PARTIE I

1°.. Etude des variables aléatoires $X_i$ $(1 \leq i \leq n)$.

a) Soit $i \in [\![1,n]\!]$. $X_i$ suit une loi binomiale de paramètre $na$ et $\frac{1}{n}$ $(X_i \hookrightarrow \mathcal{B}(na, \frac{1}{n}))$

$\forall k \in [\![0,na]\!]$, $p(X_i=k) = C_{na}^{k}\left(\frac{1}{n}\right)^k\left(1-\frac{1}{n}\right)^{na-k}$

$E(X_i) = na \times \frac{1}{n}$. $E(X_i) = a$

$V(X_i) = na \times \frac{1}{n} \times (1-\frac{1}{n})$. $V(X_i) = a(1-\frac{1}{n})$.

b) 1er Cas.. $n>1$

Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que : $0 \leq k < na$

$r_k = \frac{p(X_i=k+1)}{p(X_i=k)} = \frac{C_{na}^{k+1}}{C_{na}^{k}}\left(\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-1} = \frac{1}{n-1} \times \frac{(na)!}{(k+1)!\,(na-k-1)!} \times \frac{k!\,(na-k)!}{(na)!} = \frac{1}{n-1} \times \frac{na-k}{k+1}$

$r_k > 1 \iff \frac{1}{n-1}\,\frac{na-k}{k+1} > 1 \iff na-k > nk-k+n-1 \iff k < a-1+\frac{1}{n}$.

$r_k < 1 \iff \dots \iff k > a-1+\frac{1}{n}$.

Par conséquent : $p(X=k+1) > p(X=k) \iff k < a-1+\frac{1}{n}$ et $p(X=k+1) < p(X=k) \iff k > a-1+\frac{1}{n}$

Notons encore que $E(a-1+\frac{1}{n}) = a-1$

Par conséquent si $k \in [\![0,na]\!]$ et si $k < a-1$ alors $p(X=k) < p(X=a)$

si $k \in [\![0,na]\!]$ et si $k > a-1$ alors $p(X=k) < p(X=a)$

Donc $p(X=k)$ est maximum si et seulement si $k=a$.

2e Cas.. $n=1$. $\forall k \in [\![0,a-1]\!]$, $p(X_i=k)=0$ et $p(X_i=a) = \left(\frac{1}{n}\right)^a$

le résultat précédent demeure.

Conclusion.. le mode est $a$.

Q2.. coefficient de corrélation des variables aléatoires $X_i$. $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq n$ et $i \neq j$

a) Chacun des $na$ consommateurs passe une commande à l'un des $n$ fournisseurs et le nombre de commandes reçues est $X_1+X_2+\dots+X_n$.

Par conséquent $X_1+X_2+\dots+X_n = na$.

$n^2a^2 = \sum_{i=1}^{n} X_i^2 + 2\sum_{1\leq i<j\leq n} X_iX_j$. $n^2a^2 = \sum_{i=1}^{n} E(X_i^2) + 2\sum_{1\leq i<j\leq n} E(X_iX_j)$

Donc $n^2a^2 = \sum_{i=1}^{n} E(X_i^2) + 2 \times \frac{n(n-1)}{2}\,\alpha$ où $\alpha$ est la valeur commune des espérances $E(X_iX_j)$.

$\uparrow$ nombre de termes dans la dernière somme

$\forall i\in [\![1,n]\!]$, $E(X_i^2)=V(X_i)+(E(X_i))^2=a\left(1-\frac{1}{n}\right)+a^2$

Donc $\quad n(n-1)\alpha=n^2a^2-n\left[a\left(1-\frac{1}{n}\right)+a^2\right]=(n^2-n)a^2-a(n-1)$

Soit $\alpha=\dfrac{na^2-a}{n}=a^2-\dfrac{a}{n}$ (... le problème ne se pose pas pour $n=1$).

Finalement : $\forall (i,j)\in [\![1,n]\!]^2,\ i\neq j \Rightarrow \underline{E(X_iX_j)=a^2-\frac{a}{n}}$

$\forall (i,j)\in [\![1,n]\!]^2,\ i\neq j \Rightarrow \underline{\mathrm{cov}(X_i,X_j)}=E(X_iX_j)-E(X_i)E(X_j)=\underline{-\frac{a}{n}}$.

Remarque.. Il aurait été beaucoup plus simple de partir de : $0=V(na)=V(X_1+X_2+\dots+X_n)$.

b) $\rho(X_i,X_j)=\dfrac{\mathrm{cov}(X_i,X_j)}{\sqrt{V(X_i)}\sqrt{V(X_j)}}=\dfrac{-a/n}{a\left(1-\frac{1}{n}\right)}=-\dfrac{1}{n-1}$.

$\forall (i,j)\in [\![1,n]\!]^2,\ i\neq j \Rightarrow \underline{\rho(X_i,X_j)=-\frac{1}{n-1}}$.

Pour $n=2$ on obtient $\rho(X_1,X_2)=-1$. L'une des deux variables est une fonction quasi-affine de l'autre à coefficient négatif. Ceci est confirmé par $X_1+X_2=2a$ c'est à dire $X_2=-X_1+2a$.

(Q3) a) $Y=B_1+B_2+\dots+B_n$.

$E(Y)=\sum_{i=1}^n E(B_i)=\sum_{i=1}^n p(B_i=1)=\sum_{i=1}^n p(X_i=0)=n\left(1-\frac{1}{n}\right)^{na}$

$\underline{E(Y)=n\left(1-\frac{1}{n}\right)^{na}}$

b) $(i,j)\in [\![1,n]\!]^2$. $B_iB_j$ est une variable de Bernoulli

→ $i=j$ $\quad B_iB_j=B_i^2$. $\underline{B_i^2 \text{ est une variable de Bernoulli de paramètre } \left(1-\frac{1}{n}\right)^{na}}$.

→ $i\neq j$ $\quad p(B_iB_j=1)=p(B_i=1 \text{ et } B_j=1)=\left(\frac{n-2}{n}\right)^{na}$ (← les fournisseurs $F_i$ et $F_j$ sont sans client, les clients se répartissent chez les $n-2$ fournisseurs restants)

$\underline{B_iB_j \text{ est donc une variable de Bernoulli de paramètre } \left(1-\frac{2}{n}\right)^{na}}$

Donc si $i=j$ : $\underline{E(B_iB_j)=\left(1-\frac{1}{n}\right)^{na}}$ et si $\underline{i\neq j \quad E(B_iB_j)=\left(1-\frac{2}{n}\right)^{na}}$

$V(Y)=V(B_1+B_2+\dots+B_n)=\sum_{i=1}^n V(B_i)+2\sum_{1\le i<j\le n}\mathrm{cov}(B_i,B_j)=\sum_{i=1}^n\left[E(B_i^2)-(E(B_i))^2\right]+2\sum_{1\le i<j\le n}\left(E(B_iB_j)-E(B_i)E(B_j)\right)$

$V(Y)=n\left[\left(1-\frac{1}{n}\right)^{na}-\left(1-\frac{1}{n}\right)^{2na}\right]+2\times\frac{n(n-1)}{2}\left[\left(1-\frac{2}{n}\right)^{na}-\left(1-\frac{1}{n}\right)^{2na}\right]$

$V(Y)=n\left[\left(1-\frac{1}{n}\right)^{na}+(n-1)\left(1-\frac{2}{n}\right)^{na}-n\left(1-\frac{1}{n}\right)^{2na}\right]$

c) $E\left(\frac{Y}{n}\right)=\frac{1}{n}E(Y)=\left(1-\frac{1}{n}\right)^{na}=e^{na\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)}$ et $na\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)\sim na\left(-\frac{1}{n}\right)=-a$

Par conséquent : $\underline{\lim_{n\to+\infty}E\left(\frac{Y}{n}\right)=e^{-a}}$.

$$V\left(\frac{Y}{n}\right) = \frac{1}{n^2} V(Y) = \frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{na} + \frac{n-1}{n}\left(1-\frac{2}{n}\right)^{na} - \left(1-\frac{1}{n}\right)^{2na} \times \frac{n}{n}$$

$\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{na} = e^{-a}$ et $\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{2}{n}\right)^{na} = e^{-2a}$

donc $\lim_{n\to+\infty} V\left(\frac{Y}{n}\right) = 0 \times e^{-a} + 1 \times e^{-2a} - e^{-2a} = 0$. $\underline{\underline{\lim_{n\to+\infty} V\left(\frac{Y}{n}\right) = 0}}$

Q4 Loi de la variable $Y$.

a) $Y$ peut prendre toutes les valeurs entre 0 et $n-1$.

$$\underline{\underline{p(Y=n-1) = \underbrace{n}_{\text{1 choix du fournisseur recevant toutes les commandes}} \left(\frac{1}{n}\right)^{na}}}$$ ← proba pour que les na clients commandent chez ce fournisseur.

b) $p(Y\neq 0) = p\left(\bigcup_{i=1}^{n} X_i = 0\right)$ (au moins 1 fournisseur n'a pas de commande ; l'un des événements $X_i=0$ est réalisé).

$$p(Y\neq 0) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{1\le i_1<i_2<\dots<i_k\le n} p(X_{i_1}=0 \text{ et } X_{i_2}=0 \text{ et} \dots X_{i_k}=0)$$

$$p(Y\neq 0) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \underbrace{C_n^k}_{\text{nombre d'éléments dans la somme interne}} \times \left(\frac{n-k}{n}\right)^{na}$$ ← proba pour que les na clients ne passent pas commande chez $F_{i_1}, F_{i_2}, \dots, F_{i_k}$.

$$p(Y=0) = 1 - \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1} C_n^k \left(\frac{n-k}{n}\right)^{na} = 1 + \sum_{k=1}^{n}(-1)^k C_n^k \left(1-\frac{k}{n}\right)^{na} = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k \left(1-\frac{k}{n}\right)^{na}$$

$$\text{donc } \underline{\underline{p(Y=0) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k \left(1-\frac{k}{n}\right)^{na} = \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k C_n^k \left(1-\frac{k}{n}\right)^{na} = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{n-k} C_n^k \left(\frac{k}{n}\right)^{na}}}$$

↳ Spécialité des surjections, es-tu surpris !

c)

| | a = 1 | a = 2 | a = 3 |
|---|---|---|---|
| n = 1 | 1 | 1 | 1 |
| n = 2 | 0,5 | 0,88 | 0,97 |
| n = 3 | 0,22 | 0,74 | 0,92 |

(1/2 ; 7/8 ; 31/32) pour $n=2$

(2/9 ; 20/27 ; 6050/6561) pour $n=3$

* Ce n'est pas dit dans le texte mais dans d et e, $k \in [\![1, n-1]\!]$.

d) $p\left(\bigcap_{i=k+1}^{n}[X_i\neq 0] \,/\, \bigcap_{i=1}^{k}[X_i=0]\right) = 1 - p\left(\bigcup_{i=k+1}^{n}[X_i=0] \,/\, \bigcap_{i=1}^{k}[X_i=0]\right)$ car $\overline{\bigcap_{i=k+1}^{n}[X_i\neq 0]} = \bigcup_{i=k+1}^{n}[X_i=0]$

(Ne pas oublier que $p_A : B \mapsto p(B/A)$ est une probabilité !)

Appliquons la formule du crible à la réunion $\bigcup_{i=k+1}^{n}[X_i=0]$ avec la probabilité $p_{\bigcap_{i=1}^{k}[X_i=0]}$

Nous obtenons : $p\left(\bigcup_{i=k+1}^{n}[X_i=0] \,/\, \bigcap_{i=1}^{k}[X_i=0]\right) = \sum_{j=1}^{n-k}(-1)^{j-1}\sum_{k+1\le i_1<i_2<\dots<i_j\le n} p\left([X_{i_1}=0]\cap[X_{i_2}=0]\cap\dots[X_{i_j}=0] \,/\, \bigcap_{i=1}^{k}[X_i=0]\right)$

Il y a $n-k$ éléments dans cette union !

donc $p\left(\bigcup_{i=k+1}^{n}[X_i=0] \,/\, \bigcap_{i=1}^{k}[X_i=0]\right) = \sum_{j=1}^{n-k}(-1)^{j-1}\sum_{k+1\le i_1<\dots<i_j\le n}\left(\frac{n-k-j}{n-k}\right)^{na} = \sum_{j=1}^{n-k}(-1)^{j-1}\times C_{n-k}^{j}\left(\frac{n-k-j}{n-k}\right)^{na}$

donc $p\left(\bigcap_{i=k+1}^{n}[X_i\neq 0] \,/\, \bigcap_{i=1}^{k}[X_i=0]\right) = 1-\sum_{j=1}^{n-k}(-1)^{j-1}C_{n-k}^{j}\left(\frac{n-k-j}{n-k}\right)^{na} = \sum_{j=0}^{n-k}(-1)^{j}C_{n-k}^{j}\left(\frac{n-k-j}{n-k}\right)^{na}$

Par conséquent : $\underline{\underline{p\left(\bigcap_{i=k+1}^{n}[X_i\neq 0] \,/\, \bigcap_{i=1}^{k}[X_i=0]\right)}} = \sum_{j=0}^{n-k}(-1)^{j}C_{n-k}^{j}\left(1-\frac{j}{n-k}\right)^{na} \underset{\uparrow}{=} \underline{\underline{\sum_{j=0}^{n-k}(-1)^{n-k-j}C_{n-k}^{j}\left(\frac{j}{n-k}\right)^{na}}}$

changement d'indice classique.

e) La probabilité pour que $F_1, F_2, \dots, F_k$ n'aient aucun client :

$p\left(\bigcap_{i=1}^{k}[X_i=0]\right) = \left(\frac{n-k}{n}\right)^{na} = \left(1-\frac{k}{n}\right)^{na}$ (les $na$ clients choisissent parmi $n-k$ fournisseurs)

La probabilité pour que $F_1, F_2, \dots, F_k$ n'aient aucun client et que $F_{k+1}, F_{k+2}, \dots, F_n$ aient au moins un client est :

$p\left(\bigcap_{i=1}^{k}[X_i=0]\cap\bigcap_{i=k+1}^{n}[X_i\neq 0]\right) = p\left(\bigcap_{i=k+1}^{n}[X_i\neq 0] \,/\, \bigcap_{i=1}^{k}[X_i=0]\right)p\left(\bigcap_{i=1}^{k}[X_i=0]\right)$

donc $\underline{\underline{p\left(\bigcap_{i=1}^{k}[X_i=0]\cap\bigcap_{i=k+1}^{n}[X_i\neq 0]\right) = \left(1-\frac{k}{n}\right)^{na}\sum_{j=0}^{n-k}(-1)^{n-k-j}C_{n-k}^{j}\left(\frac{j}{n-k}\right)^{na}}} = \left(1-\frac{k}{n}\right)^{na}\sum_{j=0}^{n-k}(-1)^{j}C_{n-k}^{j}\times\left(1-\frac{j}{n-k}\right)^{na}.$

f) Si $k=0$ voir plus haut $\left(p(Y=0) = \sum_{\ell=0}^{n-1}(-1)^{\ell}C_n^{\ell}\left(1-\frac{\ell}{n}\right)^{na}\right)$

Supposons $k\in[\![1,n-1]\!]$.

Notons que 1°. La probabilité pour que $k$ fournisseurs <u>donnés</u> n'aient pas de client <u>et</u> que les $n-k$ autres aient au moins un client est la même que la probabilité pour que $F_1, F_2, \dots, F_k$ n'aient pas de client et que $F_{k+1}, \dots, F_n$ aient au moins un client, c'est encore celle obtenue en e)

2° Il y a $C_n^k$ manières de choisir $k$ fournisseurs qui n'auront pas de client

Par conséquent : $p(Y=k) = C_n^k\left(1-\frac{k}{n}\right)^{na}\sum_{j=0}^{n-k}(-1)^{n-k-j}C_{n-k}^{j}\left(\frac{j}{n-k}\right)^{na}$

ou $\underline{p(Y=k) = C_n^k\left(1-\frac{k}{n}\right)^{na}\sum_{j=0}^{n-k}(-1)^{j}C_{n-k}^{j}\left(1-\frac{j}{n-k}\right)^{na}}$

Notons encore que : $p(Y=k) = C_n^k \frac{(n-k)^{na}}{n^{na}} \sum_{j=0}^{n-k} (-1)^{n-k-j} C_{n-k}^j \frac{j^{na}}{(n-k)^{na}}$

donc $p(Y=k) = C_n^k \sum_{j=0}^{n-k} (-1)^{n-k-j} C_{n-k}^j \left(\frac{j}{n}\right)^{na}$ à priori pour $k \in [\![1, n-1]\!]$.

$k = n-j$ !!

Or $C_n^0 \sum_{j=0}^{n-0} (-1)^{n-0-j} C_{n-0}^j \left(\frac{j}{n}\right)^{na} = \sum_{j=0}^{n} (-1)^{n-j} C_n^j \left(\frac{j}{n}\right)^{na} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k \left(\frac{n-k}{n}\right)^{na} = \sum_{k=0}^{n \text{ ou } n-1 \,!} (-1)^k C_n^k \left(1-\frac{k}{n}\right)^{na}$

$= p(Y=0)$ !

Finalement : $\forall k \in [\![0, n-1]\!]$, $p(Y=k) = C_n^k \sum_{j=0}^{n-k} (-1)^{n-k-j} C_{n-k}^j \left(\frac{j}{n}\right)^{na}$

Complément.. En fait tout cela est bien connu et se fait en quelques lignes. C'est un problème de surjections ; c'est encore un problème de rangements ! On range $na$ clients chez $n$ fournisseurs et on compte le nombre de fournisseurs "vides" !!

Le nombre de rangements est le nombre d'applications d'un ensemble de $na$ éléments dans un ensemble de $n$ éléments, soit : $n^{na}$

Pour faire un rangement contenant exactement $k$ fournisseurs "vides"

1°.. On choisit ces $k$ fournisseurs ($C_n^k$ possibilités)

2°.. On définit une surjection de l'ensemble des $na$ clients dans l'ensemble des $n-k$ autres fournisseurs ($S_{na}^{n-k}$ possibilités).

Rappel.. Le nombre de surjection d'un ensemble de $p$ éléments dans un ensemble de $n$ éléments est

$$S_p^n = \sum_{j=0}^{n} C_n^j (-1)^{n-j} j^p .$$

donc $S_{na}^{n-k} = \sum_{j=0}^{n-k} C_{n-k}^j (-1)^{n-k-j} j^{na}$

Finalement : $p(Y=k) = \frac{C_n^k S_{na}^{n-k}}{n^{na}} = C_n^k \sum_{j=0}^{n-k} C_{n-k}^j (-1)^{n-k-j} \left(\frac{j}{n}\right)^{na}$.

Exercice.. Utiliser cette formule pour retrouver $E(Y)$ et $V(Y)$. Ce n'est pas si difficile que semblent le dire C.L + J.G. (... correction avec pas mal d'erreurs ...)

Partie II

1.. Etude de la suite $(p_n(0))$.

a) Soit $x\in]0,1[$. $f_0'(x) = -\frac{a}{x^2}\ln(1-x) + \frac{a}{x}\times\frac{-1}{1-x}$ . $g_0(x) = -a\ln(1-x) - \frac{ax}{1-x}$

$g_0(x) = -a\left[\ln(1-x) + \frac{x}{1-x}\right]$

Nous savons que : $\ln(1-x) > 1 - \frac{1}{1-x} = -\frac{x}{1-x}$ donc $\ln(1-x) + \frac{x}{1-x} > 0$.

$\uparrow$
$\forall u\in\mathbb{R}_+^* - \{1\},\ \ln u > 1-\frac{1}{u}$

Finalement : $g_0(x) < 0$.

b) Le signe de $f_0'$ sur $]0,1[$ est celui de $g_0$ ; donc $\forall x\in]0,1[,\ f_0'(x)<0$. $f_0$ est strictement décroissante.

$\frac{a}{x}\ln(1-x) \underset{0}{\sim} \frac{a}{x}(-x) = -a$ ; $\lim_{x\to 0}\frac{a}{x}\ln(1-x) = -a$ donc $\underline{\lim_{x\to 0} f_0(x) = 0}$

c) $\forall x\in]0,1[,\ f_0'(x) = -\frac{a}{x^2}\left[\ln(1-x) + \frac{x}{1-x}\right] = -\frac{a}{1-x}\left[\frac{(1-x)\ln(1-x)+x}{x^2}\right]$

$(1-x)\ln(1-x)+x = (1-x)\left[(-x) - \frac{(-x)^2}{2}\right] + x + o(x^2) = -x - \frac{x^2}{2} + x^2 + x + o(x^2) = \frac{x^2}{2} + o(x^2)$.

Par conséquent $\lim_{x\to 0}\frac{(1-x)\ln(1-x)+x}{x^2} = \frac{1}{2}$ donc $\lim_{x\to 0} f_0'(x) = -\frac{a}{1}\times\frac{1}{2} = -\frac{a}{2}$.

Le théorème du prolongement de la dérivée prouve que $f_0$ est dérivable en 0 et que $f_0'$ est continue en 0.

Nous savions déjà que $f_0$ est dérivable sur $]0,1[$ et que $f_0'$ est continue sur $]0,1[$.

Finalement $f_0$ est de classe $C^1$ sur $[0,1[$

soit $n\in\mathbb{N}^*$

d) $\forall$ $p_n(0) = (1-\frac{1}{n})^{na} = e^{na\ln(1-\frac{1}{n})} = e^{\frac{a}{1/n}\ln(1-\frac{1}{n}) + a - a} = e^{f_0(\frac{1}{n})-a}$

$\underline{p_n(0) = e^{f_0(\frac{1}{n})-a}}$

$\frac{1}{n} > \frac{1}{n+1}$ ; $f_0(\frac{1}{n}) < f_0(\frac{1}{n+1})$ ; $e^{f_0(\frac{1}{n})-a} < e^{f_0(\frac{1}{n+1})-a}$ ; $p_n(0) < p_{n+1}(0)$.

$(p_n(0))_{n\geq 1}$ est donc croissante (strictement croissante)

$\lim_{n\to+\infty} p_n(0) = e^{0-a} = e^{-a}$.

2°. Etude de la loi-limite du nombre de diodes par fournisseur. a) $n\in\mathbb{N}^*$ et $k\in[\![1,na]\!]$

a) $p_n(k) = C_{na}^k\left(\frac{1}{n}\right)^k\left(1-\frac{1}{n}\right)^{na-k} = \frac{(na)}{n}\frac{(na-1)}{n}\cdots\frac{(na-k+1)}{n}\times\frac{1}{k!}\times e^{(na-k)\ln(1-\frac{1}{n})}$

$\lim_{n\to+\infty}\underbrace{\left(\frac{na}{n}\times\frac{na-1}{n}\times\cdots\times\frac{na-k+1}{n}\right)}_{k\ \text{termes}} = a\times a\times\cdots\times a = a^k$. $\lim_{n\to+\infty} e^{(na-k)\ln(1-\frac{1}{n})} = e^{-a}$

$\uparrow$
$(na-k)\ln(1-\frac{1}{n}) \sim -\frac{na-k}{n}$

Finalement : $\lim_{n\to+\infty} p_n(k) = \frac{a^k}{k!}e^{-a}$

La loi-limite du nombre de diodes par fournisseur quand n tend vers l'infini suit une loi de Poisson de paramètre a. Ceci n'est pas surprenant car chaque $x_i$ suit une loi binomiale de paramètres an et $\frac{1}{n}$, et $an \times \frac{1}{n} = a$ (voir cours approximation)

b) Notons Z cette loi limite. $Z(\Omega) = \mathbb{N}$. $\forall k \in \mathbb{N}$, $p(Z=k) = \frac{a^k}{k!}e^{-a}$.

$E(Z) = a$ et $V(Z) = a$

Soit $k \in \mathbb{N}$. $\frac{p(Z=k+1)}{p(Z=k)} = \frac{a^{k+1}e^{-a}}{(k+1)!} \times \frac{k!}{a^k e^{-a}} = \frac{a}{k+1}$

$p(Z=k+1) > p(Z=k) \Leftrightarrow \frac{a}{k+1} > 1 \Leftrightarrow k < a-1$. $p(Z=k+1) < p(Z=k) \Leftrightarrow k > a-1$.

$p(Z=k+1) = p(Z=k) \Leftrightarrow k = a-1$. Il résulte de ceci que :

Soit $k \in \mathbb{N}$. $k < a-1 \Rightarrow p(Z=k) < p(Z=a-1) = p(Z=a)$ et $k > a \Rightarrow p(Z=k) < p(Z=a) = p(Z=a-1)$

Il y a donc deux modes : $a-1$ et $a$

3°. Etude de la suite $(p_n(k))$ selon les valeurs de k.

a) $\ln(p_n(k)/p(k)) = \ln\left[C_{na}^k\left(\frac{1}{n}\right)^k\left(1-\frac{1}{n}\right)^{na-k}\frac{k!}{a^k e^{-a}}\right] = \ln\left[\frac{na}{na}\,\frac{na-1}{na}\times\cdots\times\frac{na-k+1}{na}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{na-k}e^{a}\right]$

$$= \sum_{j=0}^{k-1}\ln\frac{na-j}{na} + (na-k)\ln\left(1-\frac{1}{n}\right) + a = \left(\frac{a}{1/n}-k\right)\ln\left(1-\frac{1}{n}\right) + a + \sum_{j=0}^{k-1}\ln\left(1-\frac{j\,1/n}{a}\right)$$

donc $\ln(p_n(k)/p(k)) = f_k(1/n)$.

b) Soit $x \in D_{f_k}$.

$x f_k(x) = (a-kx)\ln(1-x) + ax + \sum_{j=0}^{k-1} x\ln\left(1-\frac{jx}{a}\right)$

$x f_k(x) = (a-kx)\left(-x-\frac{x^2}{2}\right) + ax + \sum_{j=0}^{k-1} x\left(-\frac{jx}{a}\right) + o(x^2)$.

$x f_k(x) = kx^2 - a\frac{x^2}{2} - \frac{1}{a}\times\frac{(k-1)k}{2}x^2 + o(x^2)$

$x f_k(x) = \left[k - \frac{a}{2} - \frac{k(k-1)}{2a}\right]x^2 + o(x^2)$. $= \frac{-k^2+(2a+1)k-a^2}{2a}x^2 + o(x^2)$

donc $\frac{1}{n} f_k\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{-k^2+(2a+1)k-a^2}{2a}\,\frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

considérons le polynôme $-X^2+(2a+1)X-a^2$ et factorisons le.

$\Delta = (2a+1)^2 - 4a^2 = 1+4a$. Donc $-X^2+(2a+1)X-a^2 = -\left(X - \frac{-(2a+1)+\sqrt{1+4a}}{-2}\right)\left(X - \frac{-(2a+1)-\sqrt{1+4a}}{-2}\right)$

$$-X^2+(2a+1)X-a^2 = -\left(X-\left(a+\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{1+4a}}{2}\right)\right)\left(X-\left(a+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{1+4a}}{2}\right)\right)$$

$$-X^2+(2a+1)X-a^2 = -\left(X-\left(a+\frac{1}{2}-\sqrt{a+\frac{1}{4}}\right)\right)\left(X-\left(a+\frac{1}{2}+\sqrt{a+\frac{1}{4}}\right)\right) = -(X-b)(X-c)$$

Si $k\in\,]b,c[$ on a alors $-k^2+(2a+1)k-a^2>0$ et $\frac{1}{n}f_k\left(\frac{1}{n}\right)\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{-k^2+(2a+1)k-a^2}{2a}\times\frac{1}{n^2}$

Par conséquent pour n assez grand : $f_k\left(\frac{1}{n}\right)>0$.

Si $k\notin[b,c]$ : on a alors de la même manière $f_k\left(\frac{1}{n}\right)<0$. pour n assez grand

Rappelons que : $f_k\left(\frac{1}{n}\right)=\ln\dfrac{p_n(k)}{p(k)}$.

Par conséquent si $k\in\,]b,c[$ : $p_n(k)>p(k)$ pour n assez grand ;

si $k\notin[b,c]$ : $p_n(k)<p(k)$ pour n assez grand.

c) $f_k$ est dérivable sur pa domaine. Soit $x\in\mathcal{D}_k$.

$$f_k'(x) = -\frac{a}{x^2}\ln(1-x)+\left(\frac{a}{x}-k\right)\frac{-1}{1-x}+\sum_{j=0}^{k-1}\frac{-j/a}{1-\frac{jx}{a}}$$

$$g_k(x)=x^2f_k'(x) = -a\ln(1-x)+(kx^2-ax)\frac{1}{1-x} - \sum_{j=0}^{k-1}\frac{x^2}{1-\frac{jx}{a}}\times\frac{j}{a}$$

donc $g_k(x) = -a\left[-x-\frac{x^2}{2}\right]+kx^2-ax(1+x)-\sum_{j=0}^{k-1}\frac{j}{a}x^2+o(x^2)$ ; en effet :

- $\frac{1}{1-x}=1+o(1)$ donc $kx^2\times\frac{1}{1-x}=kx^2+o(x^2)$.
- $\frac{1}{1-x}=1+x+o(x)$ donc $-ax\times\frac{1}{1-x}=-ax(1+x)+o(x^2)$ } ok ?
- $\frac{1}{1-\frac{jx}{a}}=1+o(1)$ donc $\frac{x^2}{1-\frac{jx}{a}}=x^2+o(x^2)$

Finalement : $g_k(x) = ax+\frac{ax^2}{2}+kx^2-ax-ax^2-\frac{x^2}{a}\times\frac{(k-1)k}{2}+o(x^2)$

$$g_k(x)=\left[-\frac{1}{2a}k^2+\left(1+\frac{1}{2a}\right)k-\frac{a}{2}\right]x^2+o(x^2)$$

$$g_k(x) = -\frac{1}{2a}(k-b)(k-c)x^2+o(x^2).$$

Si $k \in ]b,c[$ : $x^2 f_k'(x) \underset{0}{\sim} -\frac{1}{2a}(k-b)(k-c)x^2$ et $-\frac{1}{2a}(k-b)(k-c) > 0$

donc $f_k'$ est strictement positive au voisinage de $0$ ; $f_k$ est strictement croissante au voisinage de $0$.

Pour $n$ assez grand : $f_k\left(\frac{1}{n+1}\right) \leq f_k\left(\frac{1}{n}\right)$ donc $\ln \frac{p_{n+1}(k)}{p(k)} \leq \ln \frac{p_n(k)}{p(k)}$ ou encore : $p_{n+1}(k) \leq p_n(k)$.

A partir d'un certain rang la suite $(p_n(k))$ est donc décroissante.

De même si $k \notin [b,c]$ : $(p_n(k))$ est croissante à partir d'un certain rang.