PARTIE I

Dans cette partie nous utiliserons des " notations polynomiales"

Nous écrirons donc $\varphi = P + \frac{1}{n}(1-X)P'$, $P_k = X^{n-k}$, ...

Q1.. Etude de l'application F.

a) Soit $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$. $P' \in \mathbb{R}_{n-2}[X]$ donc $\frac{1}{n}(1-X)P' \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$; par conséquent $F(P) = P + \frac{1}{n}(1-X)P'$ est un élément de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.

F est donc une application de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ dans lui-même.

$\forall (P,R) \in \mathbb{R}^2_{n-1}[X], \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad F(\lambda P+R) = \lambda P + R + \frac{1}{n}(1-X)(\lambda P+R)' = \lambda P + R + \frac{1}{n}(1-X)(\lambda P'+R')$.

$\forall (P,R) \in \mathbb{R}^2_{n-1}[X], \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad F(\lambda P+R) = \lambda\left[P + \frac{1}{n}(1-X)P'\right] + \left[R + \frac{1}{n}(1-X)R'\right] = \lambda F(P) + F(R)$.

Cl.. F est un endomorphisme de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.

b) Soit $k \in [\![1,n]\!]$. $P_k \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ et $F(P_k) = P_k + \frac{1}{n}(1-X)P_k' = X^{n-k} + \frac{1}{n}(1-X)(n-k)X^{n-k-1}$

$$F(P_k) = X^{n-k} + \left(1-\frac{k}{n}\right)\left(X^{n-k-1} - X^{n-k}\right) \quad \Big\} \text{ à un abus près}$$

$$F(P_k) = \frac{k}{n}X^{n-k} + \left(1-\frac{k}{n}\right)X^{n-k-1}$$

Mieux. $\forall k \in [\![1,n-1]\!], \quad F(P_k) = \frac{k}{n}P_k + \left(1-\frac{k}{n}\right)P_{k+1}$ } sans abus !

$F(P_n) = P_n$

c) $$M = M_B(F) = \begin{bmatrix} \frac{1}{n} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \frac{n-1}{n} & \frac{2}{n} & \ddots & & \vdots \\ 0 & \frac{n-2}{n} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{n} & 1 \end{bmatrix}$$

Q2.. Etude des éléments propres de F.

a) Les valeurs propres de F sont les valeurs propres de M. Or M est une matrice triangulaire inférieure, ses valeurs propres sont donc les éléments de sa diagonale.

Par conséquent les valeurs propres de M et de F sont : $\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, 1$.

F est un endomorphisme de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ ayant n valeurs propres distinctes et $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ est de dimension n ; par conséquent F est diagonalisable.

Remarque.. F a n sous-espaces propres et ces sous-espaces sont nécessairement de dimension 1

b) Soit $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$.

$F(P) = P \iff P + \frac{1}{n}(1-X)P' = P \iff \frac{1}{n}(1-X)P' = 0 \iff P' = 0 \iff P \in \mathbb{R}_0[X]$.

Le sous-espace propre de F associé à la valeur propre 1 est $\mathrm{Vect}(1) = \mathbb{R}_0[X]$.

c) $k \in \mathbb{N}$ et $1 \leq k < n$. $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, $P \neq 0$ et $F(P) = \frac{n-k}{n} P$.

On a $P + \frac{1}{n}(1-X)P' = \frac{n-k}{n} P$ donc $P(1) + 0 = \frac{n-k}{n} P(1)$ ou $-\frac{k}{n}P(1) = 0$, par conséquent $\underline{\underline{P(1) = 0}}$.

Soit r l'ordre de multiplicité de 1 dans P et soit R le quotient de P par $(X-1)^r$.

On a : $1 \leq r < n$, $P = (X-1)^r R$ et $R(1) \neq 0$.

$\frac{n-k}{n}(X-1)^r R = \frac{n-k}{n} P = F(P) = P + \frac{1}{n}(1-X)P' = (X-1)^r R + \frac{1}{n}(1-X)\left[r(X-1)^{r-1}R + (X-1)^r R'\right]$.

Donc $\frac{n-k}{n}(X-1)^r R = (X-1)^r \left[R - \frac{r}{n} R + \frac{1}{n}(1-X)R'\right]$. En divisant par $(X-1)^r$ il vient :

(*) $\frac{n-k}{n} R = \frac{n-r}{n} R + \frac{1}{n}(1-X)R'$. En prenant la valeur en 1 on obtient :

$\frac{n-k}{n} R(1) = \left(\frac{n-r}{n}\right) R(1) + 0$, soit : $\frac{n-k}{n} = \frac{n-r}{n}$ car $R(1) \neq 0$. Ceci

donne alors : $r = k$

La relation (*) s'écrit alors : $\frac{n-r}{n} R = \frac{n-r}{n} R + \frac{1}{n}(1-X)R'$; elle donne : $\frac{1}{n}(1-X)R' = 0$

donc $R' = 0$ et en conséquence R est constant.

$\exists \lambda \in \mathbb{R}^{(*)}$, $P = \lambda (X-1)^k$.

Ceci prouve que si P est un vecteur propre de F associé à la valeur propre $\frac{n-k}{n}$ alors $P \in \mathrm{Vect}((X-1)^k)$

d) Reprenons $k \in \mathbb{N}$ et $1 \leq k < n$. Notons H_{n-k} le sous-espace propre de F associé à la valeur propre $(n-k)/n$.

$\dim H_{n-k} \geq 1$ et $H_{n-k} \subset \mathrm{Vect}((X-1)^k)$ donc $H_{n-k} = \mathrm{Vect}((X-1)^k)$ car $\dim \mathrm{Vect}((X-1)^k) = 1$

Notons que ce résultat reste encore pour $k = 0$ car le sous-espace propre de F associé à la valeur propre $1 = \frac{n-0}{n}$ est $\mathrm{Vect}(1) = \mathrm{Vect}((X-1)^0)$.

Donc pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$ le sous-espace propre de F associé à la valeur propre $\frac{n-k}{n}$ est $\mathrm{Vect}((X-1)^k)$. Ceci s'écrit encore :

pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, le sous-espace propre associé à la valeur propre $\frac{k}{n}$ est $\mathrm{Vect}\,((X-1)^{n-\ell})$.

Q3.. Etude d'une suite $U_{j+1} = F(U_j)$.

a) $\forall t \in \mathbb{R}$, $U_1(t) = t^{n-1} = (t-1+1)^{n-1} = \sum_{\ell=0}^{n-1} C_{n-1}^{\ell}(t-1)^{\ell}$. $U_1 = \sum_{\ell=0}^{n-1} C_{n-1}^{\ell} X^{\ell}$

b) Soit $j \in \mathbb{N}^*$ $U_j = F^{j-1}(U_1)$ donc $U_j = F^{j-1}\left(\sum_{\ell=0}^{n-1} C_{n-1}^{\ell}(X-1)^{\ell}\right)$. Par linéarité :

$$U_j = \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^{\ell} \; F^{j-1}((X-1)^{\ell})$$

Or $F((X-1)^{\ell}) = \frac{n-\ell}{n}(X-1)^{\ell}$. Une récurrence simple donne : $\forall i \in \mathbb{N}^{(*)}$, $F^{i}((X-1)^{\ell}) = \left(\frac{n-\ell}{n}\right)^{i}(X-1)^{\ell}$

Par conséquent : $U_j = \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^{\ell}\left(\frac{n-k}{n}\right)^{j-1}(X-1)^{k}$.

Ou : $\forall t \in \mathbb{R}$, $U_j(t) = \sum_{\ell=0}^{n-1} C_{n-1}^{\ell}\left(\frac{n-k}{n}\right)^{j-1}(t-1)^{\ell}$... ce qui contient également U_2 et U_3...

En particulier : $U_j(0) = \sum_{\ell=0}^{n-1} C_{n-1}^{\ell}\left(\frac{n-\ell}{n}\right)^{j-1}(-1)^{\ell}$.

PARTIE II

Q1.. Etude de la loi des variables aléatoires X_j.

a) $k \in [\![1,n]\!]$. $p(X_{j+1}=k \mid X_j=k) = \frac{k}{n}$ (le $j+1$ ième consommateur commande chez un des k fournisseurs ayant reçu au moins une commande d'un des j premiers clients)

$p(X_{j+1}=k \mid X_j=k-1) = \frac{n-k+1}{n}$ (le $j+1$ ième consommateur commande chez un des $n-k+1$ fournisseurs n'ayant pas encore eu de commande).

Clairement $p(X_{j+1}=k \mid X_j=i) = 0$ si $i \in [\![1,n]\!] - \{k, k-1\}$.

b) Soit $k \in [\![1,n]\!]$. $p(X_{j+1}=k) = \sum_{i=1}^{n} p(X_{j+1}=k \mid X_j=i)\, p(X_j=i)$. Ce qui précède donne alors

1er cas.. $k=1$. $p(X_{j+1}=k) = p(X_{j+1}=k \mid X_j=k)\, p(X_j=k) = \frac{k}{n}\, p(X_j=k)$

2e cas.. $k \geq 2$ $p(X_{j+1}=k) = p(X_{j+1}=k \mid X_j=k-1)\, p(X_j=k-1) + p(X_{j+1}=k \mid X_j=k)\, p(X_j=k)$.

ou : $p(X_{j+1}=k)=\frac{n-k+1}{n}p(X_j=k-1)+\frac{k}{n}p(X_j=k)$. Notons que cette formule vaut encore pour $k=1$ car $p(X_j=0)=0$. Finalement :

$\forall k\in[\![1,n]\!],\ p(X_{j+1}=k)=\frac{n-k+1}{n}p(X_j=k-1)+\frac{k}{n}p(X_j=k)$.

Q2.. Etude de la suite (G_j)

a) $\forall k\in[\![1,n]\!],\ p(X_1=k)=\begin{cases}1 \text{ si } k=1\\ 0 \text{ si } k\neq 0\end{cases}$. $G_1=\sum_{k=1}^{n}p(X_1=k)X^{n-k}=X^{n-1}$.

$$G_{j+1}=\sum_{k=1}^{n}p(X_{j+1}=k)X^{n-k}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{n-k+1}{n}p(X_j=k-1)+\frac{k}{n}p(X_j=k)\right)X^{n-k};$$

$$G_{j+1}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(n-(k-1))p(X_j=k-1)X^{n-k}+\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}k\,p(X_j=k)\,X^{n-k};$$

$\downarrow k\to k+1$

$$G_{j+1}=\frac{1}{n}\sum_{k=0 \text{ ou } 1}^{n-1 \text{ ou } n}(n-k)p(X_j=k)X^{n-1-k}+\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}k\,p(X_j=k)\,X^{n-k};$$

$$G_{j+1}=\frac{1}{n}G'_j+\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(n-(n-k))p(X_j=k)X^{n-k}=\frac{1}{n}G'_j+G_j-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(n-k)p(X_j=k)X^{n-k};$$

$$G_{j+1}=\frac{1}{n}G'_j+G_j-\frac{1}{n}X\sum_{k=1}^{n}(n-k)p(X_j=k)X^{n-k-1}=\frac{1}{n}G'_j+G_j-\frac{1}{n}XG'_j=\dots=F(G_j);$$

donc $G_{j+1}=F(G_j)$.

Montrons alors par récurrence que : $\forall j\in\mathbb{N}^*,\ G_j=U_j$.

- $G_1=X^{n-1}=U_1$.
- Supposons la propriété vraie pour $j\in\mathbb{N}^*$ et montrons la pour $j+1$.

  $G_{j+1}=F(G_j)\underset{\text{H.R.}}{=}F(U_j)=U_{j+1}$. Ceci achève la récurrence.

$\forall j\in\mathbb{N}^*,\ G_j=U_j$.

b) $p(X_j=n)$ est le coefficient constant de G_j donc :

$p(X_j=n)=G_j(0)=U_j(0)$. D'après I Q3 b :

$$p(X_j=n)=\sum_{k=0}^{n-1}C_{n-1}^{k}\left(\frac{n-k}{n}\right)^{j-1}(-1)^{k}.$$

Si $j \in [\![1, n[\![$, nécessairement $p(X_j = n) = 0$.

Donc si $1 \leq j < n$: $\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k C_{n-1}^k \left(1 - \frac{k}{n}\right)^{j-1} = 0$.

c) $p(X_j = n) = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k C_{n-1}^k \left(1 - \frac{k}{n}\right)^{j-1}$

$\left|1 - \frac{k}{n}\right| < 1$ dès que $k \in [\![1, n-1]\!]$, donc $\lim_{j \to +\infty} \left(1 - \frac{k}{n}\right)^{j-1} = 0$ pour $k \in [\![1, n-1]\!]$.

Finalement $\lim_{j \to +\infty} p(X_j = n) = (-1)^0 C_{n-1}^0 \left(1 - \frac{0}{n}\right)^{j-1}$; $\lim_{j \to +\infty} p(X_j = n) = 1$ (quelle surprise !).

Notons encore que, si $k \in [\![1, n-1]\!]$:
$0 \leq p(X_j = k) = 1 - \sum_{\substack{\ell=1 \\ \ell \neq k}}^{n} p(X_j = \ell) = 1 - p(X_j = n) - \sum_{\substack{\ell=1 \\ \ell \neq k}}^{n-1} p(X_j = \ell) \leq 1 - p(X_j = n)$.

Il vient alors par encadrement : $\lim_{j \to +\infty} p(X_j = k) = 0$ pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$.

On a alors : $\lim_{j \to +\infty} E(X_j) = \lim_{j \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} k\, p(X_j = k) = n$ car $\lim_{j \to +\infty} (k\, p(X_j = k)) = \begin{cases} k \times 0 \text{ si } k \in [\![1, n-1]\!] \\ n \times 1 \text{ si } k = n \end{cases}$

De même $\lim_{j \to +\infty} E(X_j^2) = \lim_{j \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} k^2 p(X_j = k) = n^2$; $\lim_{j \to +\infty} V(X_j) = \lim_{j \to +\infty} [E(X_j^2) - (E(X_j))^2] = n^2 - n^2$

Finalement : $\lim_{j \to +\infty} E(X_j) = n$ et $\lim_{j \to +\infty} V(X_j) = 0$

Remarque.. ceci permet d'affirmer que $(X_j)_{j \geq 1}$ converge en probabilité vers la variable certaine n.

Q3.. Calcul de l'espérance de X_j.

a) $G_j(1) = \sum_{k=1}^{n} p(X_j = k) = 1$ ($X_j(\Omega) \subset [\![1, n]\!]$).

$G'_j(1) = \sum_{k=1}^{n} (n-k)\, p(X_j = k) = n \sum_{k=1}^{n} p(X_j = k) - \sum_{k=1}^{n} k\, p(X_j = k) = n - E(X_j)$

$G'_j(1) = n - E(X_j)$.

b) $G_{j+1} = G_j + \frac{1}{n}(1-X)\,G'_j \qquad (G_{j+1} = F(G_j))$.

$G'_{j+1} = G'_j - \frac{1}{n} G'_j + \frac{1}{n}(X-1)\,G''_j$;

$G'_{j+1}(1) = (1-\frac{1}{n})\,G'_j(1)$

$(G'_j(1))_{j\geq 1}$ est donc une suite géométrique de raison $(1-\frac{1}{n})$ et de premier

terme $G'_1(1) = U'_1(1) = n-1 \qquad (U_1 = X^{n-1}\ ;\ U'_1 = (n-1)X^{n-2})$.

Donc $\forall j \in \mathbb{N}^*,\ G'_j(1) = (1-\frac{1}{n})^{j-1}(n-1) = n\,(\frac{n-1}{n})^j$

$\forall j \in \mathbb{N}^*,\ G'_j(1) = n\,(\frac{n-1}{n})^j$.

$\forall j \in \mathbb{N}^*,\ E(X_j) = n - G'_j(1)$

$\forall j \in \mathbb{N}^*,\ E(X_j) = n\left(1-(\frac{n-1}{n})^j\right)$; ceci redonne clairement $\lim_{j\to+\infty} E(X_j) = n$ car $|\frac{n-1}{n}|<1$.

PARTIE III

1°. Etude de la variable aléatoire T.

$\{T \leq j\}$ est réalisé si et seulement si les j premiers consommateurs ont permis à chacun des n fournisseurs de recevoir au moins une commande ; c'est à dire si et seulement si $\{X_j = n\}$ est réalisé.

Donc les événements $\{T\leq j\}$ et $\{X_j = n\}$ sont égaux.

$p(T=j+1) = p(T\leq j+1) - p(T\leq j) = p(X_{j+1}=n) - p(X_j=n)$.

$p(T=j+1) = p(X_{j+1}=n) - p(X_j=n)$.

b) Soit $j \in [\![1,+\infty[\![$

$$p(T=1)+p(T=2)+\cdots+p(T=j) = \sum_{k=1}^{j} p(T=k) = \underbrace{p(T=1)}_{=0} + \underbrace{\sum_{k=2}^{j}\left(p(X_k=n)-p(X_{k-1}=n)\right)}_{p(X_j=n)-\underbrace{p(X_1=n)}_{=0}}$$

$p(T=1)+p(T=2)+\cdots+p(T=j) = p(X_j=n)$

$\lim_{j\to+\infty}\left(p(T=1)+p(T=2)+\cdots+p(T=j)\right) = \lim_{j\to+\infty} p(X_j=n) = 1$.

Par conséquent : $\sum_{k=1}^{+\infty} p(T=k)=1$ ou : $\sum_{j=1}^{+\infty} p(T=j)=1$.

Remarque... ceci signifie que $\bigcup_{j=1}^{+\infty}(T=j)$ est un événement quasi-certain. Il est donc quasi-certain que chacun des n fournisseurs reçoive une commande.

c) $p(T=j+1)=p(X_{j+1}=n)-p(X_j=n)=\sum_{\ell=0}^{n-1} C_{n-1}^{\ell}(-1)^{\ell}\left[\left(\frac{n-\ell}{n}\right)^{j+1-1}-\left(\frac{n-\ell}{n}\right)^{j-1}\right]$

$p(T=j+1)=\sum_{\ell=0}^{n-1} C_{n-1}^{\ell}(-1)^{\ell}\left(\frac{n-\ell}{n}\right)^{j-1}\left[\frac{n-\ell}{n}-1\right]=\sum_{\ell=0 \text{ ou } \underline{\underline{1}}}^{n-1} C_{n-1}^{\ell}(-1)^{\ell}\left(\frac{n-\ell}{n}\right)^{j-1}\left(-\frac{\ell}{n}\right)$

$p(T=j+1)=\sum_{\ell=1}^{n-1} C_{n-1}^{\ell}(-1)^{\ell-1}\frac{\ell}{n}\left(\frac{n-\ell}{n}\right)^{j-1}$.

Q2. Etude de l'espérance de T.

a) $\ell\in[\![1,n[\![$

$S_\ell=\sum_{j=1}^{+\infty} j\left(1-\frac{\ell}{n}\right)^{j-1}=\frac{1}{\left(1-\left(1-\frac{\ell}{n}\right)\right)^2}=\frac{n^2}{\ell^2}$ car $\sum_{j=1}^{+\infty} j\,x^{j-1}=\frac{1}{(1-x)^2}$ pour $x\in]-1,1[$.

b) $\forall j\in\mathbb{N}$, $j\,p(T-1=j)=j\,p(T=j+1)=\sum_{\ell=1}^{n-1}(-1)^{\ell-1}C_{n-1}^{\ell}\left(\frac{\ell}{n}\right)j\left(1-\frac{\ell}{n}\right)^{j-1}$

Pour tout $\ell\in[\![1,n-1[\![$, la série de terme général $(-1)^{\ell-1}C_{n-1}^{\ell}\left(\frac{\ell}{n}\right)j\left(1-\frac{\ell}{n}\right)^{j-1}$ converge d'après a). La série de terme général $j\,p(T-1=j)$ est donc convergente comme somme de $n-1$ séries convergentes, comme $j\,p(T-1=j)\geq 0$ elle est même absolument convergente, par conséquent $T-1$ possède une espérance.

$E(T-1)=\sum_{j=1}^{+\infty} j\,p(T=j+1)=\sum_{\ell=1}^{n-1}(-1)^{\ell-1}C_{n-1}^{\ell}\frac{\ell}{n}\times\frac{n^2}{\ell^2}=\sum_{\ell=1}^{n-1}(-1)^{\ell-1}C_{n-1}^{\ell}\frac{n}{\ell}$

Donc $E(T-1)=n\sum_{\ell=1}^{n-1}(-1)^{\ell-1}\frac{C_{n-1}^{\ell}}{\ell}$.

c) Soit $x\in[0,1[$. $\sum_{\ell=1}^{n-1}x^{\ell-1}=\frac{1-x^{n-1}}{1-x}=\frac{1-(x-1+1)^{n-1}}{1-x}=\frac{(x-1+1)^{n-1}-1}{x-1}=\frac{\sum_{\ell=0}^{n-1}C_{n-1}^{\ell}(x-1)^{\ell}-1}{x-1}$

$$\sum_{\ell=1}^{n-1}x^{\ell-1}=\frac{\sum_{\ell=1}^{n-1}C_{n-1}^{\ell}(x-1)^{\ell}}{x-1}=\sum_{\ell=1}^{n-1}C_{n-1}^{\ell}(x-1)^{\ell-1}$$

Pour $x=1$: $\sum_{k=1}^{n-1} x^{k-1} = n-1$ et $\sum_{k=1}^{n-1} C_{n-1}^{k} (x-1)^{k-1} = C_{n-1}^{1} = n-1$

Finalement : $\forall x \in [0,1]$, $\sum_{k=1}^{n-1} C_{n-1}^{k} (x-1)^{k-1} = \sum_{k=1}^{n-1} x^{k-1}$

Remarque.. On peut aussi retrouver ce résultat en appliquant la formule de Taylor à $P=\sum_{k=1}^{n-1} X^{k-1}$

d) Intégrons entre 0 et 1 l'égalité précédente ; il vient :

$$\sum_{k=1}^{n-1} C_{n-1}^{k} \int_0^1 (x-1)^{k-1}\,dx = \sum_{k=1}^{n-1} \int_0^1 x^{k-1}\,dx \quad ;$$

$$\sum_{k=1}^{n-1} C_{n-1}^{k} \left[\frac{(x-1)^k}{k}\right]_0^1 = \sum_{k=1}^{n-1} \left[\frac{x^k}{k}\right]_0^1 \; ; \; \sum_{k=1}^{n-1} C_{n-1}^{k}\left(-\frac{(-1)^k}{k}\right) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$$

donc $E(T-1) = n \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{k-1} \frac{C_{n-1}^{k}}{k} = n \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$

Par conséquent $E(T)$ existe et $E(T) = n \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} + 1 = n \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$

$$E(T) = n\left[1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right].$$

Q3.. Evaluation asymptotique de E(T).

```
Program essec91;

var k,n:integer;s:real;

begin
write('Donnez la valeur de n. n=');readln(n);s:=1;
for k:=2 to n do s:=s+1/k;
writeln('Pour n=',n,' l''espérance est sensiblement : ',n*s:5:1)
end.
```

```
Donnez la valeur de n. n=10
Pour n=10 l'espérance est sensiblement :  29.3

Donnez la valeur de n. n=100
Pour n=100 l'espérance est sensiblement : 518.7
```

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. $\forall t \in [k, k+1]$, $\frac{1}{k+1} \le \frac{1}{t} \le \frac{1}{k}$; en intégrant : $\frac{1}{k+1} \le \int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \le \frac{1}{k}$

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $n \ge 2$

Par sommation de 1 à $n-1$ il vient : $\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} \le \int_1^n \frac{dt}{t} \le \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$; soit encore :

$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - 1 \le \ln n \le \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \frac{1}{n}$; donc : $1 + \frac{1}{n \ln n} \le \frac{\sum_{k=1}^{n} 1/k}{\ln n} \le 1 + \frac{1}{\ln n}$

Par passage à la limite il vient : $\lim_{n\to+\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} 1/k}{\ln n} = 1$; donc $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sim \ln n$

$$E(T) \sim n \ln n.$$