PARTIE I Q1.. $p(X=i \text{ et } N=k)=0$ si $k>n$ ou si $i>k$

$$p(X=i \text{ et } N=k) = p(X=i\,|\,N=k)\,p(N=k) = \frac{1}{k+1}\,\alpha_k = \frac{\alpha_k}{k+1}.$$

$X(\Omega)=[\![0,n]\!]$. $\forall i\in X(\Omega)$, $p(X=i)=\sum_{k=0}^{n} p(X=i \text{ et } N=k) = \sum_{k=i}^{n} \frac{\alpha_k}{k+1}$

$$\underline{\underline{\forall i\in[\![0,n]\!],\ p(X=i)=\sum_{k=i}^{n}\frac{\alpha_k}{k+1}}}$$

Q2.. $E(X)=\sum_{i=0}^{n} i\,p(X=i) = \sum_{i=0}^{n} i\sum_{k=i}^{n}\frac{\alpha_k}{k+1} = \sum_{i=0}^{n}\sum_{k=i}^{n}\frac{i\alpha_k}{k+1} \overset{\text{inversion classique}}{=} \sum_{k=0}^{n}\sum_{i=0}^{k}\frac{i\alpha_k}{k+1} = \sum_{k=0}^{n}\frac{\alpha_k}{k+1}\sum_{i=0}^{k} i$

$E(X)=\sum_{k=0}^{n}\frac{\alpha_k}{k+1}\times\frac{k(k+1)}{2} = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n} k\alpha_k = \frac{1}{2}E(N)$. $\underline{\underline{E(X)=\frac{1}{2}E(N)}}$.

$E(X^2)=\sum_{i=0}^{n} i^2 p(X=i) = \sum_{i=0}^{n} i^2\sum_{k=i}^{n}\frac{\alpha_k}{k+1} = \sum_{k=0}^{n}\sum_{i=0}^{k} i^2\frac{\alpha_k}{k+1} = \sum_{k=0}^{n}\frac{\alpha_k}{k+1}\left(\sum_{i=0}^{k} i^2\right) = \sum_{k=0}^{n}\frac{\alpha_k}{k+1}\,\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$

$E(X^2)=\frac{1}{6}\sum_{k=0}^{n}\alpha_k\,k(2k+1) = \frac{1}{3}\sum_{k=0}^{n}\alpha_k k^2 + \frac{1}{6}\sum_{k=0}^{n}\alpha_k k = \frac{1}{3}E(N^2)+\frac{1}{6}E(N)$

$V(X)=E(X^2)-(E(X))^2 = \frac{1}{3}E(N^2)+\frac{1}{6}E(N)-\frac{1}{4}(E(N))^2 = \frac{1}{3}\left(V(N)+(E(N))^2\right)+\frac{1}{6}E(N)-\frac{1}{4}(E(N))^2$

$\underline{\underline{V(X)=\frac{1}{3}V(N)+\frac{1}{12}(E(N))^2+\frac{1}{6}E(N)}}$. Calculons maintenant $E(X')$ et $V(X')$

Version 1.. En utilisant la loi de X'.

$X'=N-X$; $X'(\Omega)=[\![0,n]\!]$. $\forall i\in[\![0,n]\!]$, $p(X'=i)=p(N-X=i)=\sum_{j=0}^{n} p(X=j \text{ et } N=i+j) = \sum_{j=0}^{n-i}\frac{\alpha_{i+j}}{i+j+1}$

$\forall i\in[\![0,n]\!]$, $p(X'=i)=\underset{k=i+j\,;\,j=i-k}{\sum_{k=i}^{n}}\frac{\alpha_k}{k+1}$. Par conséquent X et X' ont même loi.

Finalement $\underline{\underline{E(X')=E(X)=\frac{1}{2}E(N)}}$ et $\underline{\underline{V(X')=V(X)=\frac{1}{3}V(N)+\frac{1}{12}(E(N))^2+\frac{1}{6}E(N)}}$.

Version 2.. Sans la loi de X'.

$E(X')=E(N-X)=E(N)-E(X)=E(N)-\frac{1}{2}E(N)=\frac{1}{2}E(N)$.

$V(X')=V(N)+V(X)-2\operatorname{cov}(N,X)$ $(V(X+Y)=V(X)+V(Y)+2\operatorname{cov}(X,Y)\ \dots)$

$\operatorname{cov}(N,X)=E(NX)-E(N)E(X)=\sum_{k=0}^{n}\sum_{i=0}^{n} ki\,p(N=k \text{ et } X=i)-\frac{1}{2}(E(N))^2 = \sum_{k=0}^{n}\sum_{i=0}^{k}\frac{ki\,\alpha_k}{k+1}-\frac{1}{2}(E(N))^2$

$\operatorname{cov}(N,X)=\sum_{k=0}^{n}\frac{k\alpha_k}{k+1}\times\frac{k(k+1)}{2}-\frac{1}{2}(E(N))^2=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}k^2\alpha_k-\frac{1}{2}(E(N))^2=\frac{1}{2}\left[E(N^2)-(E(N))^2\right]=\frac{1}{2}V(N)$; $2\operatorname{cov}(N,X)=V(N)$

Finalement $V(X')=V(N)+V(X)-V(N)=V(X)\dots$

Q3.. $\forall j\in[\![0,n]\!]$, $p(N=j\,|\,X=0)=\frac{P(N=j \text{ et } X=0)}{p(X=0)}=\frac{\alpha_j}{j+1}\times\left[\sum_{k=0}^{n}\frac{\alpha_k}{k+1}\right]^{-1}$. $\forall j\in[\![0,n]\!]$, $p(N=j\,|\,X=0)=\frac{\alpha_j}{j+1}\left[\sum_{k=0}^{n}\frac{\alpha_k}{k+1}\right]^{-1}$

Nous voulons : $\forall j\in[\![0,n]\!]$, $\frac{\alpha_j}{j+1}\times\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{\alpha_k}{k+1}\right)^{-1}=\frac{1}{n+1}$. Posons $A=\sum_{k=0}^{n}\frac{\alpha_k}{k+1}$

→ Supposons que : $\forall j\in[\![0,n]\!]$, $\frac{\alpha_j}{j+1}=\frac{A}{n+1}$; $1=\sum_{j=0}^{n}\alpha_j=\frac{A}{n+1}\sum_{j=0}^{n}(j+1)=\frac{A}{n+1}\times\frac{(n+1)(n+2)}{2}$; $A=\frac{2}{n+2}$

Donc $\forall j\in[\![0,n]\!]$, $\alpha_j=\frac{A(j+1)}{n+1}=\frac{2(j+1)}{(n+1)(n+2)}$

→ Réciproquement supposons que : $\forall j\in[\![0,n]\!]$, $\alpha_j=\frac{2(j+1)}{(n+1)(n+2)}$.

$\sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha_k}{k+1} = \sum_{k=0}^{n} \frac{2}{(n+1)(n+2)} = \frac{2}{n+2}$. $\forall j \in [\![0,n]\!]$, $\frac{\alpha_j}{j+1}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha_k}{k+1}\right)^{-1} = \frac{2(j+1)}{(j+1)(n+1)(n+2)} \times \left(\frac{2}{n+2}\right)^{-1} = \frac{1}{n+1}$.

Conclusion.. La loi conditionnelle de N sachant que $X=0$ est égale à U_n si et seulement si
$\forall j \in [\![0,n]\!]$, $\alpha_j = \frac{2(j+1)}{(n+1)(n+2)}$.

$\forall i \in [\![0,n]\!]$, $p(n-X=i) = p(X=n-i) = \sum_{k=n-i}^{n} \frac{\alpha_k}{k+1} = \sum_{k=n-i}^{n} \frac{1}{k+1} \times \frac{2(k+1)}{(n+1)(n+2)} = \frac{2}{(n+1)(n+2)}(n-(n-i-1)) = \frac{2(i+1)}{(n+1)(n+2)}$

N et $n-X$ ont même loi.

Par conséquent : $E(N) = E(n-X)$ et $V(N) = V(n-X)$.

$E(n-X) = n - E(X)$ et $V(n-X) = V(X)$ $(\ldots V(aX+b) = a^2V(X))$

Donc $E(N) = n - E(X) = n - \frac{1}{2}E(N)$; $\underline{E(N) = \frac{2}{3}n}$. $\underline{E(X) = \frac{1}{3}n}$.

$V(N) = V(X)$; $V(N) = \frac{1}{3}V(N) + \frac{1}{12}\left(\frac{2}{3}n\right)^2 + \frac{1}{6} \times \frac{2}{3}n$; $\frac{2}{3}V(N) = \frac{1}{27}n^2 + \frac{1}{9}n$; $V(N) = \frac{1}{2}\left(\frac{n^2+3n}{9}\right)$

$\underline{V(N) = V(X) = \frac{1}{18}n(n+3)}$. (On pouvait aussi obtenir $V(N)$ en calculant $E(N^2)$)

Soit $i \in [\![0,n]\!]$. $\forall j \in [\![i,n]\!]$, $p(N=j \mid X=i) = \frac{p(N=j \text{ et } X=i)}{p(X=i)} = \frac{p(N=j \text{ et } X=i)}{p(n-X=n-i)} = \frac{\frac{\alpha_j}{j+1}}{p(N=n-i)} = \frac{\frac{2(j+1)}{(n+1)(n+2)(j+1)}}{\frac{2(n-i+1)}{(n+1)(n+2)}}$

$\underline{\forall j \in [\![i,n]\!],\ p(N=j \mid X=i) = \frac{1}{n-i+1}}$ (on retrouve U_n pour $i=0$)

Q4.. G est la fonction génératrice de X (… ou presque !)

Soit $x \in \mathbb{R}-\{1\}$. $\frac{1}{x-1}\int_1^x F(t)dt = \frac{1}{x-1}\int_1^x \left(\sum_{k=0}^{n}\alpha_k t^k\right)dt = \sum_{k=0}^{n}\alpha_k \frac{1}{x-1}\left[\frac{t^{k+1}}{k+1}\right]_1^x = \sum_{k=0}^{n}\frac{\alpha_k}{k+1}\,\frac{x^{k+1}-1}{x-1}$

$\frac{1}{x-1}\int_1^x F(t)dt = \sum_{k=0}^{n}\frac{\alpha_k}{k+1}\sum_{i=0}^{k}x^i = \sum_{i=0}^{n}\left(\sum_{k=i}^{n}\frac{\alpha_k}{k+1}\right)x^i = \sum_{i=0}^{n}p(X=i)x^i = G(x)$.

Partie II.. Q1.. $p(Y=i \text{ et } N=k) = p(Y=i \mid N=k)p(N=k) = C_k^i p^i q^{k-i}\alpha_k$ si $0 \le i \le k$ et 0 sinon.

$Y(\Omega) = [\![0,n]\!]$. $\forall i \in [\![0,n]\!]$, $p(Y=i) = \sum_{k=0}^{n} p(Y=i \text{ et } N=k) = \sum_{k=0}^{n} p(Y=i \mid N=k)p(N=k) = \sum_{k=i}^{n} C_k^i p^i q^{k-i}\alpha_k$.

petit abus… $k=0$…

$\underline{Y(\Omega) = [\![0,n]\!] \text{ et } \forall i \in [\![0,n]\!],\ p(Y=i) = \sum_{k=i}^{n} C_k^i p^i q^{k-i}\alpha_k}$.

Q2.. $E(Y) = \sum_{i=0}^{n} i\,p(Y=i) = \sum_{i=0}^{n}\sum_{k=i}^{n} i\,C_k^i p^i q^{k-i}\alpha_k = \sum_{k=0}^{n}\left(\sum_{i=0}^{k} i\,C_k^i p^i q^{k-i}\right)\alpha_k = \sum_{k=0}^{n}\alpha_k \sum_{i=1}^{k} i\,C_k^i p^i q^{k-i} \ \overset{*}{=}$

$E(Y) = \sum_{k=0}^{n}\alpha_k \sum_{i=1}^{k} k\,C_{k-1}^{i-1} p^i q^{k-i} = \sum_{k=0}^{n} k\alpha_k \sum_{i=0}^{k-1} C_{k-1}^{i} p^{i+1} q^{k-i-1} = \sum_{k=0}^{n} k\alpha_k\, p\,(p+q)^{k-1} = p\sum_{k=0}^{n} k\alpha_k = p\,E(N)$

Remarque.. On pouvait pour aller plus vite reconnaître au niveau de $*$ l'espérance de "$\mathcal{B}(k,p)$".

$E(Y^2) = \sum_{i=0}^{n} i^2 p(Y=i) = \sum_{i=0}^{n} i(i-1)p(Y=i) + \sum_{i=0}^{n} i\,p(Y=i) = \sum_{i=0}^{n} i(i-1)p(Y=i) + E(Y)$.

$\sum_{i=0}^{n} i(i-1)p(Y=i) = \sum_{i=0}^{n} i(i-1)\sum_{k=i}^{n} C_k^i p^i q^{k-i}\alpha_k = \sum_{k=0}^{n}\alpha_k \sum_{i=0}^{k} i(i-1)C_k^i p^i q^{k-i} = \sum_{k=0}^{n}\alpha_k p^2 \sum_{i=2}^{k} k(k-1)C_{k-2}^{i-2} p^{i-2} q^{k-i}$

$= \sum_{k=0}^{n}\alpha_k p^2 k(k-1)\underbrace{\left(\sum_{i=0}^{k-2} C_{k-2}^{i} p^i q^{k-2-i}\right)}_{(p+q)^{k-2}} = p^2\sum_{k=0}^{n} k(k-1)\alpha_k = p^2\left(E(N^2) - E(N)\right)$

$E(Y^2) = p^2(E(N^2) - E(N)) + p\,E(N)$; $V(Y) = p^2(E(N^2) - E(N)) + p(E(N)) - p^2(E(N))^2 = p^2V(N) + p(1-p)E(N)$

$\underline{E(Y) = p\,E(N)}$ et $\underline{V(Y) = p^2V(N) + pq\,E(N)} = \underline{p^2V(N) + p(1-p)E(N)}$

$Y' = N - Y$. $Y'(\Omega) = [\![0,n]\!]$. $\forall i \in [\![0,n]\!]$, $p(Y'=i) = \sum_{j=0}^{n} p(Y=j \text{ et } N=i+j) = \sum_{j=0}^{n-i} C_{i+j}^{j} p^j q^{i+j-j}$

$\forall i \in [\![0,n]\!]$, $p(Y'=i) \underset{i+j=k}{=} \sum_{k=i}^{n} C_k^{k-i} p^{k-i} q^i = \sum_{k=i}^{n} C_k^i q^i p^{k-i}$

En échangeant p et q on retrouve la loi de Y.

Donc $\underline{E(Y') = q\,E(N)}$ et $\underline{V(Y') = q^2 V(N) + pq\,E(N)}$.

on pouvait encore utiliser $E(Y') = E(N) - E(Y)$ et $V(Y') = V(N) + V(Y) - 2\,cov(N,Y)$ ceci nécessitait le calcul de $cov(N,Y)$ ... bon exercice de contrôle.

Q3.. $\forall j \in [\![0,n]\!]$, $p(N=j/Y=0) = \frac{p(N=j \text{ et } Y=0)}{p(Y=0)} = \frac{C_j^0 p^0 q^{j-0}\alpha_j}{\sum_{k=0}^{n} C_k^0 p^0 q^{k-0}\alpha_k} = \frac{q^j\alpha_j}{\sum_{k=0}^{n} q^k\alpha_k}$

→ Supposons que : $\forall j \in [\![0,n]\!]$, $p(N=j/Y=0) = C_n^j q'^j p'^{n-j}$ $\quad (p' = 1-q')$.

Alors $\forall j \in [\![0,n]\!]$, $\alpha_j = \frac{B}{q^j} C_n^j q'^j p'^{n-j}$ avec $B = \sum_{k=0}^{n} q^k\alpha_k$

Donc $1 = \sum_{j=0}^{n}\alpha_j = B\sum_{j=0}^{n} C_n^j \left(\frac{q'}{q}\right)^j p'^{n-j} = B\left(\frac{q'}{q}+p'\right)^n$; $B = \frac{q^n}{(q'+qp')^n}$

$\forall j \in [\![0,n]\!]$, $\alpha_j = C_n^j\left(\frac{q'}{q}\right)^j p'^{n-j}\frac{q^n}{(q'+qp')^n}$

$\forall j \in [\![0,n]\!]$, $\alpha_j = C_n^j\left(\frac{q'}{qp'}\right)^j\left(\frac{p'q}{q'+qp'}\right)^n$

→ Réciproquement supposons $\uparrow$ et montrons que la loi de probabilité conditionnelle de N sachant que $Y=0$ est $\mathcal{B}(n,q')$.

$\forall j \in [\![0,n]\!]$, $p(N=j/Y=0) = \frac{q^j\alpha_j}{\sum_{k=0}^{n} q^k\alpha_k}$. $\quad \sum_{k=0}^{n} q^k\alpha_k = \sum_{k=0}^{n} C_n^k\left(\frac{q'}{qp'}\right)^k\left(\frac{p'q}{q'+qp'}\right)^n q^k = \left(\frac{p'q}{q'+qp'}\right)^n\left(\frac{qq'}{qp'}+1\right)^n$ $= \left(\frac{p'q}{q'+qp'}\right)^n\frac{q^n(p'+q')^n}{(qp')^n} = \frac{q^n}{(q'+qp')^n}$

Soit $j \in [\![0,n]\!]$;

$p(N=j/Y=0) = \left(\frac{q'+qp'}{q}\right)^n q^j C_n^j\left(\frac{q'}{qp'}\right)^j\left(\frac{p'q}{q'+qp'}\right)^n = C_n^j q^j\left(\frac{q'}{qp'}\right)^j\left(\frac{p'q}{q}\right)^n = C_n^j q'^j p'^{-j} p'^n$

$p(N=j/Y=0) = C_n^j q'^j p'^{n-j}$ ... cqfd.

a) $\forall i \in [\![0,n]\!]$, $p(Y=i) = \sum_{k=i}^{n} C_k^i p^i q^{k-i} C_n^k\left(\frac{q'}{qp'}\right)^k\left(\frac{p'q}{q'+qp'}\right)^n \underset{C_k^i C_n^k = C_n^i C_{n-i}^{k-i}}{=} C_n^i p^i\left(\frac{p'q}{q'+qp'}\right)^n\sum_{k=i}^{n} C_{n-i}^{k-i} q^{k-i}\left(\frac{q'}{qp'}\right)^k$

$\forall i \in [\![0,n]\!]$, $p(Y=i) = C_n^i p^i\left(\frac{p'q}{q'+p'q}\right)^n\sum_{j=0}^{n-i} C_{n-i}^j q^j\left(\frac{q'}{qp'}\right)^{i+j}$

$\forall i \in [\![0,n]\!]$, $p(Y=i) = C_n^i p^i\left(\frac{p'q}{q'+p'q}\right)^n\left(\frac{q'}{qp'}\right)^i\left(1+\frac{qq'}{qp'}\right)^{n-i} = C_n^i p^i\left(\frac{p'q}{q'+p'q}\right)^n\left(\frac{q'}{qp'}\right)^i \times \left(\frac{1}{p'}\right)^{n-i}$

$\forall i \in [\![0,n]\!]$, $p(Y=i) = C_n^i p^i q'^i q^{n-i}\frac{1}{(q'+p'q)^n} = C_n^i p^i(1-p')^i(1-p)^{n-i}\frac{1}{(1-p'+p'(1-p))^n}$

$\forall i \in [\![0,n]\!]$, $p(Y=i) = C_n^i\frac{p^i(1-p')^i(1-p)^{n-i}}{(1-pp')^n} = C_n^i\left(\frac{p(1-p')}{1-pp'}\right)^i\left(\frac{1-p}{1-pp'}\right)^{n-i} = C_n^i\left(\frac{p(1-p')}{1-pp'}\right)^i\left(1-\frac{p(1-p')}{1-pp'}\right)^{n-i}$

b) $Y \hookrightarrow \mathcal{B}\left(n, \frac{p(1-p')}{1-pp'}\right)$ (notons que $\frac{p(1-p')}{1-pp'} \in]0,1[$).

Par conséquent $E(Y) = \frac{np(1-p')}{1-pp'}$ et $E(N) = \frac{1}{p}E(Y) = \frac{n(1-p')}{1-pp'}$.

$V(Y) = n\frac{p(1-p')}{1-pp'}\times\frac{1-p}{1-pp'}$ et $V(N) = \frac{1}{p^2}\left[V(Y) - pq\,E(N)\right] = \frac{n(1-p')}{p(1-pp')}\left(\frac{1-p}{1-pp'}+p-1\right) = n\frac{(1-p')(1-p)}{(1-pp')^2}p'$

$$E(N)=\frac{n(1-p')}{1-pp'}\quad;\quad E(Y)=\frac{np(1-p')}{1-pp'}\quad;\quad V(N)=\frac{n(1-p')(1-p)p'}{(1-pp')^2}\quad;\quad V(Y)=\frac{np(1-p)(1-p')}{(1-pp')^2}$$

c) Soit $i\in[\![1,n]\!]$ (ou $[\![0,n]\!]$)

$\forall k\in[\![i,n]\!]$, $p(N=k|Y=i)=\dfrac{p(N=k\cap Y=i)}{p(Y=i)}=\dfrac{C_k^i p^i q^{k-i}\alpha_k}{C_n^i\alpha^i\beta^{n-i}}$ où $\alpha=\dfrac{p(1-p')}{1-pp'}$ et $\beta=1-\alpha$

Soit $k\in[\![i,n]\!]$

$$p(N=k|Y=i)=\frac{C_k^i p^i q^{k-i}C_n^k\left(\frac{q'}{qp'}\right)^k\left(\frac{p'q}{q'+qp'}\right)^n}{C_n^i\dfrac{p^i(1-p')^i(1-p)^{n-i}}{(1-pp')^n}}\underset{\uparrow}{=}C_{n-i}^{k-i}\,p'^{\,n-k}(1-p')^{k-i}=C_{n-i}^{k-i}(1-p')^{k-i}p'^{\,n-k}$$

$[\,q=1-p\,;\ q'+qp'=1-pp'$
$q'=1-p'\,;\ C_k^iC_n^k=C_n^iC_{n-i}^{k-i}\,]$

$\forall k\in[\![i,n]\!],\ p(N=k|Y=i)=C_{n-i}^{k-i}(1-p')^{k-i}p'^{\,n-k}$ (on retrouve le point de départ pour $i=0$)

Q4.. Soit $x\in\mathbb{R}$. $H(x)=\displaystyle\sum_{i=0}^n p(Y=i)x^i=\sum_{i=0}^n\Big(\sum_{k=i}^n C_k^i p^i q^{k-i}\alpha_k\Big)x^i=\sum_{k=0}^n\sum_{i=0}^k C_k^i p^i q^{k-i}x^i\alpha_k$

$H(x)=\displaystyle\sum_{k=0}^n\alpha_k\Big(\sum_{i=0}^k C_k^i(px)^iq^{k-i}\Big)=\sum_{k=0}^n\alpha_k(px+q)^k=F(px+q)$.

Q5.. Supposons $N\hookrightarrow\mathcal{B}(n,p)$. $\forall x\in\mathbb{R}$, $F(x)=\displaystyle\sum_{k=0}^n\alpha_kx^k=\sum_{k=0}^n p(N=k)x^k=\sum_{k=0}^n C_n^kp^kq^{n-k}x^k=(px+q)^n$

donc $\forall x\in\mathbb{R}-\{1\}$, $G(x)=\dfrac{1}{x-1}\displaystyle\int_1^x(pt+q)^n\,dt=\frac{1}{x-1}\left[\frac{(pt+q)^{n+1}}{p(n+1)}\right]_1^x=\frac{1}{p(n+1)}\,\frac{(px+q)^{n+1}-1}{x-1}$

$\forall x\in\mathbb{R}-\{1\}$, $G(x)=\dfrac{1}{p(n+1)}\Big[\displaystyle\sum_{k=0}^n(px+q)^k\Big]\underbrace{\Big[\frac{px+q-1}{x-1}\Big]}_{p}=\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^n(px+q)^k$.

$\forall x\in\mathbb{R}-\{1\}$, $G(x)=\dfrac{1}{n+1}\displaystyle\sum_{k=0}^n(px+q)^k$. G étant continue en 1 ce résultat vaut encore pour $x=1$ (passage à la limite).

Supposons $N\hookrightarrow\mathcal{U}_n$. $\forall x\in\mathbb{R}$, $F(x)=\displaystyle\sum_{k=0}^n\frac{1}{n+1}x^k=\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^n x^k$

$\forall x\in\mathbb{R}$, $H(x)=F(px+q)=\dfrac{1}{n+1}\displaystyle\sum_{k=0}^n(px+q)^k$; on retrouve G

Reste à montrer pour conclure que : $\forall x\in\mathbb{R}$, $\displaystyle\sum_{i=0}^n p(X=i)x^i=\sum_{i=0}^n p(Y=i)x^i\Rightarrow\forall i\in[\![0,n]\!],\ p(X=i)=p(Y=i)$

Ceci est clair car deux polynômes égaux ont mêmes coefficients.

Remarque.. Savoir "le cours" sur les fonctions génératrices... c'est assez important.

PARTIE III. Q1.. C'est du cours ! $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n=p^n(u_0-1)+1$

$p\in]0,1[$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=1$.

$\forall n\in\mathbb{N}$, $f(u_{n+1})=f(pu_n+q)=\lambda f(u_n)$. $(f(u_n))_{n\geqslant0}$ est une suite géométrique de raison λ. $\forall n\in\mathbb{N},\ f(u_n)=\lambda^nf(u_0)$.

Q2.. Soit f un élément de E_λ qui ne soit pas la fonction nulle. $\exists a\in\mathbb{R},\ f(a)\neq0$.

Posons $u_0=a$ et $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}=pu_n+q$. $(u_n)_{n\geqslant0}$ converge vers 1 donc $(f(u_n))_{n\geqslant0}$ converge vers $f(1)$ (f est continue sur $\mathbb{R}$) ; par conséquent $(\lambda^nf(u_0))_{n\geqslant0}$ converge ; comme $f(u_0)$ n'est pas nul : $(\lambda^n)_{n\geqslant0}$ est une suite convergente ce qui exige : $|\lambda|<1$ ou $\lambda=1$

Supposons $\lambda=1$. Soit $f\in E_\lambda$. Soit a un réel quelconque. Posons $u_0=a$ et $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}=pu_n+q$.

$(u_n)_{n\geqslant0}$ converge vers 1, $(f(u_n))_{n\geqslant0}$ converge vers $f(1)$ et $f(u_0)$ ($\forall n\in\mathbb{N},\ f(u_n)=1^nf(u_0)=f(u_0)$).

donc $f(a)=f(u_0)=f(1)$; f est constante. Réciproquement il est clair qu'une application constante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$

est élément de E_λ lorsque $\lambda = 1$.

Conclusion.. E_1 est l'ensemble des applications constantes de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Soit $f \in E_\lambda$ avec $\lambda \neq 1$.

ou f est la fonction nulle et $f(1)=0$. Supposons que f n'est pas la fonction nulle, alors $|\lambda|<1$.

Soit $u_0 \in \mathbb{R}$. Posons $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = pu_n + q$. $(u_n)_{n\geq 0}$ converge vers 1. $(f(u_n))_{n\geq 0} = (\lambda^n f(u_0))_{n \geq 0}$ converge vers $f(1)$; donc $f(1) = \lim_{n\to+\infty} \lambda^n f(u_0) = 0$ $(|\lambda|<1)$

Dans tous les cas $f(1)=0$.

Q3.- a) Soit $f \in E_\lambda \cap \mathcal{C}_\infty$. $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(px+q) = \lambda f(x)$. Une récurrence simple montre que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ p^n f^{(n)}(px+q) = \lambda f^{(n)}(x) \text{ ; donc } \forall n \in \mathbb{N},\ f^{(n)} \in E_{\frac{\lambda}{p^n}} (\cap\, \mathcal{C}_\infty)$$

1er cas.. $\lambda = 0$. f est nulle, f' est nulle ! $f^{(k+1)}$ est nulle avec $k=0$

2e cas.. $\lambda \neq 0$. $\lim_{n\to+\infty} \frac{|\lambda|}{p^n} = +\infty$. $\exists n_1 \in \mathbb{N}^*$, $\frac{|\lambda|}{p^{n_1}} > 1$, alors $f^{(n_1)}$ est nulle ($f^{(n_1)} \in E_{\frac{\lambda}{p^{n_1}}}$ et $\frac{|\lambda|}{p^{n_1}} > 1$ + Q2). $f^{(k+1)}$ est nulle avec $k = n_1 - 1$.

b) $f^{(n_0)}$ n'est pas la fonction nulle donc $\forall k \in [\![0, n_0]\!]$, $f^{(k)}$ n'est pas la fonction nulle (si $f^{(k)}$ est nulle il en est de même pour ses dérivées donc pour $f^{(n_0)}$).

Soit $k \in [\![0, n_0]\!]$, $f^{(k)}$ n'est pas la fonction nulle ; en particulier $\forall k \in [\![0, n_0-1]\!]$, $f^{(k)}$ n'est pas constante. Notons encore que $n_0 \neq 0$ ($n_0 = 0 \Rightarrow f' = 0 \Rightarrow f$ constante)

Soit $k \in [\![0, n_0-1]\!]$; $f^{(k)}$ n'est pas nulle et $f^{(k)} \in E_{\frac{\lambda}{p^k}}$, $\left|\frac{\lambda}{p^k}\right| < 1$ ou $\frac{\lambda}{p^k} = 1$.

Si $\frac{\lambda}{p^k} = 1$: $\frac{\lambda}{p^{k+1}} = \frac{1}{p} > 1$ et $f^{(k+1)}$ est nulle ($f^{(k+1)}$ appartient à $E_{\frac{\lambda}{p^{k+1}}}$) ; donc $\left|\frac{\lambda}{p^k}\right| < 1$.

Ceci donne $f^{(k)}(1) = 0$ (Q2).

Reste à montrer que $\frac{\lambda}{p^{n_0}} = 1$. Ceci est clair car $f^{(n_0+1)}$ étant nulle $f^{(n_0)}$ est constante et non nulle.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $f^{(n_0)}(px+q) = \frac{\lambda}{p^{n_0}} f^{(n_0)}(x)$ donne alors $\frac{\lambda}{p^{n_0}} = 1$. ($c = \frac{\lambda}{p^{n_0}} c$ et $c \neq 0 \Rightarrow \frac{\lambda}{p^{n_0}} = 1$)

Soit $x \in \mathbb{R} - \{1\}$. La formule de Taylor donne : $f(x) = \sum_{k=0}^{n_0} \frac{(x-1)^k}{k!} f^{(k)}(1) + \frac{(x-1)^{n_0+1}}{(n_0+1)!} f^{(n_0+1)}(c_x)$ avec c_x entre 1 et x.

Donc $f(x) = \frac{(x-1)^{n_0}}{n_0!} f^{(n_0)}(1)$; ceci vaut encore pour $x=1$ par continuité.

Finalement $\exists a \in \mathbb{R}^*$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = a(x-1)^{n_0}$

c) 1er cas.. $\lambda \notin \{p^n ; n \in \mathbb{N}\}$

$E_\lambda \cap \mathcal{C}_\infty$ ne contient pas de fonction non constante et une fonction constante non nulle ne peut appartenir à E_λ car $\lambda \neq 1$. Donc $E_\lambda \cap \mathcal{C}_\infty$ est réduit à la fonction nulle

2e cas.. $\lambda = 1$. E_λ est l'ensemble des applications constantes de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, $E_\lambda \cap \mathcal{C}_\infty$ aussi.

3e cas.. $\lambda \in \{p^n, n \in \mathbb{N}^*\}$. $\exists n_0 \in \mathbb{N}^*$, $\lambda = p^{n_0}$

si $f \in E_\lambda \cap \mathcal{C}_\infty$ et si f est constante alors f est nulle $(\lambda \neq 1)$. Si $f \in E_\lambda \cap \mathcal{C}_\infty$ et si f n'est pas constante alors $\exists a \in \mathbb{R}^*$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = a(x-1)^{n_0}$ (Voir plus haut)

Dans les deux cas $\exists a \in \mathbb{R}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = a(x-1)^{n_0}$

Réciproquement il est clair que si $a \in \mathbb{R}$ et si $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = a(x-1)^{n_0}$ alors $f \in E_\lambda \cap \mathcal{C}_\infty$

Donc $E_\lambda \cap \mathcal{C}_\infty = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mid \exists a \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = a(x-1)^{n_0}\}$ (... si $n_0 = 0$ on retrouve le 2e cas !)

Q4.. $\ell_1 : x \mapsto \frac{1}{x-1}$ est dérivable sur $\mathbb{R}-\{1\}$ (fonction rationnelle) et $\ell_2 : x \mapsto \int_1^x f(t)dt$ est la primitive de f sur $\mathbb{R}$ qui prend la valeur 0 en 1, par conséquent $\ell_1\ell_2 : x \mapsto \frac{1}{x-1}\int_1^x f(t)dt$ est dérivable sur $\mathbb{R}-\{1\}$. h est donc dérivable sur $\mathbb{R}-\{1\}$ en particulier continue sur $\mathbb{R}-\{1\}$. Montrons la continuité de h en 1.

Soit $x\in\mathbb{R}-\{1\}$. Il existe c_x entre 1 et x tel que : $\frac{1}{x-1}\int_1^x f(t)dt = f(c_x)$ (formule de la moyenne ou A.F. !)

$\lim_{x\to 1} c_x = 1$ donc $\lim_{x\to 1} f(c_x) = f(1)$ (f est continue en 1) ; par conséquent $\lim_{x\to 1}\frac{1}{x-1}\int_1^x f(t)dt = f(1)=h(1)$.

h est donc continue en 1.

Finalement $h\in\mathcal{C}^0$ et h est dérivable sur $\mathbb{R}-\{1\}$.

$\forall x\in\mathbb{R}-\{1\}$, $h'(x) = \ell_1'(x)\ell_2(x)+\ell_1(x)\ell_2'(x) = -\frac{1}{(x-1)^2}\int_1^x f(t)dt + \frac{1}{x-1}f(x) = \frac{1}{x-1}(f(x)-h(x))$

Soient $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$ et $(f,g)\in\mathcal{C}^0$. Montrons que $\phi(\alpha f+\beta g)=\alpha\phi(f)+\beta\phi(g)$.

Soit à montrer que : $\forall x\in\mathbb{R}$, $(\phi(\alpha f+\beta g))(x) = \alpha\phi(f)(x)+\beta\phi(g)(x)$.

$(\phi(\alpha f+\beta g))(1) = \alpha f(1)+\beta g(1) = \alpha\phi(f)(1)+\beta\phi(g)(1)$. Soit $x\in\mathbb{R}-\{1\}$

$\phi(\alpha f+\beta g)(x) = \frac{1}{x-1}\int_1^x(\alpha f+\beta g)(t)dt = \alpha\frac{1}{x-1}\int_1^x f(t)dt+\beta\frac{1}{x-1}\int_1^x g(t)dt = \alpha\phi(f)(x)+\beta\phi(g)(x)$ ... cqfd.

Q5.. a.. Soit f un élément de $\mathcal{E}_0$ propre pour ϕ. $\exists\alpha\in\mathbb{R}$, $\phi(f)=\alpha f$.

$g\in\mathcal{E}_0$. Montrons que $\phi(g)=\alpha g$ (ce qui montrera que g est propre pour ϕ).

$\phi(g)(1)=g(1)=f(1)=(\phi(f))(1)=(\alpha f)(1)=\alpha f(1)=\alpha g(1)=(\alpha g)(1)$. Soit $x\in\mathbb{R}-\{1\}$

$\phi(g)(x)=\frac{1}{x-1}\int_1^x g(t)dt = \frac{1}{x-1}\int_1^x f(pt+q)dt \underset{u=pt+q}{=} \frac{1}{x-1}\int_{p+q}^{px+q} f(u)\frac{1}{p}du = \frac{1}{px-p}\int_1^{px+q} f(u)du = \frac{1}{(px+q)-1}\int_1^{px+q}f(u)du$

$\phi(g)(x) = \phi(f)(px+q) = \alpha f(px+q)=\alpha g(x)$. Finalement : $\forall x\in\mathbb{R}$, $\phi(g)(x)=\alpha g(x)$; $\phi(g)=\alpha g$.

b.. Soit f un élément de $\mathcal{E}_0$ propre pour ϕ et ("non nulle"). $\exists\alpha\in\mathbb{R}$, $\phi(f)=\alpha f$.

$\forall x\in\mathbb{R}-\{1\}$, $\frac{1}{x-1}\int_1^x f(t)dt = \alpha f(x)$. $\forall x\in\mathbb{R}-\{1\}$, $h(x)=\alpha f(x)$.

1er cas.. $\alpha=0$. $\forall x\in\mathbb{R}-\{1\}$, $\int_1^x f(t)dt=0$, en dérivant on obtient : $\forall x\in\mathbb{R}-\{1\}$, $f(x)=0$. Par continuité : $\forall x\in\mathbb{R}$, $f(x)=0$ et f est nulle !

2e cas.. $\alpha\neq 0$ $\forall x\in\mathbb{R}-\{1\}$, $f(x)=\frac{1}{\alpha}\frac{1}{x-1}\int_1^x f(t)dt = \frac{1}{\alpha}h(x)$ donc f est dérivable sur $\mathbb{R}-\{1\}$.

$\forall x\in\mathbb{R}-\{1\}$, $\alpha f'(x)=h'(x)=\frac{1}{x-1}(f(x)-h(x)) = \frac{1}{x-1}(f(x)-\alpha f(x)) = \frac{1-\alpha}{x-1}f(x)$

$\forall x\in\mathbb{R}-\{1\}$, $(x-1)f'(x)-\frac{1-\alpha}{\alpha}f(x)=0$. Posons $\beta=\frac{1-\alpha}{\alpha}$

$\forall x\in\mathbb{R}-\{1\}$, $(x-1)f'(x)-\beta f(x)=0$; $\forall x\in]1,+\infty[$, $(x-1)^\beta f'(x)-\beta(x-1)^{\beta-1}f(x)=0$

$\forall x\in]1,+\infty[$, $\frac{(x-1)^\beta f'(x)-\beta(x-1)^{\beta-1}f(x)}{(x-1)^{2\beta}}=0$; $x\mapsto\frac{(x-1)^\beta f'(x)-\beta(x-1)^{\beta-1}f(x)}{(x-1)^{2\beta}}$ n'est autre que la dérivée sur $]1,+\infty[$ de $x\mapsto\frac{f(x)}{(x-1)^\beta}$; par conséquent : $\exists c_1\in\mathbb{R}$, $\forall x\in]1,+\infty[$, $f(x)=c_1(x-1)^\beta$

On montre de la même manière que : $\exists c_2\in\mathbb{R}$, $\forall x\in]-\infty,1[$, $f(x)=c_2(1-x)^\beta$

Etudions f en 1.

1er cas.. $\beta=0$. $\forall x\in]1,+\infty[$, $f(x)=c_1$ et $\forall x\in]-\infty,1[$, $f(x)=c_2$. f étant continue en 1 : $c_1=c_2$ et $\forall x\in\mathbb{R}$, $f(x)=c_1$. f est constante (et non nulle par hypothèse).

2e cas.. $\beta<0$. $\lim_{x\to 1^-}(1-x)^\beta=+\infty$ et $\lim_{x\to 1^+}(x-1)^\beta=+\infty$

mais nous savons que : $\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^-} f(x) = f(1)$ donc nécessairement $c_1 = c_2 = 0$!

Par conséquent $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 0$! (Contraire à l'hypothèse).

3°Cas... $\beta > 0$. Contentons nous de remarquer que : $\lim_{x\to 1^+} f(x) = 0$ donc que $f(1) = 0$.

Analysons les résultats obtenus

Remarquons d'abord que : $\beta = 0 \Leftrightarrow \alpha = 1$, $\beta > 0 \Leftrightarrow \alpha \in]0,1[$ et $\beta < 0 \Leftrightarrow \alpha \in]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[$.

* Si $\alpha \in]-\infty, 0] \cup]1, +\infty[$, $\forall f \in \mathcal{C}_0$, $\phi(f) = \alpha f \Rightarrow f \equiv 0$.

* Si $\alpha = 1$, $\forall f \in \mathcal{C}_0$, $\phi(f) = \alpha f \Rightarrow f$ est constante

Il est aisé de montrer que si f est constante sur $\mathbb{R}$, $\phi(f) = f = \alpha f$.

donc $\forall f \in \mathcal{C}^0$, $\phi(f) = \alpha f \Leftrightarrow f$ est constante.

* $\alpha \in]0,1[$. Posons $\beta = \frac{1-\alpha}{\alpha}$

$\forall f \in \mathcal{C}_0$, $\phi(f) = \alpha f \Rightarrow f(1) = 0$, $\exists c_1 \in \mathbb{R}$, $\forall x \in]1,+\infty[$, $f(x) = c_1(x-1)^\beta$ et $\exists c_2 \in \mathbb{R}$, $\forall x \in]-\infty, 1[$, $f(x) = c_2(1-x)^\beta$

montrons la réciproque.

Soit $(c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2$. Posons $f(1) = 0$, $\forall x \in]1, +\infty[$, $f(x) = c_1(x-1)^\beta$ et $\forall x \in]-\infty, 1[$, $f(x) = c_2(1-x)^\beta$

$f \in \mathcal{C}^0$ $(\beta > 0)$

$\phi(f)(1) = f(1) = 0 = \alpha f(1)$

$\forall x \in]1,+\infty[$, $\phi(f)(x) = \frac{c_1}{x-1}\int_1^x (t-1)^\beta dt = \frac{c_1}{x-1}\left[\frac{(t-1)^{\beta+1}}{\beta+1}\right]_1^x = \frac{c_1}{\beta+1}(x-1)^{\beta+1} = \frac{c_1}{\frac{1-\alpha}{\alpha}+1}(x-1)^{\beta+1} = \alpha c_1 (x-1)^{\beta+1} = \alpha f(x)$

$\forall t \in [1,x]$, $f(t) = c_1(t-1)^\beta$!

même chose pour $]-\infty, 1[$. Finalement : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\phi(f)(x) = \alpha f(x)$; $\phi(f) = \alpha f$. Concluons !

Rappel ... α est valeur propre de ϕ s'il existe un élément non nul f de $\mathcal{C}_0$ tel que : $\phi(f) = \alpha f$

Si α est valeur propre de ϕ et si $f \in \mathcal{C}_0$ et $\phi(f) = \alpha f$, f est un vecteur propre pour ϕ associé à la valeur propre α.

Conclusion... Les valeurs propres de ϕ sont les éléments de $]0,1]$.

Soit $\alpha \in]0,1[$. Posons $\beta = \frac{1-\alpha}{\alpha}$. Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

f est un vecteur propre associé à α si et seulement si $\exists (c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2$, $\forall x \in [1, +\infty[$, $f(x) = c_1(x-1)^\beta$ et $\forall x \in]-\infty, 1[$ (ou $]$!), $f(x) = c_2(1-x)^\beta$.

Si $\alpha = 1$, les vecteurs propres associés à α sont les applications constantes de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

c) Soit $\lambda \in]0,1]$. Si $\lambda = 1$, E_λ est l'ensemble des applications constantes de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ (Q2) il n'y a donc rien à faire. Supposons $\lambda \neq 1$.

Soit $\alpha \in]0,1[$. Posons $\beta = \frac{1-\alpha}{\alpha}$, $\forall x \in [1,+\infty[$, $f(x) = (x-1)^\beta$ et $\forall x \in]-\infty, 1[$, $f(x) = (1-x)^\beta$.

Déterminons $g : x \mapsto f(px+q)$.

Soit $x \in [1,+\infty[$. $px+q \in [1, +\infty[$. $g(x) = f(px+q) = (px+q-1)^\beta = p^\beta (x-1)^\beta = p^\beta f(x)$; de même :

$\forall x \in]-\infty, 1[$, $g(x) = p^\beta f(x)$. Finalement $g = p^\beta f$.

Reste plus qu'à trouver α tel que : $p^\beta = \lambda$!

$p^\beta = \lambda \Leftrightarrow \beta \ln p = \ln \lambda \Leftrightarrow \beta = \frac{\ln \lambda}{\ln p} \Leftrightarrow \frac{1-\alpha}{\alpha} = \frac{\ln \lambda}{\ln p} \Leftrightarrow \alpha = \frac{\ln p}{\ln p + \ln \lambda} = \frac{\ln p}{\ln(\lambda p)}$

Reprenons les choses dans le bon sens !

Posons $\alpha = \frac{\ln p}{\ln(\lambda p)}$; $\alpha \in]0,1[$ (à vérifier !) ($\lambda \in]0,1[$ et $p \in]0,1[$) ; $\lambda^\alpha = p^{1-\alpha}$; $\lambda = p^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}$.

Posons $\beta = \frac{1-\alpha}{\alpha}$, $\forall x \in [1,+\infty[$, $f(x) = (x-1)^\beta$ et $\forall x \in]-\infty,1[$, $f(x) = (1-x)^\beta$. $f \in \mathcal{C}^0$ et

$g = p^\beta f = p^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} f = \lambda f$; $f \in E_\lambda$ et f n'est pas la fonction nulle... cqfd.

Q6.. Soit $k \in \mathbb{Z}$. $x \in]1+2^k, 1+2^{k+1}] \iff x > 1$ et $k\ln 2 < \ln(x-1) \leq (k+1)\ln 2 \iff x > 1$ et $k < \frac{\ln(x-1)}{\ln 2} \leq k+1$

$x \in]1+2^k, 1+2^{k+1}] \iff x > 1$ et $(-k-1) \leq -\frac{\ln(x-1)}{\ln 2} < (-k-1)+1 \iff \begin{cases} x > 1 \text{ et} \\ -k-1 = E\left[-\frac{\ln(x-1)}{\ln 2}\right] \end{cases}$

$x \in]1+2^k, 1+2^{k+1}] \iff x > 1$ et $k = -1 - E\left(-\frac{\ln(x-1)}{\ln 2}\right)$.

- $(]1+2^k, 1+2^{k+1}])_{k\in\mathbb{Z}}$ est une partition de $]1,+\infty[$; f est définie sur $]1,+\infty[$.
- f est définie en 1
- $x \mapsto 2-x$ définit une bijection de $]-\infty,1[$ sur $]1,+\infty[$ donc f est définie sur $]-\infty,1[$

$\forall x \in]-\infty,1[$, $f(x) = f(2-x)$. Par conséquent f est continue sur $\mathbb{R}$ si et seulement si f est continue sur $[1,+\infty[$

f est continue en tout point de $\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}]1+2^k, 1+2^{k+1}[$ et est continue à gauche en $1+2^{k+1}$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$.

Par conséquent f continue sur $\mathbb{R} \iff f$ est continue à droite en 1 et en $1+2^k$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$. Soit $k \in \mathbb{Z}$,

$\lim_{x\to 1+2^{k+}} f(x) = \lim_{x \to 1+2^{k+}} \sin\left(\frac{\pi}{2^k}(x-1)\right) = 0 = f(1+2^k)$; f est continue à droite en $1+2^k$ (ou 2^{k+1} !!) pour tout $k \in \mathbb{Z}$.

Finalement : f continue sur $\mathbb{R} \iff f$ est continue à droite en 1.

$\to$ Supposons f continue à droite en 1. $\lim_{x\to 1^+} f(x) = f(1) = 0$. $\forall k \in \mathbb{Z}$, posons $x_k \stackrel{!}{=} \frac{1+2^k+1+2^{k+1}}{2} = 1 + \frac{2^k + 2^{k+1}}{2} = 1+3\cdot 2^{k-1}$ milieu de $[1+2^k, 1+2^{k+1}]$

$\lim_{k\to-\infty} x_k = 1^+$; $\lim_{k\to-\infty} f(x_k) = 0$; $\forall k \in \mathbb{Z}$, $f(x_k) = \lambda^{-k}\sin\left[\frac{\pi}{2^k}(1+3\cdot2^{k-1}-1)\right] = \lambda^{-k}\sin\frac{3\pi}{2} = -\lambda^{-k}$

Donc $\lim_{k\to-\infty} -\lambda^{-k} = 0$; $\lim_{k\to-\infty} \lambda^{-k} = 0$; $\lim_{k\to+\infty} \lambda^k = 0$; ceci exige : $|\lambda| < 1$.

$\to$ Réciproquement supposons $|\lambda| < 1$ et montrons que f est continue à droite en 1.

Soit $x \in]1,+\infty[$. Posons $k = -1-E\left(-\frac{\ln(x-1)}{\ln 2}\right)$. $x \in]1+2^k, 1+2^{k+1}]$.

$|f(x)| = |\lambda^{-k}\sin\left(\frac{\pi}{2^k}(x-1)\right)| \leq |\lambda|^{-k} = |\lambda|^{1+E\left(-\frac{\ln(x-1)}{\ln 2}\right)} = e^{\left[1+E\left(-\frac{\ln(x-1)}{\ln 2}\right)\right]\ln|\lambda|}$

$\lim_{x\to1^+} e^{\left[1+E\left(-\frac{\ln(x-1)}{\ln 2}\right)\right]\ln|\lambda|} = 0$ ($\ln|\lambda| < 0$ et $\lim_{x\to1^+} E\left(-\frac{\ln(x-1)}{\ln 2}\right) = +\infty$)

donc $\lim_{x\to1^+} |f(x)| = 0$; $\lim_{x\to1^+} f(x) = 0$; $\lim_{x\to1^+} f(x) = f(1)$; f est continue à droite en 1.

Conclusion.. f est continue sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $\lambda \in]-1,0[\cup]0,1[$ (au départ $\lambda \in \mathbb{R}^*$).

Soit $\lambda \in]-1,0[\cup]0,1[$;

Montrons que $f \in E_\lambda$ c'est à dire que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(px+q) = \lambda f(x)$

C'est évident pour $x = 1$. Si c'est vrai pour $x \in]1,+\infty[$ alors c'est vrai pour $x \in]-\infty,1[$ car

$x \in]-\infty,1[$ donne $px+q \in]-\infty,1[$ et $f(px+q) = f(2-(px+q)) = f(p(2-x)+q) = \lambda f(2-x) = \lambda f(x)$
 $2-x \in]1,+\infty[$

Montrons donc que : $\forall x \in]1,+\infty[$, $f(px+q) = \lambda f(x)$. $p=q=\frac12$

Soit $x \in]1,+\infty[$. $\exists k \in \mathbb{Z}$, $x \in]1+2^k, 1+2^{k+1}]$. $px+q = \frac12(x+1) \in]1+2^{k-1}, 1+2^k] =]1+2^{(k-1)}, 1+2^{(k-1)+1}]$

$f(px+q) = \lambda^{-(k-1)}\sin\left(\frac{\pi}{2^{k-1}}\left(\frac12 x + \frac12 - 1\right)\right) = \lambda\left(\lambda^{-k}\sin\frac{\pi}{2^{k-1}}(x-1)\right) = \lambda f(x)$ ... cqfd.

Finalement $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(px+q) = \lambda f(x)$; donc $f \in E_\lambda$. E_λ n'est pas réduit à la fonction nulle.

Conclusion .. L'ensemble des λ tels que E_λ ne soit pas réduit à la fonction nulle est

$\Lambda =]-1,0[\cup]0,1[\cup\{1\} =]-1,0[\cup]0,1]$ (Voir ce qui précède + Q2)

Remarque.. Soit $\lambda \in]-1,0[\cup]0,1[$. Soit f_i la fonction définie par $f_i(x) = \lambda^{-k}\sin\left(i\frac{\pi}{2^k}(x-1)\right)$ pour $x \in]2^k+1, 2^{k+1}+1]$ et $k \in \mathbb{Z}$

$f_i(1) = 0$ et $\forall x \in]-\infty,1[$, $f_i(x) = f_i(2-x)$ ($i \in \mathbb{N}^*$) ; $f_i \in E_\lambda$ et $(f_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ est une famille libre de E_λ ; E_λ n'est pas de dimension finie.