PRELIMINAIRE

Soit $n\in\mathbb{N}^*$. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\,p(X=k) = \sum_{k=1}^{n} k\big(p(X>k-1)-p(X>k)\big) = \underbrace{\sum_{k=1}^{n} k\,p(X>k-1)}_{k\to k+1} - \sum_{k=1}^{n} k\,p(X>k)$

donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\,p(X=k) = \sum_{k=0}^{n-1}(k+1)p(X>k) - \sum_{k=1 \text{ ou } 0}^{n} k\,p(X>k) = \sum_{k=0}^{n-1}[(k+1)-k]\,p(X>k) - n\,p(X>n)$

Finalement : $$\sum_{k=1}^{n} k\,p(X=k) = \sum_{k=0}^{n-1} p(X>k) - n\,p(X>n)$$

Remarque.. Ce résultat est la base de la démonstration de :

$E(X)$ existe $\Leftrightarrow$ la série de terme général $p(X>n)$ converge (en cas d'existence rappelons que : $E(X)=\sum_{k=0}^{+\infty} p(X>k)$)

PARTIE I   C'est cette partie que j'ai refaite

Q1 $(p,s)\in\mathbb{N}^{*2}$. Pour construire une suite strictement croissante de p éléments de $[\![1,s]\!]$

1 → on choisit p éléments de $[\![1,s]\!]$

2 → on les ordonne dans l'ordre croissant

1er Cas.. Si $p>s$: card $\mathcal{S}_s=0$!

2ème Cas.. Supposons $p\le s$. Il y a C_s^p manières de choisir p éléments de $[\![1,s]\!]$ et une seule manière de les ordonner dans l'ordre croissant

Il y a donc C_s^p suites strictement croissantes de p éléments de $[\![1,s]\!]$.

Donc si $p\le s$: card $\mathcal{S}_s=C_s^p$.

Q2 * Soit $(c_1,c_2,\dots,c_p)\in\mathcal{C}_q$. $(c_1,c_2,\dots,c_p)\in\mathbb{N}^p$ et $1\le c_1\le c_2\le\dots\le c_p\le q$.

Posons $(d_1,d_2,\dots,d_p)=\phi((c_1,c_2,\dots,c_p))=(c_1,c_2+1,c_3+2,\dots,c_p+p-1)$.

Montrons que : $(d_1,d_2,\dots,d_p)\in\mathcal{S}_{p+q-1}$. Notons que : $\forall i\in[\![1,p]\!]$, $d_i=c_i+i-1$.

- Clairement : $(d_1,d_2,\dots,d_p)\in\mathbb{N}^p$.
- $\forall i\in[\![1,p-1]\!]$, $d_{i+1}-d_i = c_{i+1}+(i+1-1)-[c_i+(i-1)] = c_{i+1}-c_i+1 \underset{c_{i+1}\ge c_i}{\ge} 1>0$!

donc $d_1<d_2<d_3<\dots<d_p$. Or $d_1=c_1\ge 1$ et $d_p=c_p+p-1\underset{c_p\le q}{\le} q+p-1=p+q-1$

donc $1\le d_1<d_2<\dots<d_p\le p+q-1$ et : $(d_1,d_2,\dots,d_p)\in\mathcal{S}_{p+q-1}$

Ceci achève de prouver que $\phi((c_1,c_2,\dots,c_p)) \in \mathcal{S}_{p+q-1}$ si $(c_1,c_2,\dots,c_p)\in \mathcal{C}_q$.

<u>ϕ est une application de $\mathcal{C}_q$ dans $\mathcal{S}_{p+q-1}$.</u>

Montrons que ϕ est bijective c'est-à-dire que tout élément de $\mathcal{S}_{p+q-1}$ admet un antécédent et un seul par ϕ dans $\mathcal{C}_q$.

Soit $(d_1,d_2,\dots,d_p)\in \mathcal{S}_{p+q-1}$. Montrons que : $\underline{\exists!\,(c_1,c_2,\dots,c_p)\in \mathcal{C}_q,\ \phi((c_1,c_2,\dots,c_p))=(d_1,d_2,\dots,d_p)}$

<u>Analyse / Unicité / Injectivité</u> !

Supposons que : $(c_1,c_2,\dots,c_p)\in\mathcal{C}_q$ et $\phi((c_1,c_2,\dots,c_p))=(d_1,d_2,\dots,d_p)$.

Alors $(c_1,c_2+1,\dots,c_p+p-1)=(d_1,d_2,\dots,d_p)$. $\forall i\in[\![1,p]\!],\ c_i+i-1=d_i$

$\underline{\underline{\forall i\in[\![1,p]\!],\ c_i=d_i+1-i}}$

Donc $(c_1,c_2,\dots,c_p)=(d_1,d_2+1-2,d_3+1-3,\dots,d_p+1-p)$

d'où l'unicité de $(c_1,c_2,\dots,c_p)$ élément de $\mathcal{C}_q$ tel que $\phi((c_1,c_2,\dots,c_p))=(d_1,d_2,\dots,d_p)$

(d'où l'injectivité de ϕ).

<u>Synthèse / Existence / Surjectivité</u>.

Soit $(d_1,d_2,\dots,d_p)\in\mathcal{S}_{p+q-1}$. $1\leq d_1<d_2<\dots<d_p\leq p+q-1$ et $\forall i\in[\![1,p]\!],\ d_i\in\mathbb{N}$.

<u>Posons</u> $(c_1,c_2,\dots,c_p)=(d_1,d_2+1-2,d_3+1-3,\dots,d_p+1-p)$ c'est-à-dire que :

$\forall i\in[\![1,p]\!],\ c_i=d_i+1-i$

Montrons alors que : $(c_1,c_2,\dots,c_p)\in\mathcal{C}_q$ et $\phi((c_1,c_2,\dots,c_p))=(d_1,d_2,\dots,d_p)$.

$\forall i\in[\![1,p-1]\!],\ c_{i+1}-c_i=d_{i+1}+1-i-1-d_i-1+i=d_{i+1}-d_i-1$

Or $\forall i\in[\![1,p-1]\!],\ d_{i+1}-d_i>0$; mieux $\forall i\in[\![1,p-1]\!],\ d_{i+1}-d_i\geq 1$ ($d_{i+1}-d_i$ est un entier)

Donc $\forall i\in[\![1,p-1]\!],\ c_{i+1}-c_i=d_{i+1}-d_i-1\geq 0$; $\forall i\in[\![1,p-1]\!],\ c_{i+1}\geq c_i$.

Par conséquent : $1\leq d_1=c_1\leq c_2\leq\dots\leq c_p=d_p+1-p\leq p+q-1+1-p=q$;

$1\leq c_1\leq c_2\leq\dots\leq c_p\leq q$; de plus $c_1,c_2,\dots,c_p$ sont des entiers (car les d_i le sont)

Donc $(c_1,c_2,\dots,c_p)\in\mathbb{N}^p$ et $1\leq c_1\leq c_2\leq\dots\leq c_p\leq q$. $(c_1,c_2,\dots,c_p)\in\mathcal{C}_q$.

De plus : $\phi((c_1,c_2,\dots,c_p))=(c_1,c_2+1,\dots,c_p+p-1)=(d_1,d_2+1-2+1,d_3+1-3+2,\dots,d_p+1-p+p-1)$

$\phi((c_1,c_2,\dots,c_p))=(d_1,d_2,d_3,\dots,d_p)$

$(c_1,c_2,\dots,c_p)$ est un antécédent de $(d_1,d_2,\dots,d_p)$ par ϕ dans $\mathcal{C}_q$ ... fin de la synthèse.

Ceci achève de prouver que ϕ est bijective.

$\mathcal{E}_q$ et $\mathcal{D}_{p+q-1}$ sont alors équipotents. $\text{card}\, \mathcal{E}_q = \text{card}\, \mathcal{D}_{p+q-1} \underset{\uparrow}{=} C_{p+q-1}^{p}$

$p+q-1 \geq p$ et Q1

Donc $\underline{\text{card}\, \mathcal{E}_q = C_{p+q-1}^{p}}$.

Remarques 1. Ceci est à mettre en relation avec $\Gamma_q^p = \text{card}\, \{(t_1,t_2,\dots,t_q)\in\mathbb{N}^q \mid t_1+t_2+\dots+t_q = p\}$

2. C_{p+q-1}^{p} est aussi le nombre d'applications croissantes de $[\![1,p]\!]$ dans $[\![1,q]\!]$.

à méditer

PARTIE II — Tirages SANS remise.

(Q1) L'univers Ω est l'ensemble des N listes sans répétition de l'ensemble $[\![1,N]\!]$.

Donc $\underline{\text{card}\, \Omega = N!}$

Soit $n \in [\![0,N-1]\!]$.

Si $n=0$: $p(X_N > n) = p(X_N > 0) = 1 = \dfrac{1}{(0+1)!}$. Supposons $n \geq 1$.

tirages sans remise !!

$\underline{\{X_N > n\}}$ est réalisé si et seulement si les $n+1$ premiers tirages donnent une suite strictement croissante ; les $N-(n+1)$ tirages suivants étant constitués avec les $N-(n+1)$ numéros non encore sortis.

Par conséquent : $p(X_N > n) = \dfrac{1}{N!}\, C_N^{n+1}\, (N-(n+1))!$

nombre de suites strictement croissantes de $n+1$ éléments de $[\![1,N]\!]$

nb. de choix des $N-(n+1)$ jetons sortant aux $N-(n+1)$ derniers tirages.

Donc $p(X_N > n) = \dfrac{1}{N!}\, \dfrac{N!}{(n+1)!\,(N-n-1)!} \times (N-n-1)! = \dfrac{1}{(n+1)!}$

Finalement : $\forall n \in [\![0,N-1]\!]$, $p(X_N > n) = \dfrac{1}{(n+1)!}$

Notons que : $\underline{p(X_N > N) = 0}$ (X_N prend ses valeurs dans $[\![1,N]\!]$).

Bien évidemment : $\underline{\forall n \in [\![N+1,+\infty[\![,\ p(X_N > n) = 0.}$

(Q2). $X_N(\Omega) = [\![1,N]\!]$.

Soit $k \in [\![1,N]\!]$. $p(X_N = k) = p(X_N > k-1) - p(X_N > k)$

Notons que $k-1 \in [\![0,N-1]\!]$. Donc $p(X_N = k) = \dfrac{1}{(k-1+1)!} - p(X_N > k)$.

Distinguons alors deux cas :

Si $k \neq N$: $p(X_N > k) = \dfrac{1}{(k+1)!}$ et si $k = N$: $p(X_N > k) = 0$.

[illegible], pour $k \neq N$: $p(X_N=k) = \dfrac{1}{(k-1+1)!} - \dfrac{1}{(k+1)!} = \dfrac{1}{k!} - \dfrac{1}{(k+1)!} = \dfrac{k+1-1}{(k+1)!} = \dfrac{k}{(k+1)!}$;

pour $k = N$: $p(X_N=k) = \dfrac{1}{(k-1+1)!} - 0 = \dfrac{1}{k!} = \dfrac{1}{N!}$

Finalement : $\underline{\underline{\forall k \in [\![1, N-1]\!],\ p(X_N=k) = \dfrac{k}{(k+1)!} \text{ et } p(X_N=N) = \dfrac{1}{N!}.}}$

$$E(X_N) = \sum_{k=1}^{N} k\, p(X_N=k) \underset{\text{préliminaire.}}{=} \sum_{k=0}^{N-1} p(X_N > k) - N\, p(X_N > N) = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{(k+1)!} - N \times 0$$

$$\underline{\underline{E(X_N) = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{(k+1)!} = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k!}.}}$$

Q3 $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} = e$; $\displaystyle e - 1 = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k!} = \lim_{N \to +\infty} \left(\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k!} \right) = \lim_{N \to +\infty} E(X_N).$

$$\underline{\underline{\lim_{N \to +\infty} E(X_N) = e - 1}}$$

Q4 Soit $k \in \mathbb{N}^*$

la suite $(p(X_N=k))_{N \geq 3}$ est constante à partir d'un certain rang !

$\forall N \in [\![3, +\infty[\![\cap [\![k+1, +\infty[\![$: $p(X_N=k) = \dfrac{k}{(k+1)!}$; $\displaystyle\lim_{N \to +\infty} p(X_N=k) = \frac{k}{(k+1)!}.$

$$\underline{\underline{\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \lim_{N \to +\infty} p(X_N=k) = \frac{k}{(k+1)!}.}}$$

Pour montrer qu'il existe une variable aléatoire X, à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telle que : $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ p(X=k) = \displaystyle\lim_{N \to +\infty} p(X_N=k)$ il suffit de prouver que :

$g : \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$, $k \mapsto \dfrac{k}{(k+1)!}$ est une loi de probabilité ; c'est à dire que :

- $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ g(k) \in [0, 1]$.
- $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} g(k) = 1$

Le premier point est clair, montrons le second.

$$\forall p \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=1}^{p} g(k) = \sum_{k=1}^{p} \frac{k}{(k+1)!} = \sum_{k=1}^{p} \left(\frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!} \right) = 1 - \frac{1}{(p+1)!}$$

donc $\lim\limits_{p\to+\infty}\sum\limits_{\ell=1}^{p} g(\ell) = \lim\limits_{p\to+\infty}\left(1-\frac{1}{(p+1)!}\right)=1$; $\sum\limits_{\ell=1}^{+\infty} g(\ell)=1$

g est une loi de probabilité.

Soit X une var de loi g.

X prend ses valeurs dans $\mathbb{N}^*$ et $\forall \ell\in\mathbb{N}^*$, $p(X=\ell)=\frac{\ell}{(\ell+1)!}=\lim\limits_{N\to+\infty} p(X_N=\ell)$

<u>Remarque</u> - $(X_N)_{N\geq 3}$ converge en loi vers X.

Soit $\ell\in\mathbb{N}^*$. $\ell\, p(X=\ell)\geq 0$ et $\ell\, p(X=\ell)=\frac{\ell^2}{(\ell+1)!}=\frac{\ell(\ell+1)-(\ell+1)+1}{(\ell+1)!}=\frac{1}{(\ell-1)!}-\frac{1}{\ell!}+\frac{1}{(\ell+1)!}$

La série de terme général $\ell\, p(X=\ell)$ est alors convergente, et donc absolument convergente (car à termes positifs) comme combinaison linéaire de trois séries convergentes.

donc 1 → E(X) existe

2 → $E(X)=\sum\limits_{\ell=1}^{+\infty}\frac{1}{(\ell-1)!}-\sum\limits_{\ell=1}^{+\infty}\frac{1}{\ell!}+\sum\limits_{\ell=1}^{+\infty}\frac{1}{(\ell+1)!}=\sum\limits_{\ell=0}^{+\infty}\frac{1}{\ell!}-\sum\limits_{\ell=1}^{+\infty}\frac{1}{\ell!}+\sum\limits_{\ell=2}^{+\infty}\frac{1}{\ell!}$

$E(X)=e-(e-1)+(e-1-1)=e-1$

$E(X)=e-1=\lim\limits_{N\to+\infty}E(X_N)$! Le soufflé retombe très vite ! OK ! Voir l'algorithmique à la fin.

PARTIE III — Désormais les tirages se font <u>avec</u> remise.

(Q1) Soit $n\in\mathbb{N}$ et $n\geq 2$.

$\mathrm{card}\{(\bar u_1,\bar u_2,\dots,\bar u_n)\in[\![1,N]\!]^n \mid \bar u_1\leq\bar u_2\leq\dots\leq\bar u_n\}=\mathrm{card}\{(\bar u_1,\bar u_2,\dots,\bar u_n)\in\mathbb{N}^n\mid 1\leq\bar u_1\leq\bar u_2\leq\dots\leq\bar u_n\leq N\}$

donc $\mathrm{card}\{(\bar u_1,\bar u_2,\dots,\bar u_n)\in[\![1,N]\!]^n\mid\bar u_1\leq\bar u_2\leq\dots\leq\bar u_n\}=C_{n+N-1}^{n}$ ← Q I Q 2

← $\bar u_i$: valeurs u_i ; dans le texte sont sans doute des var...

Notons encore qu'il y a N^n manières de faire n tirages avec remise.

Par conséquent : $v_n=p(u_1\leq u_2\leq\dots\leq u_n)=\frac{C_{n+N-1}^{n}}{N^n}$

Dans la suite nous posons $v_1=1=\dots=C_{1+N-1}^{1}/N^1$!

donc $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $v_n=\frac{C_{n+N-1}^{n}}{N^n}$.

(Q2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$

$$C^n_{N+n-1} = C^{N-1}_{N+n-1} = \frac{(N+n-1)(N+n-2)\dots(N+n-1-(N-1)+1)}{(N-1)!} = \frac{1}{(N-1)!}\prod_{k=1}^{N-1}(N+n-k)$$

Or $\forall k \in [\![1, N-1]\!]$, $\quad N+n-k \underset{n\to+\infty}{\sim} n \quad ; \quad C^n_{N+n-1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^{N-1}}{(N-1)!}$

Donc les suites $\left(C^n_{N+n-1}\right)_{n\geq 1}$ et $\left(\frac{n^{N-1}}{(N-1)!}\right)_{n\geq 1}$ sont équivalentes.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$

$$v_n = C^n_{n+N-1}/N^n \sim \frac{1}{(N-1)!}\,\frac{n^{N-1}}{N^n}$$

$$\lim_{n\to+\infty}(n^3 v_n) = \lim_{n\to+\infty}\left[\frac{1}{(N-1)!}\,\frac{n^{N+2}}{N^n}\right] = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{(N-1)!}\,e^{(N+2)\ln n - n\ln N} = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{(N-1)!}\,e^{n\left[(N+2)\frac{\ln n}{n} - \ln N\right]} = 0$$

$$\begin{cases} -\ln N < 0 \\ \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\ln n}{n} = 0 \end{cases}$$

$\exists p \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq p \Rightarrow n^3 v_n \leq 1$

$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq p \Rightarrow 0 \leq v_n \leq \frac{1}{n^3}$ et... $\quad 0 \leq n v_n \leq \frac{1}{n^2}$!

La série de terme général $\frac{1}{n^3}$ (resp. $\frac{1}{n^2}$) étant convergente, les règles de comparaison des séries à termes positifs montrent que la série de terme général v_n (resp. $n v_n$) converge.

cl.. la série de terme général v_n (resp. $n v_n$) converge.

$\forall p \in \mathbb{N}^* - \{1\}$, $\quad \sum_{n=1}^{p-1} w_n = \sum_{n=1}^{p-1}(v_n - v_{n+1}) = v_1 - v_p = 1 - v_p$

$\lim\limits_{p\to+\infty} v_p = 0$ car la série de terme général v_n converge ; donc $\lim\limits_{p\to+\infty}\sum_{n=1}^{p-1} w_n = 1$

cl.. la série de terme général $w_n = v_n - v_{n+1}$ converge et : $\sum_{n=1}^{+\infty} w_n = 1$.

(Q3) Soit $r \in \mathbb{N}^*$.

Notons A'_r l'événement : r est le plus petit entier tel que $u_r > u_{r+1}$

$A'_r = \{u_1 \leq u_2 \leq \dots \leq u_r\} \setminus \{u_1 \leq u_2 \leq \dots \leq u_r \leq u_{r+1}\}$

Comme $\{u_1 \leq u_2 \leq \dots \leq u_r \leq u_{r+1}\} \subset \{u_1 \leq u_2 \leq \dots \leq u_r\}$: $p(A'_r) = p(u_1 \leq u_2 \leq \dots \leq u_r) - p(u_1 \leq u_2 \leq \dots \leq u_r \leq u_{r+1})$

$\forall r \in \mathbb{N}^*,\ p(A'_r) = v_r - v_{r+1} = \omega_r$.

En particulier : $p(\bigcup_{r=1}^{+\infty} A'_r) \underset{\uparrow}{=} \sum_{r=1}^{+\infty} p(A'_r) = \sum_{r=1}^{+\infty} \omega_r = 1$.

évènements 2 à 2 disjoints

$\bigcup_{r=1}^{+\infty} A'_r$ est donc un évènement quasi-certain ; il est donc quasi-certain d'avoir l'existence d'un plus petit r tel que $u_r > u_{r+1}$ (ou il est quasi-impossible d'avoir une suite croissante, au sens large, de résultats). Ceci autorise alors à parler de la variable aléatoire Z_N donnant le plus petit $r \in \mathbb{N}^*$ tel que : $u_r > u_{r+1}$.

Notons que : $\underline{\underline{\forall r \in \mathbb{N}^*,\ p(Z_N = r) = p(A'_r) = \omega_r = v_r - v_{r+1}}}$

Soit $m \in \mathbb{N}^*$

le préliminaire donne : $\sum_{n=1}^{m} n\, p(Z_N = n) = \sum_{n=0}^{m-1} p(Z_N > n) - m\, p(Z_N > m)$

$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ p(Z_N > n) = p(u_1 \leq u_2 \leq \cdots \leq u_{n+1}) = v_{n+1}$

$p(Z_N > 0) = 1 = v_1 = v_{0+1}$

donc $\forall n \in \mathbb{N},\ p(Z_N > n) = v_{n+1}$.

Par conséquent : $\sum_{n=1}^{m} n\, p(Z_N = n) = \sum_{n=0}^{m-1} v_{n+1} - m\, v_{m+1} = \sum_{n=1}^{m} v_n - m\, v_{m+1}$

$\underline{\underline{\forall m \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{n=1}^{m} n\, p(Z_N = n) = \sum_{n=1}^{m} v_n - m\, v_{m+1}}}$.

Rappelons que la série de terme général $n v_n$ converge, donc $\lim_{n \to +\infty} (n v_n) = 0$ ou $\lim_{n \to +\infty} [(n+1) v_{n+1}] = 0$.

Par conséquent : $\lim_{m \to +\infty} m\, v_{m+1} = \lim_{m \to +\infty} \left[\frac{m}{m+1} \times (m+1) v_{m+1} \right] = 1 \times 0 = 0$.

La série de terme général v_n étant convergente il vient alors :

$\lim_{m \to +\infty} \sum_{n=1}^{m} n\, p(Z_N = n) = \sum_{n=1}^{+\infty} v_n$. Ceci prouve que la série de terme général $n\, p(Z_N = n)$ est convergente, et donc absolument convergente (car à termes positifs) et de somme : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$

Finalement $\underline{\underline{E(Z_N) \text{ existe et vaut } \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} v_n .}}$

(Q4) a) Montrons par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, f est n fois dérivable sur I ET que : $\forall x \in I,\ f^{(n)}(x) = (-1)^n\, n!\, C_{N+n-1}^{n} \dfrac{1}{(1+x)^{N+n}}$

- C'est clair pour $n=0$.
- Supposons la propriété vraie pour $n \in \mathbb{N}$ et montrons la pour $n+1$.

$f^{(n)}$ est une fonction rationnelle sur I ; $f^{(n)}$ est donc dérivable sur I ; f est donc $n+1$ fois dérivable sur I.

$\forall x \in I,\ f^{(n)}(x) = (-1)^n n!\, C_{N+n-1}^{n} (1+x)^{-N-n}$. $\forall x \in I,\ f^{(n+1)}(x) = (-1)^n n!\, C_{N+n-1}^{n} (-N-n)(1+x)^{-N-n-1}$

donc $\forall x \in I,\ f^{(n+1)}(x) = (-1)^{n+1}(n+1)!\ \underbrace{\dfrac{N+n}{n+1} C_{N+n-1}^{n}}_{C_{N+n}^{n+1} = C_{N+(n+1)-1}^{n+1}} \dfrac{1}{(1+x)^{N+n+1}} = (-1)^{n+1}(n+1)!\ C_{N+(n+1)-1}^{n+1} \dfrac{1}{(1+x)^{N+n+1}}$

$\underline{\text{ceci achève la récurrence.}}$

CL.. f est C^∞ sur I et $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in I,\ f^{(n)}(x) = (-1)^n n!\, C_{N+n-1}^{n} \dfrac{1}{(1+x)^{N+n}}$.

$\underline{b)}$ f est C^∞ sur $[-\frac{1}{N}, 0]$. Appliquons l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre m sur $[-\frac{1}{N}, 0]$ ($m \in \mathbb{N}^*$).

$$\left| f(-\tfrac{1}{N}) - \sum_{n=0}^{m} \frac{(-\frac{1}{N}-0)^n}{n!} f^{(n)}(0) \right| \leq \frac{|-\frac{1}{N}-0|^{m+1}}{(m+1)!} \max_{t \in [-\frac{1}{N},0]} |f^{(m+1)}(t)| .$$

$f(-\frac{1}{N}) = \dfrac{1}{(1-\frac{1}{N})^N}$; $\dfrac{(-\frac{1}{N}-0)^0}{0!} f^{(0)}(0) = 1$; $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \dfrac{(-\frac{1}{N}-0)^n}{n!} f^{(n)}(0) = \dfrac{(-1)^n}{N^n n!} (-1)^n n!\, C_{N+n-1}^{n} \dfrac{1}{(1+0)^{N+n}}$;

donc $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \dfrac{(-\frac{1}{N}-0)^n}{n!} f^{(n)}(0) = \dfrac{C_{N+n-1}^{n}}{N^n} = v_n$.

$\displaystyle\max_{t \in [-\frac{1}{N},0]} |f^{(m+1)}(t)| = \max_{t \in [-\frac{1}{N},0]} \left| (-1)^{m+1} (m+1)!\, C_{N+m+1-1}^{m+1} \frac{1}{(1+t)^{N+m+1}} \right| = (m+1)!\, C_{N+m}^{m+1} \underbrace{\max_{t \in [-\frac{1}{N},0]} \frac{1}{|1+t|^{N+m+1}}}_{\frac{1}{(1-\frac{1}{N})^{N+m+1}}}$.

donc $\displaystyle\max_{t \in [-\frac{1}{N},0]} |f^{(m+1)}(t)| = (m+1)!\, C_{N+m}^{m+1} \frac{1}{(1-1/N)^{N+m+1}}$.

En remplaçant dans l'inégalité ci-dessus :

$$\left|\frac{1}{(1-\frac{1}{N})^N} - 1 - \sum_{n=1}^{m} U_n\right| \leq \frac{1}{N^{m+1}}\frac{1}{(m+1)!}(m+1)!\,C_{N+m}^{m+1}\frac{1}{(1-\frac{1}{N})^{N+m+1}} = \frac{C_{N+m+1-1}^{m+1}}{N^{m+1}}\frac{1}{(1-\frac{1}{N})^{N+m+1}}$$

donc $$\left|\frac{1}{(1-\frac{1}{N})^N} - 1 - \sum_{n=1}^{m} U_n\right| \leq \frac{U_{m+1}}{(1-\frac{1}{N})^{N+m+1}}.$$

En notant que : $\lim\limits_{m\to+\infty} \dfrac{U_{m+1}}{(1-\frac{1}{N})^{N+m+1}} \overset{*}{=} 0$ nous aurons alors :

$$\lim_{m\to+\infty}\left|\frac{1}{(1-\frac{1}{N})^N} - 1 - \sum_{n=1}^{m} U_n\right| = 0 \quad \text{ou :} \quad \lim_{m\to+\infty}\sum_{n=1}^{m} U_n = \frac{1}{(1-\frac{1}{N})^N} - 1$$

ce qui donnera : $E(Z_N) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} U_n = \dfrac{1}{(1-\frac{1}{N})^N} - 1$. Ne reste plus qu'à montrer *

$$\frac{U_{m+1}}{(1-\frac{1}{N})^{N+m+1}} \sim \frac{1}{(N-1)!}\frac{(m+1)^{N-1}}{N^{m+1}} \times \left(\frac{N}{N-1}\right)^{N+m+1} = \frac{1}{(N-1)!}\left(\frac{N}{N-1}\right)^N \frac{(m+1)^{N-1}}{(N-1)^{m+1}}$$

Ne reste donc plus qu'à montrer que : $\lim\limits_{m\to+\infty} \dfrac{(m+1)^{N-1}}{(N-1)^{m+1}} = 0$

Or : $$\frac{(m+1)^{N-1}}{(N-1)^{m+1}} = e^{(N-1)\ln(m+1)-(m+1)\ln(N-1)} = e^{(m+1)\left[(N-1)\frac{\ln(m+1)}{m+1} - \ln(N-1)\right]} = 0$$

Ceci achève donc de prouver que : $\lim\limits_{m\to+\infty} \dfrac{U_{m+1}}{(1-\frac{1}{N})^{N+m+1}} = 0$.

$\begin{cases} -\ln(N-1) < 0 \text{ et} \\ \lim\limits_{m\to+\infty} \frac{\ln(m+1)}{m+1} = 0 \end{cases}$ $(N \geq 3)$.

$$\lim_{N\to+\infty} E(Z_N) = \lim_{N\to+\infty}\left[e^{-N\ln(1-\frac{1}{N})} - 1\right] = e - 1$$

$\lim\limits_{N\to+\infty}\left[-N\ln(1-\frac{1}{N})\right] = 1$ car $-N\ln(1-\frac{1}{N}) \sim -N(-\frac{1}{N}) = 1$

Donc $\lim\limits_{N\to+\infty} E(Z_N) = e - 1$.

Q5 Soit $k \in \mathbb{N}^*$

$p(Z_N = k) = v_k - v_{k+1}$.

$$v_k = \frac{C_{N+k-1}^{k}}{N^k} \underset{N\to+\infty}{\sim} \frac{(N+k-1)^k}{k!} \times \frac{1}{N^k} = \frac{1}{k!}\left(1+\frac{k-1}{N}\right)^k \underset{N\to+\infty}{\sim} \frac{1}{k!}$$

donc $\underbrace{\lim_{N\to+\infty} v_k}_{!} = \frac{1}{k!}$. $\lim_{N\to+\infty} p(Z_N = k) = \frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!} = g(k)$!

g étant une loi de probabilité (II Q4) il est alors clair que l'on peut trouver une variable aléatoire Z à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telle que :

$\forall k \in \mathbb{N}^*$, $p(Z=k) = \lim_{N\to+\infty} p(Z_N = k)$.

__Remarque__.- Pour N grand II Q4 et III Q5 montrent qu'avec remise ou sans remise c'est la même chose ! Alors on la remet, non ?! Q6 → p.14

PARTIE IV

Q1.- $k \in [\![1,N]\!]$ et $n \in \mathbb{N}^*$. $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $k < u_{i+1}$ signifie que les tirages $2,3,\dots,n+1$ ont amené un numéro strictement supérieur à k.

Si $k=N$ la probabilité correspondante est nulle.

Si $k<N$ la probabilité est $\left(\frac{N-k}{N}\right)^n$

Dans les deux cas la probabilité cherchée est $\left(\frac{N-k}{N}\right)^n$.

Notons T_1 la var égale au numéro obtenu au premier tirage (en fait $T_1 = u_1$!!)

$$p(A_n) = \sum_{k=1}^{N} p(A_n \cap T_1 = k) = \sum_{k=1}^{N} p(A_n / T_1 = k)\, p(T_1 = k) = \sum_{k=1}^{N} \left(\frac{N-k}{N}\right)^n \frac{1}{N}$$

donc $p(A_n) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \left(1 - \frac{k}{N}\right)^n$

Q2 Notons que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \left(1 - \frac{k}{N}\right)^n$!

$\forall k \in [\![1, N]\!]$, $\left|1 - \frac{k}{N}\right| < 1$. donc pour tout $k \in [\![1, N]\!]$, la série de terme général $\left(1 - \frac{k}{N}\right)^n$ converge ; la série de terme général x_n est donc convergente comme combinaison linéaire de séries convergentes.

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x_n = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(1 - \frac{k}{N}\right)^n = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{1 - \left(1 - \frac{k}{N}\right)} = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k}$$

$$\underline{\underline{\sum_{n=0}^{+\infty} x_n = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k}}}.$$

Q3 Notons B_r l'événement « r est le plus petit élément de $\mathbb{N}^*$ tel que $u_{r+1} \leq \min(u_1, u_2, \dots, u_r)$ ».
Il s'agit encore de prouver que : $p\left(\bigcup_{r=1}^{+\infty} B_r\right) = \sum_{r=1}^{+\infty} p(B_r) = 1$

Si $r = 1$: $p(B_1) = p(u_2 \leq u_1)$

Si $r \geq 2$ B_r est réalisé si et seulement si
$$\begin{cases} u_2 > \min(u_1) \\ u_3 > \min(u_1, u_2) \\ \dots\dots \\ u_r > \min(u_1, u_2, \dots, u_r) \\ u_{r+1} \leq \min(u_1, u_2, \dots, u_r) \end{cases}$$

donc B_r est réalisé si et seulement si
$$\begin{cases} u_2 > u_1 \\ u_3 > u_1 \\ \dots\dots \\ u_r > u_1 \\ u_{r+1} \leq u_1 \end{cases}$$

donc B_r " $=$ " $\{\forall i \in [\![2, r]\!], u_1 < u_i\} - \{\forall i \in [\![2, r+1]\!], u_1 < u_i\}$ "

B_r " $=$ " $\{\forall i \in [\![1, r-1]\!], u_1 < u_{i+1}\} - \{\forall i \in [\![1, r]\!], u_1 < u_{i+1}\}$ " $= A_{r-1} \setminus A_r$

Comme $A_r \subset A_{r-1}$: $p(B_r) = p(A_{r-1}) - p(A_r) = x_{r-1} - x_r$

$\forall r \in [\![2, +\infty[\![$, $p(B_r) = x_{r-1} - x_r$ et $p(B_1) = p(u_2 \leq u_1) = 1 - p(u_2 > u_1) = 1 - p(A_1)$

$\forall r \in [\![2, +\infty[\![$, $p(B_r) = x_{r-1} - x_r$ et $p(B_1) = 1 - x_1 = x_0 - x_1$

Finalement : $\underline{\underline{\forall r \in \mathbb{N}^*, \ p(B_r) = x_{r-1} - x_r}}$.

Il reste donc plus qu'à prouver que : $\sum_{r=1}^{+\infty} (x_{r-1} - x_r) = 1$

a : $\sum_{r=1}^{p}(x_{r-1}-x_r) = x_0 - x_p = 1 - x_p$ pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ et :

$$\lim_{p\to+\infty} x_p = \lim_{p\to+\infty}\left[\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\left(1-\frac{k}{N}\right)^p\right] = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} 0 = 0 \qquad \left(\forall k \in [\![1,N]\!],\ \left|1-\frac{k}{N}\right|<1\right).$$

Il est donc quasi-certain de pouvoir trouver un plus petit entier strictement positif r tel que : $u_{r+1} \leq \inf(u_1, u_2, \dots, u_r)$. Ceci autorise à parler de la variable aléatoire T_N prenant la valeur de ce plus petit entier.

Notons encore que : $\underline{\forall r \in \mathbb{N}^*,\ p(T_N = r) = x_{r-1} - x_r}$.

(Q4) $\forall r \in \mathbb{N}^*,\ r\,p(T_N=r) \geq 0$.

Pour prouver que $E(T_N)$ existe il suffit alors de montrer que la série de terme général $r\,p(T_N=r)$ converge c'est à dire que : $\lim_{n\to+\infty}\sum_{r=1}^{n} r\,p(T_N=r)$ existe.

Or $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{r=1}^{n} r\,p(T_N=r) = \sum_{r=0}^{n-1} p(T_N>r) - n\,p(T_N>n)$ (préliminaire).

$\forall r \in \mathbb{N}^*,\ p(T_N>r) = p(u_2 > \inf(u_1) \cap u_3 > \inf(u_1,u_2) \cap \dots \cap u_{r+1} > \inf(u_1,u_2,\dots,u_r))$

$\forall r \in \mathbb{N}^*,\ p(T_N>r) = p(\{\forall i \in [\![2,r+1]\!],\ u_1 < u_i\}) = p(\{\forall i \in [\![1,r]\!],\ u_1 < u_{i+1}\})$

$\forall r \in \mathbb{N}^*,\ p(T_N>r) = x_r$. Ceci vaut encore pour $r=0$ car $p(T_N>0) = 1 = x_0$.

Finalement $\underline{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{r=1}^{n} r\,p(T_N=r) = \sum_{r=0}^{n-1} x_r - n x_n}$

Notons que : $\lim_{n\to+\infty} n x_n = 0$. $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ n x_n = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} n\left(1-\frac{k}{N}\right)^n \overset{\text{OK ?}}{=} \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N-1} n\left(1-\frac{k}{N}\right)^n$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ n x_n = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N-1} e^{n\left[\ln\left(1-\frac{k}{N}\right)+\frac{\ln n}{n}\right]}$$

$\forall k \in [\![1,N-1]\!],\ \ln\left(1-\frac{k}{N}\right) < 0$ donc $\forall k \in [\![1,N-1]\!],\ \lim_{n\to+\infty} e^{n\left[\ln\left(1-\frac{k}{N}\right)+\frac{\ln n}{n}\right]} = 0$.

Finalement : $\lim_{n\to+\infty} n x_n = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N-1} 0 = 0$.

Rappelons que la série de terme général x_n converge et que : $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k}$

Finalement : $\lim_{n\mapsto+\infty}\left[\sum_{r=1}^{n} r\,p(T_N=r)\right] = \lim_{n\mapsto+\infty}\left[\sum_{r=0}^{n-1} x_r - n x_n\right] = \sum_{r=1}^{+\infty} x_r = \sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k}$

Cl.. $E(T_N)$ existe et vaut $\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k}$.

La série de terme général $\frac{1}{n}$ diverge et est à termes positifs ; par conséquent la suite de ses sommes partielles admet pour limite $+\infty$.
Donc $\lim_{N\mapsto+\infty}\left(\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k}\right) = +\infty$.

Cl.. $\lim_{N\mapsto+\infty} E(T_N) = +\infty$. $\qquad\left(E(T_N) = \sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k} \sim \ln(N)\right)$.

(Q5). Rappelons que Q4 nous a donné : $\forall n\in\mathbb{N},\ p(T_N>n) = x_n = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\left(1-\frac{k}{N}\right)^n$

x_n est donc une somme de Riemann pour tout $n\in\mathbb{N}$! Soit $n\in\mathbb{N}$.

Posons $\varphi : t\mapsto(1-t)^n$. φ est continue sur $[0,1]$.

$x_n = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\varphi\left(\frac{k}{N}\right)$, donc $\lim_{N\mapsto+\infty} p(T_N>n) = \lim_{N\mapsto+\infty}\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\varphi\left(\frac{k}{N}\right) = \int_0^1\varphi(t)\,dt$

$\lim_{N\mapsto+\infty} p(T_N>n) = \int_0^1 (1-t)^n\,dt = \left[-\frac{(1-t)^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$.

$\forall n\in\mathbb{N},\ \lim_{N\mapsto+\infty} p(T_N>n) = \frac{1}{n+1}$.

Donc $\forall n\in\mathbb{N}^*$: $\lim_{N\mapsto+\infty} p(T_N=n) = \lim_{N\mapsto+\infty}\left[p(T_N>n-1) - p(T_N>n)\right] = \frac{1}{n}-\frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)}$.

$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \lim_{N\mapsto+\infty}\left[p(T_N=n)\right] = \frac{1}{n} - \frac{1}{(n+1)} = \frac{1}{n(n+1)}$.

Ici encore prouver qu'il existe une variable aléatoire T à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ revient à prouver que : $h : \mathbb{N}^*\to\mathbb{R},\ n\mapsto\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$ est une loi de probabilité.

$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ h(n) = \frac{1}{n(n+1)}\in[0,1]$ et $\lim_{p\mapsto+\infty}\left(\sum_{n=1}^{p} h(n)\right) = \lim_{p\mapsto+\infty}\left[\sum_{n=1}^{p}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right] = \lim_{p\mapsto+\infty}\left(1-\frac{1}{p+1}\right) = 1$.

donc $\sum_{n=1}^{+\infty} h(n) = 1$. Ceci achève de prouver que h est une loi de probabilité.

Il existe donc une v.a. T à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telle que : $\forall k\in\mathbb{N}^*,\ p(T=k) = \lim_{N\mapsto+\infty} p(T_N=k)$

$\forall k\in\mathbb{N}^*,\ p(T=k) = \frac{1}{k}-\frac{1}{k+1} = \frac{1}{k(k+1)}$. $k\,p(T=k) = \frac{1}{k+1}\sim\frac{1}{k}$. T n'a pas d'espérance.