...

b) Observons que $\omega_r^{(x-1)(y-1)}$ est l'élément de Π_r situé à l'intersection de la $x^{\text{ème}}$ ligne et de la $y^{\text{ème}}$ colonne et ceci pour tout $(x,y) \in [\![1,r]\!]^2$.

Soit $(x,y) \in [\![1,r]\!]^2$. Notons a_{xy} l'élément de $\overline{\Pi}_r\Pi_r$ situé à l'intersection de la $x^{\text{ème}}$ ligne et de la $y^{\text{ème}}$ colonne. Notons aussi que : $\overline{\omega_r} = \frac{1}{\omega_r} = \omega_r^{-1}$ car $|\omega_r| = 1$.

$$a_{xy} = \sum_{k=1}^{r} \omega_r^{-(x-1)(k-1)}\omega_r^{(k-1)(y-1)} \underset{k \to k+1}{=} \sum_{k=0}^{r-1} \omega_r^{-(x-1)k}\omega_r^{k(y-1)} = t_r(x-1, y-1)$$

donc $a_{xy} = 0$ si $(y-1)-(x-1)$ n'est pas un multiple de r.

$a_{xy} = r$ si $(y-1)-(x-1)$ est un multiple de r.

$y-1-(x-1) = y-x$. Or $x \in [\![1,r]\!]$ et $y \in [\![1,r]\!]$ donc $x-y \in [\![-(r-1), r-1]\!]$

Par conséquent $y-x$ est un multiple de r si $y-x=0$ (0 est le seul multiple de r dans l'intervalle $[\![-(r-1),r-1]\!]$).

donc $a_{xy} = \begin{cases} 0 \text{ si } x \neq y \\ r \text{ si } x = y \end{cases}$

Par conséquent $\overline{\Pi}_r\Pi_r = r\,I_r$ où I_r est la matrice identité d'ordre r.

$\overline{\Pi}_r\Pi_r = r\,I_r$

donc $(\frac{1}{r}\overline{\Pi}_r)\Pi_r = I_r$. Π_r est donc inversible et $\Pi_r^{-1} = \frac{1}{r}\overline{\Pi}_r$

c) Posons $U = \begin{bmatrix} \lambda_0 \\ \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_{r-1} \end{bmatrix}$ et $V = \Pi_r U$. Supposons que $V = \begin{bmatrix} v_0 \\ v_1 \\ \vdots \\ v_{r-1} \end{bmatrix}$

Soit $n \in [\![0,r-1]\!]$, v_n n'est autre que le produit de la $n+1^{\text{ème}}$ ligne de Π_r avec U.

Par conséquent $v_n = \begin{bmatrix} 1 & \omega_r^n & \omega_r^{2n} \cdots & \omega_r^{n(r-1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_0 \\ \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_{r-1} \end{bmatrix}$

donc $v_n = \lambda_0 + \lambda_1\omega_r^n + \lambda_2\omega_r^{2n} + \lambda_3\omega_r^{3n} + \cdots + \lambda_{r-1}\omega_r^{(r-1)n} = 0$ par hypothèse

donc $V = 0$, ce qui signifie que $\Pi_r U = 0$. L'inversibilité de Π_r donne alors $U = 0$

$U=0$ signifie alors que : $\lambda_0=\lambda_1=\lambda_2=\dots=\lambda_{r-1}=0$. C'est ce qu'il fallait montrer.

d) Montrons donc que la famille $(e_0,e_1,\dots,e_{r-1})$ est libre.

Soit $(\lambda_0,\lambda_1,\dots,\lambda_{r-1})\in\mathbb{C}^r$ tel que $\lambda_0 e_0+\lambda_1 e_1+\dots+\lambda_{r-1}e_{r-1}=0$.

Alors $\forall n\in\mathbb{N}$, $\lambda_0 \rho^n+\lambda_1\rho^n\omega_r^n+\dots+\lambda_{r-1}\rho^n\omega_r^{(r-1)n}=0$.

Donc $\forall n\in\mathbb{N}$, $\lambda_0+\lambda_1\omega_r^n+\lambda_2\omega_r^{2n}+\dots+\lambda_{r-1}\omega_r^{(r-1)n}=0$ car $\rho\in\,]0,1[$.

En particulier $\forall n\in[\![0,r-1]\!]$, $\lambda_0+\lambda_1\omega_r^n+\lambda_2\omega_r^{2n}+\dots+\lambda_{r-1}\omega_r^{(r-1)n}=0$. Ce qui précède montre alors que : $\lambda_0=\lambda_1=\dots=\lambda_{r-1}=0$ et achève de prouver que les suites $e_0,e_1,\dots,e_{r-1}$ sont linéairement indépendantes.

La famille $(e_0,e_1,\dots,e_{r-1})$ est libre dans S.

pour tout $n\in[\![r-1,+\infty[\![$

(Q3) a) Prouvons que l'ensemble E des suites de S vérifiant (2) est un sous-espace de S.

- $E\neq\emptyset$ car la suite nulle de S vérifie (2) pour tout $n\in[\![r-1,+\infty[\![$.
- Soient $(\alpha,\beta)\in\mathbb{C}^2$, $\hat{v}=(\hat{v}_n)$ et $\hat{\omega}=(\hat{\omega}_n)$ deux éléments de E.

Prouvons que $\alpha\hat{v}+\beta\hat{\omega}=(\alpha\hat{v}_n+\beta\hat{\omega}_n)$ appartient à E c'est à dire vérifie (2) pour tout $n\in[\![r-1,+\infty[\![$. Soit n un élément de $[\![r-1,+\infty[\![$

$(\alpha\hat{v}_n+\beta\hat{\omega}_n)+\rho(\alpha\hat{v}_{n-1}+\beta\hat{\omega}_{n-1})+\rho^2(\alpha\hat{v}_{n-2}+\beta\hat{\omega}_{n-2})+\dots+\rho^{r-1}(\alpha\hat{v}_{n-r+1}+\beta\hat{\omega}_{n-r+1})=\alpha(\hat{v}_n+\rho\hat{v}_{n-1}+\rho^2\hat{v}_{n-2}+\dots+\rho^{r-1}\hat{v}_{n-r+1})+$
$\beta(\hat{\omega}_n+\rho\hat{\omega}_{n-1}+\rho^2\hat{\omega}_{n-2}+\dots+\rho^{r-1}\hat{\omega}_{n-r+1})=\alpha\, 0+\beta\, 0=0$, donc $\alpha\hat{v}+\beta\hat{\omega}\in E$

$\hat{v}$ et $\hat{\omega}$ vérifiant (2)

Ceci achève de prouver que E est un sous-espace vectoriel de S.

b) C'est très classique et à retenir.

La morale de l'histoire repose sur le fait qu'un élément $v=(v_n)$ de E est entièrement déterminé par ses $r-1$ premiers termes : $v_0,v_1,\dots,v_{r-2}$. L'isomorphisme entre E et $\mathbb{C}^{r-1}$ apparaît alors de manière claire et donnera à E la dimension de $\mathbb{C}^{r-1}$ soit : $r-1$.

→ Linéarité de

Soient $\lambda\in\mathbb{C}$, $v=(v_n)$ et $\omega=(\omega_n)$ deux éléments de E.

$F(\lambda v+\omega)=F((\lambda v_n+\omega_n))=(\lambda v_0+\omega_0,\lambda v_1+\omega_1,\dots,\lambda v_{r-2}+\omega_{r-2})=\lambda(v_0,v_1,\dots,v_{r-2})+(\omega_0,\omega_1,\dots,\omega_{r-2})$.

$F(\lambda v+\omega)=\lambda F(v)+F(\omega)$; c'est ce qu'il fallait montrer.

F est une application linéaire de E dans $\mathbb{C}^{r-1}$.

- Injectivité de F.

Soit $v=(v_n)\in \operatorname{Ker} F$. $F(v)=0_{\mathbb{C}^{r-1}}$ donc $(v_0,v_1,\dots,v_{r-2})=0_{\mathbb{C}^{r-1}}$; $v_0=v_1=\dots=v_{r-2}=0$

Montrons à l'aide d'une récurrence d'ordre $r-1$ que : $\forall n\in\mathbb{N},\ v_n=0$.

. Il semble que cela soit vrai pour $n=0, n=1,\dots,n=r-2$.

. Supposons alors la propriété vraie pour $n, n+1,\dots,n+r-2$ et montrons la alors pour $n+r-1$. $(n\in\mathbb{N})$.

$v_{n+r-1}+p\,v_{n+r-2}+p^2v_{n+r-3}+\dots+p^{r-1}v_n=0$ (relation (2) pour $n+r-1$) ; or l'hypothèse de récurrence donne : $v_n=v_{n+1}=v_{n+2}=\dots=v_{n+r-2}=0$; donc $v_{n+r-1}=0$.

Ceci achève la récurrence, $\forall n\in\mathbb{N}, v_n=0$; $v=(v_n)=0_S$. $\operatorname{Ker}F=\{0_E\}$. F est injective.

- Surjectivité de F

Soit $(a_0,a_1,\dots,a_{r-2})\in\mathbb{C}^{r-1}$. Montrons qu'il existe un élément v de E tel que : $F(v)=(a_0,\dots,a_{r-2})$

Considérons la suite $v=(v_n)$ définie par la récurrence d'ordre $r-1$ suivante.

$$(D)\begin{cases} v_0=a_0, v_1=a_1,\dots,v_{r-2}=a_{r-2}\\ \text{et } \forall n\in[\![r-1,+\infty[\![,\ v_n=-p\,v_{n-1}-p^2v_{n-2}-\dots-p^{r-1}v_{n-r+1}\end{cases}$$

Cette suite v est entièrement définie car on se donne ses $r-1$ premiers termes et le moyen d'obtenir un terme à partir des $r-1$ précédents. De plus la deuxième ligne de (D) montre que cette suite vérifie (2) pour tout $n\in[\![r-1,+\infty[\![$, donc qu'elle appartient à E. La première ligne de (D) prouve alors que : $F(v)=(a_0,a_1,\dots,a_{r-2})$

Nous avons donc montré que tout élément de $\mathbb{C}^{r-1}$ possède un antécédent dans E par F.

<u>F est surjective.</u>

Pour finir <u>F est linéaire et bijective de E sur $\mathbb{C}^{r-1}$</u>, c'est donc un isomorphisme de E sur $\mathbb{C}^{r-1}$. E et $\mathbb{C}^{r-1}$ étant isomorphes, ils ont même dimension.

Or $\dim_{\mathbb{C}}\mathbb{C}^{r-1}=r-1$ donc <u>$\dim_{\mathbb{C}} E=r-1$.</u>

<u>c)</u> Gagnons du temps et commençons par la fin !

Soit $v=(v_n)$ une suite géométrique d'éléments de $\mathbb{C}$ et de premier terme 1

Notons z sa raison.

1° cas : $z=0$. Alors $v_0=1$, et $\forall n\in\mathbb{N}^*\ v_n=0$; v ne peut vérifier (e) pour $n=r-1$ par exemple ($v_{r-1}+pv_{r-2}+p^2v_{r-3}+\dots+p^{r-1}v_0=p^{r-1}\neq 0$)

donc $v\notin E$.

2ème cas : $z\neq 0$. Alors $\forall n\in\mathbb{N}$, $v_n=z^n$

$v\in E \Leftrightarrow \forall n\in [\![r-1,+\infty[\![$, $0=v_n+pv_{n-1}+p^2v_{n-2}+\dots+p^{r-1}v_{n-r+1}=z^n+pz^{n-1}+p^2z^{n-2}+\dots+p^{r-1}z^{n-r+1}$

$v\in E \Leftrightarrow \forall n\in [\![r-1,+\infty[\![$, $0=z^n\left[1+\left(\frac{p}{z}\right)+\left(\frac{p}{z}\right)^2+\dots+\left(\frac{p}{z}\right)^{r-1}\right]$

$v\in E \Leftrightarrow 1+\frac{p}{z}+\left(\frac{p}{z}\right)^2+\dots+\left(\frac{p}{z}\right)^{r-1}=0 \Leftrightarrow \begin{cases}\frac{p}{z}=1 \text{ et } r=0\ !! \\ \text{ou} \\ \frac{p}{z}\neq 1 \text{ et } \dfrac{1-\left(\frac{p}{z}\right)^r}{1-\frac{p}{z}}=0\end{cases}$

$v\in E \Leftrightarrow \begin{cases}\left(\frac{p}{z}\right)\neq 1 \text{ et} \\ \left(\frac{p}{z}\right)^r=1\end{cases}$

$v\in E \underset{\text{OK!}}{\Leftrightarrow} \frac{z}{p}\neq 1$ et $\left(\frac{z}{p}\right)^r=1 \underset{\text{réi Q1a}}{\Leftrightarrow} \exists k\in [\![1,r-1]\!]$, $\frac{z}{p}=\omega_r^k \Leftrightarrow \exists k\in[\![1,r-1]\!]$, $z=p\,\omega_r^k$

$v\in E \Leftrightarrow \exists k\in[\![1,r-1]\!]$, $z=p\,\omega_r^k \Leftrightarrow \exists k\in[\![1,r-1]\!]$, $\forall n\in\mathbb{N}$, $v_n=p^n\omega_r^{kn}$.

Notons que pour tout $k\in[\![1,r-1]\!]$, $e_k=(p^n\omega_r^{kn})$ est la suite géométrique de premier terme 1 et de raison : ω_r^k.

Par conséquent $v\in E \Leftrightarrow v=e_1$ ou $v=e_2$ ou ... ou $v=e_{r-1}$

ceci a le bon goût de prouver que

1° : $e_1\in E, e_2\in E, \dots, e_{r-1}\in E$

2° : $e_1,e_2,\dots,e_{r-1}$ sont les seules suites géométriques de premier terme égal à 1 dans E

d) $(e_1,e_2,\dots,e_{r-1})$ est une famille libre(*) (Q2d)) de $r-1$ éléments de E (Q3c)) et E est de dimension $r-1$. Par conséquent $(e_1,e_2,\dots,e_{r-1})$ est une base de E.

(*) sous-famille d'une famille libre.

Soit $v=(v_n)\in S$.

v vérifie (e) pour tout $n\in[\![r-1,+\infty[\![$

$\Updownarrow$

$v\in E$

$\Updownarrow$

$\exists(\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_{r-1})\in\mathbb{C}^{r-1}$, $v=\lambda_1e_1+\lambda_2e_2+\dots+\lambda_{r-1}e_{r-1}$

$\Updownarrow$

$\exists(\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_{r-1})\in\mathbb{C}^{r-1}$, $\forall n\in\mathbb{N}$, $v_n=\lambda_1p^n\omega_r^n+\lambda_2p^n\omega_r^{2n}+\dots+\lambda_{r-1}p^n\omega_r^{(r-1)n}$.

Soit $k \in [\![1, r-1]\!]$. $\forall n \in \mathbb{N}$, $|p^n \omega_r^{kn}| = p^n < 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} (p^n \omega_r^{kn}) = 0$.

ceci montre que pour tout $k \in [\![1, r-1]\!]$, la suite e_k converge vers 0.

Toute suite de E étant combinaison linéaire de $e_1, e_2, \dots, e_{r-1}$: <u>toute suite de E converge vers 0</u>.

(Q4) a) Soit $c = (c_n)$ une suite constante. Soit λ l'élément de $\mathbb{C}$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N}, c_n = \lambda$.

c vérifie (1) pour tout $n \in [\![r-1, +\infty[\![$

$\Updownarrow$

$\forall n \in \mathbb{N}$, $\lambda + p\lambda + p^2\lambda + \dots + p^{r-1}\lambda = p^r$

$\Updownarrow$

$$\lambda = \frac{p^r}{1 + p + \dots + p^{r-1}} = \frac{p^r}{\frac{1-p^r}{1-p}} = \frac{p^r(1-p)}{1-p^r}$$

L'unique suite constante vérifiant (1) est : $c = \left(\frac{p^r(1-p)}{1-p^r}\right) = (c_n)$.

b) <u>u vérifie (1)</u> pour tout $n \in [\![r-1, +\infty[\![$

$\Updownarrow$

$\forall n \in [\![r-1, +\infty[\![$, $u_n + p u_{n-1} + p^2 u_{n-2} + \dots + p^{r-1} u_{n-r+1} = p^r$

$\Updownarrow$

$\forall n \in [\![r-1, +\infty[\![$, $u_n + p u_{n-1} + p^2 u_{n-2} + \dots + p^{r-1} u_{n-r+1} = c_n + p c_{n-1} + p^2 c_{n-2} + \dots + p^{r-1} c_{n-r+1}$

$\Updownarrow$

$\forall n \in [\![r-1, +\infty[\![$, $(u_n - c_n) + p(u_{n-1} - c_{n-1}) + p^2(u_{n-2} - c_{n-2}) + \dots + p^{r-1}(u_{n-r+1} - c_{n-r+1}) = 0$.

$\Updownarrow$

<u>$v = u - c$ vérifie (2)</u> pour tout $n \in [\![r-1, +\infty[\![$.

c) Soit u une suite de S vérifiant (1). $v = u - c$ vérifie (2) donc converge vers 0.

$u = v + c$, v converge vers 0 et c vers "sa valeur constante" $\frac{p^r(1-p)}{1-p^r}$

Donc <u>u converge vers $\frac{p^r(1-p)}{1-p^r}$</u>.

PARTIE II

(Q1) a) $S_1, S_2, \ldots, S_r, S_{r+1}, \ldots, S_{2r}, \ldots, S_{rn-(r-1)}, \ldots, S_{rn}$ étant indépendants les événements $E_1, E_2, \ldots, E_n$ le sont aussi et ceci pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
Par conséquent les événements $\overline{E}_1, \overline{E}_2, \ldots, \overline{E}_n$ sont également indépendants pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ p\left(\bigcap_{k=1}^{n} \overline{E}_k\right) = \prod_{k=1}^{n} p(\overline{E}_k) = \prod_{k=1}^{n} (1 - p(E_k)) = \prod_{k=1}^{n} (1 - p^r) = (1-p^r)^n$$

$$\begin{cases} p(E_k) = p(S_{rk-(r-1)} \cap S_{rk-(r-1)+1} \cap \ldots \cap S_{rk}) \\ p(E_k) = p(S_{rk-(r-1)})\, p(S_{rk-(r-1)+1}) \cdots p(S_{rk}) = p^r. \end{cases}$$

donc $\underline{\underline{p\left(\bigcap_{k=1}^{n} \overline{E}_k\right) = (1-p^r)^n}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

$\left(\bigcap_{k=1}^{n} \overline{E}_k\right)_{n \geq 1}$ est une suite <u>décroissante</u> d'événements. Le théorème de la limite monotone montre

alors que : $\lim_{n \to +\infty} p\left(\bigcap_{k=1}^{n} \overline{E}_k\right) = p\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty}\left(\bigcap_{k=1}^{n} \overline{E}_k\right)\right) = p\left(\bigcap_{k=1}^{+\infty} \overline{E}_k\right)$

donc $p\left(\bigcap_{k=1}^{+\infty} \overline{E}_k\right) = \lim_{n \to +\infty} (1-p^r)^n = 0$ car $1 - p^r \in]0,1[$.

Finalement $\underline{\underline{p\left(\bigcap_{k=1}^{+\infty} \overline{E}_k\right) = 0}}$.

<u>b)</u> Soit V l'événement : on obtient r succès consécutifs.

$\bigcup_{k=1}^{+\infty} E_k \subset V$ donc $p\left(\bigcup_{k=1}^{+\infty} E_k\right) \leq p(V)$.

Or $p\left(\bigcup_{k=1}^{+\infty} E_k\right) = 1 - p\left(\overline{\bigcup_{k=1}^{+\infty} E_k}\right) = 1 - p\left(\bigcap_{k=1}^{+\infty} \overline{E}_k\right) = 1 - 0 = 1$.

donc $1 \leq p(V) \leq 1$! $\quad p(V) = 1$.

L'obtention de r succès consécutifs est un événement réalisé avec une probabilité égale à 1, c'est un événement quasi-certain ... la suite nous montrera qu'il faut être patient pour obtenir r succès consécutifs !

Soit $n \in [\![r, +\infty[\![$

(Q2) a) Si $\overline{S_{n-r}}$ est réalisé on pose $\ell = 0$. (si $n = r$ on pose aussi $\ell = 0$!)

Si S_{n-r} est réalisé on note ℓ la longueur de la dernière séquence de succès au cours des $n-r$ premières expériences.

On note enfin i le reste dans la division de ℓ par r.

Supposons l'événement " $S_{n-(r-1)}$ et ... et S_{n-1} et S_n " réalisé.
Les i derniers succès des n-r premières épreuves et les r-i premiers succès de la liste $S_{n-(r-1)}, S_{n-r+2}, \dots, S_n$ réalisent le seul événement $U_{n-r+(r-i)} = U_{n-i}$ de la liste $U_{n-(r-1)}, U_{n-(r-1)+1}, \dots, U_n$.
Par conséquent $S_{n-(r-1)} \cap \dots \cap S_{n-1} \cap S_n$ est contenu dans la réunion disjointe $U_{n-(r-1)} \cup \dots \cup U_{n-1} \cup U_n$.

donc $p^r = p(S_{n-(r-1)} \cap \dots \cap S_{n-1} \cap S_n) = \sum_{i=0}^{r-1} p(S_{n-(r-1)} \cap \dots \cap S_{n-1} \cap S_n / U_{n-i})\, p(U_{n-i})$

$S_{n-(r-1)} \cap \dots \cap S_{n-1} \cap S_n$ est réalisé, sachant que U_{n-i} est réalisé si et seulement si $S_{n-i+1} \cap S_{n-i+2} \cap \dots \cap S_n$ est réalisé
Par conséquent $p(S_{n-(r-1)} \cap \dots \cap S_{n-1} \cap S_n / U_{n-i}) = p^i$
Donc $p^r = \sum_{i=0}^{r-1} p^i\, p(U_{n-i}) = \sum_{i=0}^{r-1} p^i u_{n-i}$

Par conséquent : $u_n + p u_{n-1} + p^2 u_{n-2} + \dots + p^{r-1} u_{n-r+1} = p^r$ et ceci pour tout $n \in [\![r, +\infty [\![$
Notons encore que : $u_{r-1} + p u_{r-2} + p^2 u_{r-3} + \dots + p^{r-1} u_0 = p^{r-1} \neq p^r$!!
Alors 1.. $(u_n)_{n \geq 0}$ ne vérifie pas (1)
2.. $(u_n)_{n \geq 1}$ pas davantage car (1) concerne des suites $(u_n)_{n \geq 0}$!
On ne retombe pas sur ses pieds qu'en posant $u_0 = p$!
Utilisons alors I Q4 c) pour dire que : $\lim_{n \to +\infty} u_n = \frac{(1-p)p^r}{1-p^r}$.

b) Pour les faces . $p = \frac{1}{2}$ et $r = 2$. $\lim_{n \to +\infty} u_n = \frac{1}{6}$.

Pour les as . $p = \frac{1}{6}$ et $r = 2$. $\lim_{n \to +\infty} u_n = \frac{1}{42}$.

(Q3) a) $\bigcup_{n=1}^{+\infty} (X = n)$ est l'événement : obtenir r succès consécutifs. Par conséquent $p\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} (X=n)\right) = 1$. Par disjonction on obtient $\sum_{n=1}^{+\infty} p(X=n) = 1$.

b) Soit $x \in [0,1[$.

$\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n x^n \leq x^n$ $\quad$ ($u_n = p(U_n) \in [0,1]$ pour $n \geq r$ et $u_0 = 1$, $u_1 = u_2 = \dots = u_{r-1} = 0$)

La série de terme général x^n étant convergente ($|x|<1$!) il en est de même pour la série de terme général $u_n x^n$ (règles de comparaison des séries à termes positifs).

Pour tout $x \in [0,1[$, $U(x)$ existe.

$\forall n \in [\![r, +\infty[\![$, $\quad u_n + p\, u_{n-1} + p^2 u_{n-2} + \dots + p^{r-1} u_{n-r+1} = p^r$

Soit $x \in [0,1[$. $\forall n \in [\![r,+\infty[\![$, $u_n x^n + (px)(u_{n-1} x^{n-1}) + \dots + (px)^{r-1} u_{n-r+1} x^{n-r+1} = p^r x^n$

En sommant il vient :

$$\sum_{n=r}^{+\infty} u_n x^n + (px) \sum_{n=r}^{+\infty} u_{n-1} x^{n-1} + \dots + (px)^{r-1} \sum_{n=r}^{+\infty} u_{n-r+1} x^{n-r+1} = p^r \sum_{n=r}^{+\infty} x^n$$ (toutes les séries convergent)

$$\sum_{n=r}^{+\infty} u_n x^n + px \sum_{n=r-1}^{+\infty} u_n x^n + \dots + (px)^{r-1} \sum_{n=1}^{+\infty} u_n x^n = p^r x^r \frac{1}{1-x}.$$

Or $u_0 = 1$ et $u_1 = u_2 = \dots = u_{r-1} = 0$. Par conséquent :

$$\sum_{n=r}^{+\infty} u_n x^n = \sum_{n=r-1}^{+\infty} u_n x^n = \dots = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n x^n = U(x) - u_0 = U(x) - 1.$$

Donc $\quad (U(x)-1)(1 + px + \dots + (px)^{r-1}) = \dfrac{p^r x^r}{1-x}$; $(U(x)-1)\, \dfrac{1-(px)^r}{1-px} = \dfrac{p^r x^r}{1-x}$.

$$\boxed{U(x) = 1 + \frac{(px)^r}{1-(px)^r} \times \frac{1-px}{1-x}.}$$

c) Soit $n \in [\![r, +\infty[\![$. Si U_n est réalisé on a obtenu une suite de r succès consécutifs s'achevant à la $n^{\text{ième}}$ expérience, par conséquent une première suite de r succès consécutifs s'est achevée à l'une des n premières expériences.

Donc $\quad U_n \subset \bigcup_{k=0}^{n} \{X = k\}$.

$$u_n = p(U_n) = \sum_{k=0}^{n} p(X = k \cap U_n) = \sum_{k=0}^{n} p(U_n / X = k)\, p(X = k)$$

U_n sachant que $\{X = k\}$ est réalisé si les $n-k$ dernières expériences donnent une suite de r succès consécutifs qui s'achève à la dernière expérience ... de ces $n-k$ (dernières) expériences. Donc $p(U_n / X = k) = u_{n-k}$. Finalement $u_n = \sum_{k=0}^{n} p(X=k)\, u_{n-k}$

d) Série produit de Cauchy.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\sum_{k=0}^{n} c_k = \sum_{k=0}^{n} \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i} = \sum_{i=0}^{n} \sum_{k=i}^{n} a_i b_{k-i} \overset{j=k-i\ ;\ k=j+i}{=} \sum_{i=0}^{n}\left(a_i \left(\sum_{j=0}^{n-i} b_j\right)\right)$$

$\forall i \in [\![0,n]\!]$, $\displaystyle\sum_{j=0}^{n-i} b_j \leq \sum_{j=0}^{n} b_j$ $(\forall j \in \mathbb{N}, b_j \geq 0)$.

$\forall i \in [\![0,n]\!]$, $\displaystyle a_i \sum_{j=0}^{n-i} b_j \leq a_i \sum_{j=0}^{n} b_j$ $(\forall k \in \mathbb{N}, a_k \geq 0)$.

donc $\displaystyle\sum_{i=0}^{n}\left(a_i \sum_{j=0}^{n-i} b_j\right) \leq \sum_{i=0}^{n}\left(a_i \sum_{j=0}^{n} b_j\right) = \sum_{i=0}^{n} a_i \sum_{j=0}^{n} b_j$

Finalement $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} c_k \leq \sum_{i=0}^{n} a_i \sum_{j=0}^{n} b_j = \sum_{k=0}^{n} a_k \sum_{k=0}^{n} b_k$.

$$\sum_{k=0}^{2n} c_k = \sum_{k=0}^{2n}\left(\sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}\right) \quad \sum_{i=0}^{2n}\left(\sum_{k=i}^{2n} a_i b_{k-i}\right) \geq \sum_{i=0}^{n}\left(a_i \sum_{k=i}^{2n} b_{k-i}\right) = \sum_{i=0}^{n}\left(a_i \sum_{j=0}^{2n-i} b_j\right)$$

positivité des termes des suites

$\forall i \in [\![0,n]\!]$, $2n-i \geq n$ donc $\forall i \in [\![0,n]\!]$, $\displaystyle\sum_{j=0}^{2n-i} b_j \geq \sum_{j=0}^{n} b_j$. Par conséquent :

$$\sum_{k=0}^{2n} c_k \geq \sum_{i=0}^{n}\left(a_i \sum_{j=0}^{n} b_j\right) = \sum_{i=0}^{n} a_i \sum_{j=0}^{n} b_j = \sum_{k=0}^{n} a_k \sum_{k=0}^{n} b_k$$

Finalement : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} c_k \leq \sum_{k=0}^{n} a_k \sum_{k=0}^{n} b_k \leq \sum_{k=0}^{2n} c_k$.

Posons $\displaystyle A = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ et $\displaystyle B = \sum_{k=0}^{+\infty} b_k$

$\forall n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} c_k \leq \sum_{k=0}^{n} a_k \sum_{k=0}^{n} b_k \leq AB$

ceci assure la convergence de la série de terme général c_n car elle est à termes positifs et ses sommes partielles sont majorées.

Passons alors à la limite dans les inégalités précédentes, il reste :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} c_k \leq AB \leq \sum_{k=0}^{+\infty} c_k . \quad \text{ceci donne :} \quad \sum_{k=0}^{+\infty} c_k = AB = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \sum_{k=0}^{+\infty} b_k .$$

e) Soit $x \in [0,1]$. $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq p(X=n)x^n \leq p(X=n)$.

La série de terme général $p(X=n)$ converge donc par règles de comparaison des séries à termes positifs donnent la convergence de la série de terme général $p(X=n)x^n$.

Soit $x \in [0,1[$.

Les séries de termes généraux $p(X=n)x^n$ et $u_n x^n$ sont à termes positifs et convergentes.

Par conséquent :

$$G(x)U(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}p(X=n)x^n\sum_{n=0}^{+\infty}u_nx^n=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}p(X=k)x^k u_{n-k}x^{n-k}\right)$$

$$G(x)U(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}p(X=k)u_{n-k}\right)x^n=p(X=0)u_0x^0+\sum_{n=1}^{+\infty}\underbrace{\left(\sum_{k=0}^{n}p(X=k)u_{n-k}\right)}_{u_n \text{ car } n\geq 1}x^n$$

$$G(x)U(x)=0+\sum_{n=1}^{+\infty}u_nx^n=\sum_{n=0}^{+\infty}u_nx^n-1$$

donc $\forall x\in[0,1[,\quad G(x)U(x)=U(x)-1.$

f) $\forall x\in[0,1[,\ G(x)=\dfrac{U(x)-1}{U(x)}=\dfrac{\dfrac{(px)^r}{1-(px)^r}\times\dfrac{1-px}{1-x}}{1+\dfrac{(px)^r}{1-(px)^r}\times\dfrac{1-px}{1-x}}=\dfrac{(px)^r(1-px)}{(1-(px)^r)(1-x)+(px)^r(1-px)}$

$$\forall x\in[0,1[,\ G(x)=\frac{(px)^r(1-px)}{(1-(px)^r)(1-x)+(px)^r(1-px)}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{(px)^r(1-px)}{(1-(px)^r)(1-x)+(px)^r(1-px)}=\frac{p^r(1-p)}{p^r(1-p)}=1=\sum_{n=0}^{+\infty}p(X=n)=G(1)$$

Par conséquent : G est continue en 1. Notons que : $\forall x\in[0,1],\ G(x)=\dfrac{(px)^r(1-px)}{(1-(px)^r)(1-x)+\cdots(px)^r(1-px)}$

Q4 a) $E(X)=\sum_{n=0}^{+\infty}n\,p(X=n)=\sum_{n=1}^{+\infty}n\,p(X=n)=G'(1)$

$\forall x\in[0,1],\ G'(x)=\dfrac{p^r[rx^{r-1}(1-px)+x^r(-p)][(1-(px)^r)(1-x)+(px)^r(1-px)]-(px)^r(1-px)\times D'(x)}{[(1-(px)^r)(1-x)+(px)^r(1-px)]^2}$

avec $D(x)=(1-(px)^r)(1-x)+(px)^r(1-px)$ pour tout $x\in[0,1]$

Donc $\forall x\in[0,1],\ D'(x)=-p^r rx^{r-1}(1-x)-(1-(px)^r)+p^r rx^{r-1}(1-px)+(px)^r(-p)$

$D(1)=p^r(1-p)$ et $D'(1)=-1+p^r+rp^r(1-p)-p^{r+1}=-1+p^r(r+1)(1-p)$

$$G'(1)=\frac{1}{(p^r(1-p))^2}\left[p^r(r(1-p)-p)(p^r)(1-p)-p^r(1-p)(-1+p^r(r+1)(1-p))\right]$$

$$G'(1)=\frac{1}{p^r(1-p)}\left[rp^r(1-p)-p^{r+1}+1-p^r(r+1)(1-p)\right]=\frac{1-p^r}{(1-p)p^r}.\quad E(X)=\frac{1-p^r}{(1-p)p^r}.$$

$p = \frac{1}{2}$	$r = 5$	$E(X) = 62$ s	1' 2"
	$r = 10$	$E(X) = 2046$ s	34' 6"
	$r = 25$	$E(X) = 67\ 108\ 862$ s	776 j 17 h 21' 2"
$p = \frac{1}{6}$	$r = 5$	$E(X) = 9330$ s	2 h 35' 30"
		$E(X) = 72\ 559\ 410$ s	839 j 19 h 23' 30"
		$E(X) \simeq 3,4 \times 10^{19}$ s	$\simeq$ 1 081 822 millions d'années
			$\simeq$ 1082 milliards d'années.