Question préliminaire

ESSEC 84 A faire et à refaire les jours de déprime en trompant sa madeleine dans la mélancolie du quotidien. Le pied assuré !

a.. Soit $(a,b)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}^*$.

Une intégration par parties donne : $I(a,b)=\int_0^1 x^a(1-x)^b\,dx=\left[\frac{x^{a+1}}{a+1}(1-x)^b\right]_0^1-\int_0^1\frac{x^{a+1}}{a+1}\times(-1)b(1-x)^{b-1}dx$

Donc $I(a,b)=\frac{b}{a+1}I(a+1,b-1)$ (formule (-1))

En itérant : $I(a,b)=\frac{b}{a+1}\times\frac{b-1}{a+2}\times\dots\times\frac{1}{a+b}\,I(a+b,0)=\dfrac{b!}{\frac{(a+b)!}{a!}}I(a+b,0)=\frac{a!\,b!}{(a+b)!}\underbrace{\int_0^1 x^{a+b}dx}_{1/(a+b+1)}$

Ne reste plus qu'à montrer que : $\forall(a,b)\in\mathbb{N}^2,\ I(a,b)=\frac{a!\,b!}{(a+b+1)!}$

Montrons par récurrence que pour tout $a\in\mathbb{N}$: $\forall b\in\mathbb{N},\ I(a,b)=\frac{a!\,b!}{(a+b+1)!}$

→ $a=0$. Soit $b\in\mathbb{N}$.

$I(a,b)=I(0,b)=\int_0^1(1-x)^b\,dx=\left[-\frac{(1-x)^{b+1}}{b+1}\right]_0^1=\frac{1}{b+1}=\frac{b!}{(b+1)!}=\frac{0!\,b!}{(0+b+1)!}=\frac{a!\,b!}{(a+b+1)!}$

→ Supposons la propriété vraie pour $a\in\mathbb{N}$ ($\forall b\in\mathbb{N},\ I(a,b)=\frac{a!\,b!}{(a+b+1)!}$) et montrons-la pour $a+1$.

Soit $b\in\mathbb{N}$. Montrons que : $I(a+1,b)=\frac{(a+1)!\,b!}{(a+b+2)!}$.

Appliquons la formule (-1) pour $b+1$

$I(a,b+1)=\frac{b+1}{a+1}I(a+1,b)$; $I(a+1,b)=\frac{a+1}{b+1}\times I(a,b+1)\overset{H.R.}{=}\frac{a+1}{b+1}\times\frac{a!\,(b+1)!}{(a+b+1+1)!}=\frac{(a+1)!\,b!}{(a+b+2)!}$

Ceci achève la récurrence.

Finalement : $\forall(a,b)\in\mathbb{N}^2$, $\underline{I(a,b)=\frac{a!\,b!}{(a+b+1)!}}=\frac{1}{a+b+1}\times\frac{1}{\binom{a}{a+b}}=\frac{1}{(a+1)\binom{b}{a+b+1}}=\frac{1}{(b+1)\binom{a}{a+b+1}}$

b.. Soit $(a,b)\in\mathbb{N}^2$

$\sum_{j=0}^{b}(-1)^j\frac{\binom{j}{b}}{a+j+1}=\sum_{j=0}^{b}(-1)^j\binom{j}{b}\underbrace{\int_0^1 x^{a+j}dx}_{\frac{1}{a+j+1}}=\int_0^1\sum_{j=0}^{b}\binom{j}{b}(-1)^jx^{a+j}dx=\int_0^1x^a\sum_{j=0}^{b}\binom{j}{b}(-x)^j\dots$

$$\sum_{j=0}^{b}(-1)^j\frac{\binom{j}{b}}{a+j+1}=\int_0^1x^a\,((-x)+1)^b\,dx=I(a,b)$$

Finalement : $$\sum_{j=0}^{b}(-1)^j\frac{\binom{j}{b}}{a+j+1}=\frac{a!\,b!}{(a+b+1)!}\qquad(0)$$

PARTIE I

(Q1) Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Notons l'existence et l'unicité de φ. Un petit travail préparatoire...
Posons $H : x \longmapsto \int_1^x P(t)\,dt$. Clairement $H \in \mathbb{R}_{n+1}[X]$ et $H(1)=0$
donc H est divisible par $X-1$. Par conséquent $H = (X-1)\,L$ avec $L \in \mathbb{R}_n[X]$.

Analyse (unicité). Supposons que φ existe.

$\forall x \in \mathbb{R}-\{1\},\ \varphi(x) = \frac{1}{x-1}\int_1^x P(t)\,dt = \frac{1}{x-1}H(x) = \frac{1}{x-1}(x-1)L(x) = L(x)$.

$\forall x \in \mathbb{R}-\{1\},\ (\varphi - L)(x) = 0$ et $\varphi - L \in \mathbb{R}_n[X]$; $\varphi - L = 0_{\mathbb{R}_n[X]}$ ($\varphi - L$ a une infinité de zéros dans $\mathbb{R}$)

Par conséquent : $\varphi = L$; d'où l'unicité

Synthèse (existence) Posons $\varphi = L$. 1°. $\varphi = L \in \mathbb{R}_n[X]$

2°. $\forall x \in \mathbb{R}-\{1\},\ \varphi(x) = L(x) = \frac{H(x)}{x-1} = \frac{1}{x-1}\left[\int_1^x P(t)\,dt\right]$

Donc φ est solution du problème, d'où l'existence

Finalement : $\forall P \in \mathbb{R}_n[X],\ \exists!\ \varphi \in \mathbb{R}_n[X],\ \forall x \in \mathbb{R}-\{1\},\ \varphi(x) = \frac{1}{x-1}\int_1^x P(t)\,dt$.

Notons la linéarité de f (ce qui précède montre bien que f est une application de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}_n[X]$). Soient $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$ et $(P,S) \in \mathbb{R}_n[X]^2$.
Pour montrer que $f(\alpha P + \beta S) = \alpha f(P) + \beta f(S)$ il suffit de montrer que ces deux polynômes coïncident en au moins $n+1$ points distincts de $\mathbb{R}$ car ce sont deux éléments de $\mathbb{R}_n[X]$.
Montrons qu'ils coïncident sur $\mathbb{R}-\{1\}$.

$\forall x \in \mathbb{R}-\{1\},\ (f(\alpha P + \beta S))(x) = \frac{1}{x-1}\int_0^1 (\alpha P + \beta S)(t)\,dt = \alpha \frac{1}{x-1}\int_0^1 P(t)\,dt + \beta \frac{1}{x-1}\int_0^1 S(t)\,dt$

$\forall x \in \mathbb{R}-\{1\},\ (f(\alpha P + \beta S))(x) = \alpha\, f(P)(x) + \beta\, f(S)(x) = (\alpha f(P) + \beta f(S))(x)$ ... cqfd.

(Q2) $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X])$ et $\dim \mathbb{R}_n[X] < +\infty$. Pour montrer que f est bijective il suffit de prouver que : $\operatorname{Ker} f = \{0_{\mathbb{R}_n[X]}\}$. Soit $P \in \operatorname{Ker} \varphi$.

$\forall x \in \mathbb{R}-\{1\},\ \frac{1}{x-1}\int_1^x P(t)\,dt = 0$ donc $\forall x \in \mathbb{R}-\{1\},\ \int_1^x P(t)\,dt = 0$

Mieux : $\forall x \in \mathbb{R},\ \int_1^x P(t)\,dt = 0$

Par dérivation on obtient $\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) = 0$. $P = 0_{\mathbb{R}_n[X]}$.

Finalement $\operatorname{Ker} f = \{0_{\mathbb{R}_n[X]}\}$. f est donc un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

Déterminons f^{-1}. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Posons $R = f^{-1}(P)$. $f(R) = P$.

$\forall x \in \mathbb{R}-\{1\},\ P(x) = \frac{1}{x-1}\int_1^x R(t)\,dt$. $\forall x \in \mathbb{R}-\{1\}$ ou $\mathbb{R}$, $(x-1)P(x) = \int_1^x R(t)\,dt$

Par dérivation : $\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) + (x-1)P'(x) = R(x)$.

Finalement $f^{-1}(P) = P + (X-1)P' = ((X-1)P)'$ pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$.

Q3 . $\forall k \in [\![0,n]\!]$, $\frac{1}{x-1}\int_1^x t^k\,dt = \frac{\left[\frac{t^{k+1}}{k+1}\right]_1^x}{x-1} = \frac{1}{k+1}\,\frac{x^{k+1}-1}{x-1} = \frac{1}{k+1}\sum_{i=0}^{k} x^i$ pour tout $x \in \mathbb{R}-\{1\}$

Donc $\forall k \in [\![0,n]\!]$, $f(X^k) = \frac{1}{k+1}\sum_{i=0}^{k} X^i$

. $\forall k \in [\![0,n]\!]$, $f^{-1}(X^k) = X^k + (X-1)kX^{k-1} = (k+1)X^k - kX^{k-1}$ ... à un ahur près.

$\forall k \in [\![0,n]\!]$, $f(X^k) = \frac{1}{k+1}\sum_{i=0}^{k} X^i$ et $f^{-1}(X^k) = (k+1)X^k - kX^{k-1}$.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 & \cdots & 1/(n+1) \\ 0 & 1/2 & 1/3 & \cdots & 1/(n+1) \\ 0 & 0 & 1/3 & \cdots & 1/(n+1) \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & & 0 & 1/(n+1) \end{bmatrix}$$

$(\in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R}))$; en particulier $\mathrm{Spec}(A) = \{1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{n+1}\}$ (A est triangulaire supérieure)

$A \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ et possède $n+1$ valeurs propres distinctes ;

A est diagonalisable.

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 & & \vdots \\ 0 & 0 & 3 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & -n \\ 0 & 0 & \cdots & & 0 & n+1 \end{bmatrix}$$

; $\mathrm{Spec}(A^{-1}) = \{1, 2, \dots, n+1\}$ ... ce n'est pas une surprise

$A^{-1} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ et possède $n+1$ valeurs propres distinctes ;

A^{-1} est diagonalisable

Q4 a) $\varphi \in \mathbb{R}_n[X]$ et α est racine de φ d'ordre de multiplicité $k \in \mathbb{N}^*$ ($\alpha \in \mathbb{C}$)

$\varphi = (X-\alpha)^k S$ avec $S(\alpha) \neq 0$

$f^{-1}(\varphi) = (X-1)\varphi' + \varphi = (X-1)\left[k(X-\alpha)^{k-1}S + (X-\alpha)^k S'\right] + (X-\alpha)^k S$

$f^{-1}(\varphi) = (X-\alpha)^{k-1}\left[k(X-1)S + (X-\alpha)(X-1)S' + (X-\alpha)S\right]$

1er cas.. $k=1$. $f^{-1}(\varphi)(\alpha) = k(\alpha-1)S(\alpha)$

ou $\alpha \neq 1$ et $f^{-1}(\varphi)$ n'admet pas α pour racine

ou $\alpha = 1$. $f^{-1}(\varphi) = (X-1)^k\left[kS + (X-1)S' + S\right] = (X-1)^k\left[2S + (X-1)S'\right]$

$[2S + (X-1)S'](\alpha) = [kS + (X-1)S'](1) = 2S(1) = 2S(\alpha) \neq 0$.

$\alpha = 1$ est racine d'ordre $k=1$ de $f^{-1}(\varphi)$

2e cas.. $k \neq 1$ $f^{-1}(\varphi)(\alpha) = (X-\alpha)^{k-1}\left[k(X-1)S + (X-\alpha)(X-1)S' + (X-\alpha)S\right]$

ou $\alpha \neq 1$ et $\left[k(X-1)S + (X-\alpha)(X-1)S' + (X-\alpha)S\right](\alpha) = k(\alpha-1)S(\alpha) \neq 0$

α est alors racine d'ordre $k-1$ de $f^{-1}(\varphi)$.

ou $\alpha = 1$. $f^{-1}(\varphi) = (X-\alpha)^k\left[kS + (X-1)S' + S\right] = (X-\alpha)^k\left((k+1)S + (X-1)S'\right)$

$[(k+1)S + (X-1)S'](1) = (k+1)S(1) \neq 0$. α est racine d'ordre k de $f^{-1}(\varphi)$.

Conclusion... Si $k=1$ ou $\alpha \neq 1$ et α n'est pas racine de $f(\varphi)$
ou $\alpha = 1$ et α est racine simple de $f(\varphi)$

Si $k \geq 2$ ou $\alpha \neq 1$ et α est racine d'ordre $k-1$ de $f(\varphi)$
ou $\alpha = 1$ et α " " " k de $f(\varphi)$ } Notons que ceci vaut encore pour $k=1$ ...

b.. $\text{Spec } f^{-1} = \{1, 2, \ldots, n+1\}$

Soit $i \in [\![1, n+1]\!]$. Soit φ un vecteur propre de f^{-1} associé à la valeur propre i.

$f^{-1}(\varphi) = i\,\varphi$

Comme $i \neq 0$ tout zéro de φ d'ordre de multiplicité k est un zéro de $f^{-1}(\varphi)$ d'ordre de multiplicité k. Ce qui précède prouve que si φ admet α pour zéro dans $\mathbb{C}$ alors $\alpha = 1$.

$\varphi \in \mathbb{R}_n[X]$ donc $\varphi \in \mathbb{C}_n[X]$; 1 étant le seul zéro possible de φ dans $\mathbb{C}$:

$\exists\, c \in \mathbb{R}^*,\ \exists\, p \in [\![0, n]\!], \quad \varphi = c\,(X-1)^p.$

$f^{-1}(\varphi) = i\,\varphi$ donc $\quad (X-1)\varphi' + \varphi = i\,\varphi$

$(X-1)\,(c\,p(X-1)^{p-1}) + c\,(X-1)^p = ic(X-1)^p$

Donc $\quad cp(X-1)^p + c(X-1)^p = i\,c\,(X-1)^p$; $\quad p+1 = i$; $\ p = i-1$; $\ \varphi = c\,(X-1)^{i-1}$.

Ceci prouve donc que $\quad \text{Ker}\,(f^{-1} - i\,\text{Id}_{\mathbb{R}_n[X]}) \subset \text{Vect}\,((X-1)^{i-1})$.

Notons l'inclusion inverse, il suffit de prouver que $(X-1)^{i-1}$ est vecteur propre de f^{-1} associé à la valeur propre i.

Ce polynome n'est pas nul et $f^{-1}((X-1)^{i-1}) = (X-1)(i-1)(X-1)^{i-2} + (X-1)^{i-1} = i\,(X-1)^{i-1}$ ... cqfd

Finalement $\quad \underline{\text{Spec } f^{-1} = \{1, 2, \ldots, n+1\} \text{ et } \forall i \in [\![1, n+1]\!],\ \text{Ke}(f^{-1} - i\,\text{Id}_{\mathbb{R}_n[X]}) = \text{Vect}\,((X-1)^{i-1})}$

$\text{Spec } f = \{1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{n+1}\}$. card Spec $f = n+1$ et dim $\mathbb{R}_{n+1}[X]$. Les sous-espaces propres de f sont donc des droites vectorielles.

Notons encore que : $\quad \forall i \in [\![1, n+1]\!],\ f^{-1}((X-1)^{i-1}) = i\,(X-1)^{i-1}$

Donc : $\forall i \in [\![1, n+1]\!],\ (X-1)^{i-1} = i\ f((X-1)^{i-1})$ ou $\ \forall i \in [\![1, n+1]\!],\ f((X-1)^{i-1}) = \frac{1}{i}(X-1)^{i-1}$.

Finalement $\text{Spec } f = \{1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{n+1}\}$ et $\forall i \in [\![1, n+1]\!]$, $\ \text{Ke}\,(f - \frac{1}{i}\text{Id}_{\mathbb{R}_n[X]}) = \text{Vect}\,((X-1)^{i-1})$.

Les sous-espaces propres de f sont ceux de f^{-1}... ce qui n'est toujours pas une surprise.

$\mathcal{B}' = (1, (X-1), \ldots, (X-1)^n)$ est une base de vecteurs propres de f et de f^{-1}.

Soit T la matrice de passage de $\mathcal{B} = (1, X, \ldots, X^n)$ à $\mathcal{B}'$.

Posons $D = T^{-1}AT$. $A = \Pi_{\mathcal{B}}(f)$ donc $D = \Pi_{\mathcal{B}'}(f) = \begin{bmatrix} 1 & & & (0) \\ & 1/2 & & \\ & & \ddots & \\ (0) & & & 1/(n+1) \end{bmatrix}$. D est diagonale.

$\forall i \in [\![0,n]\!]$, $(X-1)^i = \sum_{k=0}^{i} C_i^k X^k (-1)^{k-i}$

Donc $T = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & \cdots & (-1)^i C_i^0 & \cdots & (-1)^n C_n^0 \\ 0 & 1 & -2 & \cdots & (-1)^{i-1} C_i^1 & \cdots & (-1)^{n-1} C_n^1 \\ \vdots & 0 & 1 & & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots & (-1)^0 C_i^i & \cdots & (-1)^{n-i} C_n^i \\ \vdots & \vdots & \vdots & & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots 0 & (-1)^0 C_n^n \end{bmatrix}$. Notons que T est à diagonale unité et triangulaire supérieure ($(-1)^0 C_i^i = 1$!)

T^{-1} n'est autre que la matrice de passage de $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{B}$

$\mathcal{B}' = (1, (X-1), \dots, (X-1)^n)$ et $\mathcal{B} = (1, X, \dots, X^n)$.

$\forall i \in [\![0,n]\!]$, $X^i = (X-1+1)^i = \sum_{k=0}^{i} C_i^k (X-1)^k$

En écrivant $\mathcal{B}$ sur $\mathcal{B}'$ on obtient donc $T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & C_i^0 & \cdots & C_n^0 \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & C_i^1 & \cdots & C_n^1 \\ \vdots & 0 & 1 & & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots & C_i^i & \cdots & C_n^i \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots 0 & C_n^n \end{bmatrix}$

(Q5) $k \in \mathbb{N}$ et $p \in [\![0,n]\!]$

Le coefficient α_p de X^p dans $f^k(X^n)$ est le terme situé sur la $(p+1)^{ème}$ ligne et la dernière colonne de A^k.

Cherchons donc α_p en remarquant que $A^k = (TDT^{-1})^k = TD^kT^{-1}$ et que

$D^k = \begin{bmatrix} 1 & & & (0) \\ & (1/2)^k & & \\ & & \ddots & \\ (0) & & & (1/(n+1))^k \end{bmatrix}$. Pour obtenir α_p il suffit de faire le produit de la $(p+1)^{ème}$ ligne de $\underline{T}$ avec la dernière colonne de $\underline{D^kT^{-1}}$

La $(p+1)^{ème}$ ligne de T est : $[\overbrace{0 \cdots 0}^{p\text{ fois}}\ C_p^p\ C_{p+1}^p(-1) \cdots C_i^p(-1)^{i-p} \cdots C_n^p(-1)^{n-p}]$ ← composante de $1, (X-1), \dots, (X-1)^n$ sur X^p

La dernière colonne de T^{-1} est : $\begin{bmatrix} C_n^0 \\ C_n^1 \\ \vdots \\ \vdots \\ C_n^n \end{bmatrix}$

La dernière colonne de D^kT^{-1} est : $\begin{bmatrix} C_n^0 \\ (1/2)^k C_n^1 \\ (1/3)^k C_n^2 \\ \vdots \\ (1/(n+1))^k C_n^n \end{bmatrix}$

Par conséquent $\alpha_p = \sum_{i=p}^{n} C_i^p (-1)^{i-p} \left(\frac{1}{i+1}\right)^k C_n^i = \sum_{i=p}^{n} (-1)^{i-p} \frac{1}{(i+1)^k} \frac{i!}{p!(i-p)!} \times \frac{n!}{i!(n-i)!}$

$\alpha_p = \sum_{i=p}^{n} (-1)^{i-p} \frac{1}{(i+1)^k} \frac{n!}{p!(n-p)!} \times \frac{(n-p)!}{(i-p)!(n-i)!} = C_n^p \sum_{i=p}^{n} (-1)^{i-p} \frac{1}{(i+1)^k} C_{n-p}^{i-p} \underset{j=i-p}{=} C_n^p \sum_{j=0}^{n-p} (-1)^j \frac{1}{(j+p+1)^k} C_{n-p}^j$.

Par conséquent, pour tout k dans $\mathbb{N}$, le coefficient de X^p dans $f(X^k)$ est :

$$\underline{\underline{C_n^p \left[\sum_{j=0}^{n-p} (-1)^j \, C_{n-p}^j \frac{1}{(p+j+1)^k} \right]}}$$ lorsque $p \in [\![0,n]\!]$.

PARTIE II

(Q1) a) Notons pour tout $k \in \mathbb{N}$ et $p \in [\![0,n]\!]$, $R_k(p)$ l'événement le $k^{\text{ème}}$ tirage a donné p $\left(p(R_k(p)) = p_k(p) = p(X_k = p) \right)$

Soit $k \in \mathbb{N}$ et soit $p \in [\![0,n]\!]$

$$p_{k+1}(p) = p(R_{k+1}(p)) = \sum_{i=0}^{n} p(R_{k+1}(p) / R_k(i)) \, p(R_k(i))$$

Notons que : $p(R_{k+1}(p) / R_k(i)) = \begin{cases} 0 & \text{si } p > i \\ \frac{1}{i+1} & \text{si } p \leq i \end{cases}$ } le $k+1$ ème tirage se fait dans $[\![0,i]\!]$.

Il vient alors $p_{k+1}(p) = \sum_{i=p}^{n} \frac{1}{i+1} p(R_k(i))$ ou $\underline{\underline{p_{k+1}(p) = \sum_{i=p}^{n} \frac{1}{i+1} p_k(i)}}$

b) Rappelons que : $A = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 & \cdots & 1/n+1 \\ 0 & 1/2 & 1/3 & \cdots & 1/n+1 \\ & & 1/3 & \cdots & 1/n+1 \\ & & & \ddots & \vdots \\ 0 & & \cdots & 0 & 1/n+1 \end{bmatrix}$

donc $A \begin{bmatrix} p_k(0) \\ p_k(1) \\ \vdots \\ p_k(n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{k+1}(0) \\ p_{k+1}(1) \\ \vdots \\ p_{k+1}(n) \end{bmatrix}$; par conséquent $\underline{AU_k = U_{k+1}}$ et ceci pour tout $k \in \mathbb{N}$.

(Q2) a) Soit $k \in \mathbb{N}$

$$E(X_k) = \sum_{i=0}^{n} i \, p(X_k = i) = [0, 1, 2, \ldots, n] \begin{bmatrix} p(X_k=0) \\ p(X_k=1) \\ \vdots \\ p(X_k=n) \end{bmatrix} = [0, 1, 2, \ldots, n] \begin{bmatrix} p_k(0) \\ p_k(1) \\ \vdots \\ p_k(n) \end{bmatrix}$$

classique... à retenir.

Finalement : $\underline{\underline{E(X_k) = BU_k \text{ avec } B = [0, 1, 2, \ldots, n]}}$.

$B \in \mathcal{M}_{1,n+1}(\mathbb{R})$ et $A \in \mathcal{M}_{n+1,n+1}(\mathbb{R})$ donc $BA \in \mathcal{M}_{1,n+1}(\mathbb{K})$. $BA = [c_0, c_1, \ldots, c_n]$

Si $p \in [\![0,n]\!]$, c_p est le produit de B avec la $p+1$ ième colonne de A

$$c_p = [0, 1, \ldots, n] \begin{bmatrix} \frac{1}{p+1} \\ \frac{1}{p+1} \\ \vdots \\ \frac{1}{p+1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{p+1}(0 + 1 + 2 + \cdots + p + 0 + \cdots + 0) = \frac{1}{p+1} \times \frac{p(p+1)}{2} = \frac{p}{2}.$$

Finalement $\underline{\underline{BA = \frac{1}{2} B}}$

$\forall k \in \mathbb{N},\ E(X_{k+1}) = BU_{k+1} = BAU_k = \frac{1}{2}BU_k = \frac{1}{2}E(X_k)$.

$\forall k \in \mathbb{N},\ E(X_k) = \left(\frac{1}{2}\right)^k E(X_0) = \frac{n}{2^k}$. $\quad \forall k \in \mathbb{N},\ \underline{\underline{E(X_k) = \frac{n}{2^k}}}$.

Soit $k \in \mathbb{N}$

b. $E(X_k^2) = \sum_{i=0}^{n} i^2 p(X_k=i) = CU_k$ où $C = [0, 1^2, 2^2, \dots, n^2]$.

$$CA = [0^2, 1^2, \dots, n^2]\begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 & \cdots & 1/n+1 \\ 0 & 1/2 & 1/3 & \cdots & 1/n+1 \\ & & 1/3 & \cdots & 1/n+1 \\ & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & & 0 & 1/n+1 \end{bmatrix} = \left[0^2, \frac{1}{2}(0^2+1^2), \frac{1}{3}(0^2+1^2+2^2), \dots, \frac{1}{n+1}(0^2+1^2+\dots+n^2)\right]$$

|| J'aime moins cela mais c'est plus rapide ... l'ayant fait proprement pour BA ...

$\forall i \in [\![0, n]\!],\ \frac{1}{i+1}(0^2+1^2+\dots+i^2) = \frac{1}{i+1}\,\frac{i(i+1)(2i+1)}{6} = \frac{i(2i+1)}{6} = \frac{1}{3}i^2 + \frac{1}{6}i$

Finalement $CA = \frac{1}{3}C + \frac{1}{6}B$.

$\forall k \in \mathbb{N},\ E(X_{k+1}^2) = CU_{k+1} = CAU_k = \frac{1}{3}CU_k + \frac{1}{6}BU_k = \frac{1}{3}E(X_k^2) + \frac{1}{6}E(X_k) = \frac{1}{3}E(X_k^2) + \frac{1}{6}\frac{n}{2^k}$.

$\underline{\underline{\forall k \in \mathbb{N},\ E(X_{k+1}^2) = \frac{1}{3}E(X_k^2) + \frac{1}{6}\frac{n}{2^k}}}$.

$\forall k \in \mathbb{N},\ E(X_{k+1}^2) - \frac{n}{2^{k+1}} = \frac{1}{3}E(X_k^2) + \frac{1}{6}\frac{n}{2^k} - \frac{1}{2}\frac{n}{2^k} = \frac{1}{3}\left(E(X_k^2) - \frac{n}{2^k}\right)$.

$\left(E(X_k^2) - \frac{n}{2^k}\right)_{k\geq 0}$ est géométrique de raison $1/3$.

$\forall k \in \mathbb{N},\ E(X_k^2) - \frac{n}{2^k} = \left(\frac{1}{3}\right)^k\left(E(X_0^2) - \frac{n}{2^0}\right)$; or $E(X_0^2) = n^2$;

$\underline{\underline{\forall k \in \mathbb{N},\ E(X_k^2) = \frac{n}{2^k} + \left(\frac{1}{3}\right)^k n(n-1)}}$.

$\forall k \in \mathbb{N},\ V(X_k) = E(X_k^2) - (E(X_k))^2 = \frac{n}{2^k} + \frac{1}{3^k}n(n-1) - \left(\frac{n}{2^k}\right)^2$

$\underline{\underline{\forall k \in \mathbb{N},\ V(X_k) = \frac{1}{3^k}n(n-1) + \frac{n}{2^k} - \frac{n^2}{2^{2k}}}}$.

(Q3) les fonctions génératrices !

Soit $k \in \mathbb{N}$. $G_k = \sum_{p=0}^{n} P_k(p)X^p$.

La matrice des coordonnées de G_k dans $\mathcal{B} = (1, X, \dots, X^n)$ est U_k.

Comme $U_{k+1} = AU_k$, cela signifie que $G_{k+1} = f(G_k)$

Une récurrence simple donne alors : $\forall k \in \mathbb{N},\ G_k = \int^k (G_0)$.

Or $G_0 = \sum_{p=0}^{n} P_0(p) X^p = X^n$. Donc $\underline{\underline{\forall k \in \mathbb{N},\ G_k = \int^k (X^n)}}$.

Soit $(k,p) \in \mathbb{N} \times [\![0,n]\!]$

La composante de G_k sur X^p est $P_k(p)$; c'est aussi d'après I Q5 : $C_n^p \sum_{j=0}^{n-p} (-1)^j C_{n-p}^j \frac{1}{(p+j+1)^k}$

Donc $\underline{\underline{\forall k \in \mathbb{N},\ \forall p \in [\![0,n]\!],\ P_k(p) = P(X_k = p) = C_n^p \sum_{j=0}^{n-p} (-1)^j C_{n-p}^j \frac{1}{(p+j+1)^k}}}$. BEAU, NON ?

(Q4) $\underline{a)}$ Soit $p \in [\![1,n]\!]$. Pour montrer que la série de terme général $P_k(p)$ est convergente il suffit de prouver que pour tout $j \in [\![0,n-p]\!]$ la série de terme général $\frac{1}{(p+j+1)^k}$ converge (C_n^p, $(-1)^j C_{n-p}^j$ sont des constantes" par rapport à k")

Or si $p \in [\![\underline{1},n]\!]$ et $j \in [\![0,n-p]\!]$, $\left|\frac{1}{p+j+1}\right| < 1$; donc la série de terme général $\frac{1}{(p+j+1)^k}$ converge.

Finalement si $p \in [\![1,n]\!]$, la série de terme général $P_k(p)$ converge

Examinons le cas où $p=0$

$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ P_k(0) = C_n^0 \sum_{j=0}^{n-0} (-1)^j C_{n-0}^j \frac{1}{(j+1)^k} = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j C_n^j \frac{1}{(j+1)^k} = 1 + \sum_{j=1}^{n} (-1)^j C_n^j \frac{1}{(j+1)^k}$

Notons que si $j \in [\![1,n]\!]$, $\lim_{k \to +\infty} \frac{1}{(j+1)^k} = 0$; donc $\lim_{k \to +\infty} P_k(0) = 1$ (encore une surprise !)

$\underline{\underline{\text{La série de terme général } P_k(0) \text{ diverge}}}$ ... son terme général ne tend pas vers 0.

$\underline{b)}$ Soit $p \in [\![1,n]\!]$. Soit $q \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=1}^{q} P_k(p) = \sum_{k=1}^{q} C_n^p \sum_{j=0}^{n-p} (-1)^j C_{n-p}^j \frac{1}{(p+j+1)^k} = \sum_{j=0}^{n-p} C_n^p (-1)^j C_{n-p}^j \sum_{k=1}^{q} \frac{1}{(p+j+1)^k}$$

$$= \sum_{j=0}^{n-p} C_n^p (-1)^j C_{n-p}^j \frac{1}{p+j+1} \times \frac{1 - \left(\frac{1}{p+j+1}\right)^q}{1 - \frac{1}{p+j+1}}$$

Donc $\sum_{k=1}^{+\infty} P_k(p) = \lim_{q \to +\infty} \sum_{k=1}^{q} P_k(p) = \sum_{j=0}^{n-p} C_n^p (-1)^j C_{n-p}^j \frac{1}{p+j+1} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{p+j+1}}$ $\quad C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$

$$\sum_{k=1}^{+\infty} P_k(p) = \sum_{j=0}^{n-p} C_n^p (-1)^j C_{n-p}^j \frac{1}{p+j} = C_n^p \sum_{j=0}^{n-p} (-1)^j \frac{C_{n-p}^j}{p+j} = C_n^p \frac{(n-p)!\,(p-1)!}{n!} = \frac{1}{p}$$

$\boxed{(0)}$ avec $b = n-p$ et $a = p-1$

$$\sum_{k=1}^{+\infty} P_k(p) = \frac{1}{p} \quad \text{pour tout } p \in [\![1, n]\!]. \quad (1)$$

PARTIE III

Q1 Soit $p \in [\![0, n-1]\!]$.

Soit $W_{k+1}(p)$ l'événement on obtient p pour la 1^{re} fois au rang $k+1$

$$p(W_{k+1}(p)) = \sum_{i=0}^{n} p(W_{k+1}(p) / X_k = i)\, p(X_k = i)$$

$$p(W_{k+1}(p) / X_k = i) = \begin{cases} 0 \text{ si } & i < p \quad \text{on ne peut atteindre } p \text{ au } k+1 \text{ ième tirage} \\ 0 \text{ si } & i = p \quad p \text{ est déjà atteint} \\ \frac{1}{i+1} \text{ si } & i > p \quad (\text{tirer } p \text{ dans } [\![0, i]\!]). \end{cases}$$

Donc $\underline{\underline{p(W_{k+1}(p))}} = \sum_{i=p+1}^{n} \frac{1}{i+1} p(X_k = i) = \underline{\underline{P_{k+1}(p+1)}}$ (Voir II Q 1 a))

Q2

a.. $\alpha(n, n) = \frac{1}{n+1}$, c'est exactement la probabilité pour que le 1^{er} tirage, qui se fait dans I_n, donne n.

b.. $p \in [\![0, n-1]\!]$ Notons pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, S_k l'événement le premier tirage donne k ($S_k = "X_1 = k"$)

Notons $H(p, n)$ l'événement on tire au moins une fois le nombre p lorsque les tirages se prolongent indéfiniment.

$$\alpha(p, n) = p(H(p, n)) = \sum_{k=0}^{n} p(H(p,n) / S_k)\, p(S_k) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} p(H(p,n) / S_k)$$

$$p(H(p,n) / S_k) = \begin{cases} 0 \text{ si } k < p \\ 1 \text{ si } k = p \ldots \text{ le } 1^{er} \text{ tirage a donné } p. \\ \alpha(p, k) \text{ si } k > p \quad \text{après le } 1^{er} \text{ tirage tout se passe dans } [\![0, k]\!] \text{ et il faut obtenir } p. \end{cases}$$

Donc $\alpha(p, n) = \frac{1}{n+1} \left(1 + \sum_{k=p+1}^{n} \alpha(p, k)\right)$

Finalement :

$$\underline{\underline{(n+1)\,\alpha(p, n) = 1 + \sum_{k=p+1}^{n} \alpha(p, k)}} \quad \text{pour tout } p \in [\![0, n-1]\!] \text{ ... et même pour } p = n \text{ à un abus près !}$$

En particulier : $(n+1)\alpha(n-1, n) = 1 + \alpha(n-1, n)$; soit $\underline{\underline{\alpha(n-1, n) = \frac{1}{n}}}$

c.. $p \in I_{n-2} = [\![0, n-2]\!]$

$(n+1)\alpha(p,n) = 1 + \sum_{k=p+1}^{n} \alpha(p,k)$ (relation précédente)

$n\alpha(p,n-1) = 1 + \sum_{k=p+1}^{n-1} \alpha(p,k)$ (relation précédente à l'ordre $n-1$)

Donc $(n+1)\alpha(p,n) = 1 + [n\alpha(p,n-1) - 1] + \alpha(p,n)$

soit $n\alpha(p,n) = n\alpha(p,n-1)$

d'où $\alpha(p,n) = \alpha(p,n-1)$ si $p \in [\![0,n-2]\!]$.

On a donc $\alpha(p,n) = \alpha(p,n-1)$ pour $n \geqslant p+2$ (ou $\alpha(p,n+1) = \alpha(p,n)$ pour $n \geqslant p+1$)

La suite $(\alpha(p,n))_{n \geqslant p+1}$ est constante.

Donc pour $n \geqslant p+1$: $\alpha(p,n) = \alpha(p,p+1) = \alpha((p+1)-1, p+1) = \frac{1}{p+1}$.

Ce résultat vaut encore pour $n = p$ ($\alpha(p,p) = \frac{1}{p+1}$).

Finalement pour $0 \leqslant p \leqslant n$: $\alpha(n,p) = \frac{1}{p+1}$

(Q3) Soit $p \in [\![0,n-1]\!]$

Rappelons que si $k \in \mathbb{N}^{(*)}$, $W_{k,p}$ est l'événement on obtient p pour la 1ère fois au k^{e} tirage.

$$\frac{1}{p+1} \underset{Q2}{=} \alpha(n,p) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(W_{k,p}) \underset{Q1}{=} \sum_{k=0}^{+\infty} P_{k+1}(p+1) = \sum_{k=1}^{+\infty} P_k(p+1) \; ; \; \sum_{k=1}^{+\infty} P_k(p+1) = \frac{1}{p+1} \text{ pour tout } p \in [\![0,n-1]\!]$$

Donc si $p \in [\![1,n]\!] = \mathcal{I}_n - \{0\}$, $\sum_{k=1}^{+\infty} P_k(p) = \frac{1}{p}$; c'est (3).

PARTIE IV

(Q1) Notons que d est clairement un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

Rappelons que : $\forall P \in \mathbb{R}_n[X]$, $f^{-1}(P) = (X-1)P' + P = ((X-1)P)'$

Notons aussi que : $\forall P \in \mathbb{R}_n[X]$, $P = ((X-1)f(P))'$ (faire $P \to f(P)$ dans ↑)

$\forall P \in \mathbb{R}_n[X]$, $f^{-1}(d(f(P))) = (X-1)(d(f(P)))' + d(f(P)) = (X-1)(f(P))'' + (f(P))' = ((X-1)f(P))'' - (f(P))'$

$\forall P \in \mathbb{R}_n[X]$, $f^{-1}(d(f(P))) = ((X-1)f(P))'' - (f(P))' = \left[((X-1)f(P))'\right]' - (f(P))' = P' - (f(P))' = d(P) - d(f(P))$.

Finalement : $f^{-1} \circ d \circ f = d - d \circ f$ ou $d \circ f = f \circ d - f \circ d \circ f$ (en composant à gauche par f).

(Q2) Montrons par récurrence que : $\forall\, q \in \mathbb{N}^*$, $\quad f\circ d = \sum_{\ell=1}^{q} d\circ f^{\ell} + f\circ d\circ f^{q}$

→ Q1 donne l'égalité pour $q=1$ (Q1 donne $f\circ d = d\circ f + f\circ d\circ f$).

→ Supposons l'égalité vraie pour $q \in \mathbb{N}^*$ et montrons la pour $q+1$.

$f\circ d = \sum_{\ell=1}^{q} d\circ f^{\ell} + f\circ d\circ f^{q}$; composons à ... par f.

$f\circ d\circ f = \sum_{\ell=1}^{q} d\circ f^{\ell+1} + f\circ d\circ f^{q+1} = \sum_{\ell=2}^{q+1} d\circ f^{\ell} + f\circ d\circ f^{q+1}$

Or $f\circ d\circ f = f\circ d - d\circ f$ (Q1)

Donc $f\circ d = d\circ f + f\circ d\circ f = d\circ f + \sum_{\ell=2}^{q+1} d\circ f^{\ell} + f\circ d\circ f^{q+1} = \sum_{\ell=1}^{q+1} d\circ f^{\ell} + f\circ d\circ f^{q+1}$

ceci achève la récurrence.

$\underline{\underline{\forall q \in \mathbb{N}^*,\ f\circ d = \sum_{\ell=1}^{q} d\circ f^{\ell} + f\circ d\circ f^{q}}}$

(Q3) $(f\circ d)(X^n) \underset{\substack{\uparrow\\ \text{facile}}}{=} (n)\, f(X^{n-1}) = n \times \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} X^{k} = \sum_{\ell=0}^{n-1} X^{\ell}$

$(X-1)(f\circ d)(X^n) = (X-1) \sum_{\ell=0}^{n-1} X^{\ell} = X^n - 1$

Donc $X^n = 1 + (X-1)(f\circ d)(X^n) \overset{Q2}{=} 1 + (X-1)\left[\sum_{\ell=1}^{q} d(f^{\ell}(X^n)) + (f\circ d\circ f^{q})(X^n)\right]$.

Or $\forall \ell \in \mathbb{N}$, $G_\ell = f^{\ell}(X^n)$ (voir II Q3)

Donc $X^n = 1 + (X-1)\left[\sum_{\ell=1}^{q} G'_\ell + f(G'_q)\right] = (X-1)\sum_{\ell=1}^{q} G'_\ell + (X-1) f(G'_q) + 1$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $(x-1) f(G'_q)(x) + 1 = \int_1^x G'_q(u)\,du + 1 = G_q(x) - G_q(1) + 1 = G_q(x)$ $\quad \left(G_q(1) = \sum_{p=0}^{n} P(Y_q = p) = 1\right)$

Donc $\underline{\underline{X^n = (X-1)\sum_{\ell=1}^{q} G'_\ell + G_q \text{ pour tout } q \in \mathbb{N}^*}}$ $\quad (4)$

(Q4) Soit $q \in \mathbb{N}^*$

$\sum_{\ell=1}^{q} G_\ell = \sum_{\ell=1}^{q} \sum_{p=0}^{n} P_\ell(p) X^p = \sum_{p=0}^{n} X^p \left(\sum_{k=1}^{q} P_k(p)\right)$

$\sum_{\ell=1}^{q} G'_\ell = \sum_{p=1}^{n} p X^{p-1} \left(\sum_{\ell=1}^{q} P_\ell(p)\right)$

Donc $X^n = \sum_{p=1}^{n} p(X-1) X^{p-1} \left(\sum_{\ell=1}^{q} P_\ell(p)\right) + \sum_{p=0}^{n} P_q(p) X^p$ (en utilisant (4))

Ceci donne :

$$X^n = \sum_{p=1}^{n} p X^p \Big(\sum_{k=1}^{q} P_k(p)\Big) - \sum_{p=1}^{n} p X^{p-1}\Big(\sum_{k=1}^{q} P_k(p)\Big) + \sum_{p=0}^{n} P_q(p) X^p$$

$$X^n = \sum_{p=1}^{n} p X^p \Big(\sum_{k=1}^{q} P_k(p)\Big) - \sum_{p=0}^{n-1} (p+1) X^p \sum_{k=1}^{q} P_k(p+1) + \sum_{p=0}^{n} P_q(p) X^p$$

En identifiant :

coeff de X^n : $\quad 1 = n \sum_{k=1}^{q} P_k(n) + P_q(n)$

coeff de X^p : $\quad 0 = p \sum_{k=1}^{q} P_k(p) - (p+1) \sum_{k=1}^{q} P_k(p+1) + P_q(p) \quad$ pour $p \in [\![1, n-1]\!]$.

coeff cst : $\quad 0 = -\sum_{k=1}^{q} P_k(1) + P_q(0)$

En fait :

$$(R)\quad\begin{cases} \displaystyle\sum_{k=1}^{q} P_k(n) = \frac{1}{n}(1 - P_q(n)) = \frac{1}{n}(1 - p(X_q = n)) & \text{"}R_1\text{"} \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{q} P_k(1) = P_q(0) = p(X_q = 0) & \text{"}R_2\text{"} \\ \displaystyle p\sum_{k=1}^{q} P_k(p) - (p+1)\sum_{k=1}^{q} P_k(p+1) = -p(X_q = p) \quad \text{pour } p \in [\![1, n-1]\!] & \text{"}R_3\text{"} \end{cases}$$

Nous avons vu que pour tout $p \in [\![1, n]\!]$, la série de terme général $P_k(p)$ était convergente ; en particulier $\lim_{k \to +\infty} P_k(p) = 0$ pour tout $p \in [\![1, n]\!]$, soit $\lim_{k \to +\infty} p(X_k = p) = 0$

Pour tout $p \in [\![1, n]\!]$ notons x_p la somme de la série de terme général $P_k(p)$ et passons à la limite dans ces égalités précédentes. Il vient :

$a_n = \frac{1}{n}$; $p a_p - (p+1) a_{p+1} = 0$ pour tout $p \in [\![1, n-1]\!]$.

La suite $(p a_p)_{p \in [\![1, n]\!]}$ est donc constante ; comme $n a_n = 1$:

$\forall p \in [\![1, n]\!]$, $p a_p = 1$ ou $\forall p \in [\![1, n]\!]$, $a_p = \frac{1}{p}$.

Finalement : $\forall p \in [\![1, n]\!]$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} P_k(p) = \frac{1}{p}$

<u>Exercice de contrôle</u>.. Retrouver la convergence de la série de terme général $P_k(p)$ en utilisant les relations (R) (on pourra faire une récurrence descendante et majorer les sommes partielles) et ceci pour tout $p \in [\![1, n]\!]$.

Coucou c'est encore moi, je n'arrive pas à vous quitter alors je me colle à l'exercice de contrôle.

Montrons par récurrence que pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$, la série de terme général $p_k(n-i)$ converge et a pour somme $\frac{1}{n-i}$ (c'est la récurrence descendante)

→ Pour $i=0$. $\forall q \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^{q} p_k(n) = \frac{1}{n}(1 - p(X_q = n)) \leq \frac{1}{n} \leq 1$!

$\left(\sum_{k=1}^{q} p_k(n)\right)_{q \geq 1}$ est donc une suite croissante et majorée, elle converge, la série de terme général $p_k(n)$ converge ! $\Sigma\ p_k(n) \geq 0 ...$

En particulier son terme général tend vers 0, donc $\lim_{q \to +\infty} p(X_q = n) = \lim_{q \to +\infty} p_q(n) = 0$.

Comme $\forall q \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^{q} p_k(n) = \frac{1}{n}(1 - p(X_q = n))$; à la limite (... sur q) : $\sum_{k=1}^{+\infty} p_k(n) = \frac{1}{n}$

ce qui achève de prouver la propriété pour $i = 0$.

→ Supposons la propriété vraie pour $i \in [\![0, n-2]\!]$ et montrons la pour $i+1$

(H) $\sum_{k=1}^{+\infty} p_k(n-i) = \frac{1}{n-i}$ (C) $\sum_{k=1}^{+\infty} p_k(n-i-1) = \frac{1}{n-i-1}$ (... au chômé)

$0 \leq i \leq n-2$; $2 \leq n-i \leq n$; $1 \leq n-i-1 \leq n-1$, d'après "R_3" nous avons alors :

$(n-i-1) \sum_{k=1}^{q} p_k(n-i-1) = (n-i) \sum_{k=1}^{q} p_k(n-i) - p(X_q = n-i-1)$ pour tout $q \in \mathbb{N}^*$

$\left(\sum_{k=1}^{q} p_k(n-i)\right)_{q \geq 1}$ est croissante et converge vers $\frac{1}{n-i}$ (H.R.)

Donc $(n-i-1) \sum_{k=1}^{q} p_k(n-i-1) \leq (n-i) \frac{1}{n-i} - p(X_q = n-i-1) \leq 1$!

Donc $\sum_{k=1}^{q} p_k(n-i-1) \leq 1/(n-i-1)$; $\left(\sum_{k=1}^{q} p_k(n-i-1)\right)_{q \geq 1}$ est donc croissante et majorée ; cette suite converge. Ceci signifie que la série de terme général $p_k(n-i-1)$ converge. Ne reste plus à montrer que sa somme vaut $\frac{1}{n-i-1}$; remarquons que son terme général tend vers 0

donc $\lim_{q \to +\infty} p(X_q = n-i-1) = \lim_{q \to +\infty} p_q(n-i-1) = 0$

Rappelons que : $\forall q \in \mathbb{N}^*$, $(n-i-1) \sum_{k=1}^{q} p_k(n-i-1) = (n-i) \sum_{k=1}^{q} p_k(n-i) - p(X_q = n-i-1)$

A la limite : $(n-i-1) \sum_{k=1}^{+\infty} p_k(n-i-1) = (n-i) \sum_{k=1}^{+\infty} p_k(n-i) - 0 = (n-i) \times \frac{1}{n-i} = 1$

Donc $\sum_{k=1}^{+\infty} p_k(n-i-1) = \frac{1}{n-i-1}$ ... ce qui achève cette belle récurrence

J'allais oublier que "R_2" redonne $\lim_{q \to +\infty} p_q(0) = \sum_{k=1}^{+\infty} p_k(1) = \frac{1}{1} = 1$ soit $\lim_{q \to +\infty} p(X_q = 0) = 1$.