Mes parcours pour réussir en maths

- Je révise en autonomie
- Je progresse avec un tuteur
- Je m'entraîne sur des annales corrigées

Je cherche un prof de maths !

Avis Google Fournis
★★★★★ 4.7/5 sur 1

Trouver mon tuteur gratuitement ▶

CORRIGÉ DU SUJET ESSEC MATHS ECS 2015

Trouver mon tuteur gratuitement ▶

Introduction en algèbre linéaire :

1-a)

$\forall M \in E$

$\Omega(M) = \left(\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \in E$ car $\Omega(M) = \left(\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

donc $\Omega(M) \in \mathcal{P}(\Omega, E, M)$.

Si Ω est bien nulle et bien neutre à droite et à gauche, $\forall (x, y)$ dans E^2 $(x \neq y)$:

$\Omega(x, y) \neq \Omega(y, x)$ car $x \neq 0$.

$\Omega(x, x) = \Omega(x, x) = 0$.

$\Omega(x, \Omega(x, y)) = \Omega(x, 0) = 0$.

$\Omega(\Omega(x, y), y) = \Omega(0, y) = 0$.

Si Ω est bien nulle et bien neutre à droite et à gauche, $\forall (x, y)$ dans E^2 $(x \neq y)$:

$\Omega(x, y) \neq \Omega(y, x)$.

$\Omega(x, x) = \Omega(x, x)$.

$\Omega(x, \Omega(x, y)) = \Omega(x, y)$.

$\Omega(\Omega(x, y), y) = \Omega(x, y)$.

Ω est bien un magma.

Ω est bien un magma.

Ω est bien (E, Ω).

$\Omega(x, y) \neq \Omega(y, x) \Leftrightarrow \Omega(x, y) \neq \Omega(y, x)$.

$\Omega(x, x) = \Omega(x, x) \Leftrightarrow \Omega(x, x) = \Omega(x, x)$.

$\Omega(x, \Omega(x, y)) = \Omega(x, y) \Leftrightarrow \Omega(x, y) = \Omega(x, y)$.

$\Omega(\Omega(x, y), y) = \Omega(x, y) \Leftrightarrow \Omega(x, y) = \Omega(x, y)$.

Ω est bien $\mathcal{P}(\Omega, E)$.

Ω est bien $\mathcal{P}(\Omega, E, M)$.

1-b) Ω est bien $\mathcal{P}(\Omega, E, M)$.

$\forall$ Non-Unité Ω Ω Ω

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} r\cos(t) \\ r\sin(t) \end{pmatrix}$$

Dado:

$$\mathbf{D} \neq \{\mathbf{R}, \mathbf{Z}\}, \ \mathbf{x}(t) = r\cos(t)\mathbf{e}_1 + r\sin(t)\mathbf{e}_2$$

$$\mathbf{x}_1(t) = r\cos(t) \ \& \ \mathbf{x}_2(t) = r\sin(t)$$

Dado $\left\{\begin{array}{l} \mathbf{x}_1(t) \\ \mathbf{x}_2(t) \end{array}\right\}$

$$\text{es una diferenciable} \to \mathbf{D}(\mathbf{x}^{\mathbf{T}}(\mathbf{x}(t))) \in \mathbf{E}_2(\mathbf{t})$$

Entonces $\mathbf{D} \in \mathbf{E}_2(\mathbf{t})$

$$\mathbf{D}(\mathbf{x}(t)) = \begin{pmatrix} \mathbf{D}(\mathbf{x}_1(t)) \\ \mathbf{D}(\mathbf{x}_2(t)) \end{pmatrix}$$

Dé para $\mathbf{D} \in \mathbf{E}^{\mathbf{T}}$

$$\mathbf{D}(\mathbf{x}_1(t)) = \begin{pmatrix} -r\sin(t)\sin(t) + r\cos(t)\cos(t) \\ r\cos(t)\sin(t) + r\sin(t)\cos(t) \end{pmatrix}$$

Dado $\mathbf{D}(\mathbf{x}(t))$ dado

$$= r\cos(t) - \mathbf{D}(\cdots) \ \& \ r\sin(t) - \mathbf{D}(\cdots)$$

Dé $\mathbf{D}(\mathbf{x}(t))$

$$= \sum_{\mathbf{i}=1}^{\mathbf{n}} \mathbf{D}(\mathbf{x}(t)) = r\cos(t) - \mathbf{D}(\cdots) \ \& \ r\sin(t) - \mathbf{D}(\cdots)$$

$$\text{Dé } \mathbf{D}(\mathbf{x}(t)) = \left\{\begin{array}{l} \mathbf{x}_1(t) \\ \mathbf{x}_2(t) \end{array}\right\} \text{ es }

$\forall x \in]0,1]$,

$$\frac{|f_n(x)|}{x} \underbrace{\leqslant}_{question\ 16e} a(1-x)\sqrt{\frac{\|\omega\|_\infty}{3}}$$

$$\leqslant a\sqrt{\frac{\|\omega\|_\infty}{3}}$$

Par passage à la limite quand x tend vers 0^+ il vient : $|f_n'(0)| \leqslant a\sqrt{\frac{\|\omega\|_\infty}{3}}$

16/ g/

- f''_n est continue sur $[0,1]$ donc sur $[0,x]$ donc

$f_n'(x) - f_n'(0) = \int_0^x f''_n(t)\mathrm{d}t.$

Mais $f_n \in E'_{a_n}(\omega)$, donc

$f_n'(x) = f_n'(0) - \int_0^x a_n f_n(t)\omega(t)\mathrm{d}t.$

- Par inégalité triangulaire,

$|f_n'(x)| \leqslant |f_n'(0)| + |\int_0^x a_n f_n(t)\omega(t)\mathrm{d}t|$ (#)

- Majorons $\left|\int_0^x a_n f_n(t)\omega(t)\mathrm{d}t\right|$:

$$\left|\int_0^x a_n f_n(t)\omega(t)\mathrm{d}t\right|$$

$$\leqslant a\int_0^x |\omega(t)||f_n(t)|\mathrm{d}t$$

$$\underbrace{\leqslant}_{16e} a\|\omega\|_\infty \int_0^x at(1-t)\sqrt{\frac{\|\omega\|_\infty}{3}}\mathrm{d}t$$

$$= a^2\|\omega\|_\infty\sqrt{\frac{\|\omega\|_\infty}{3}}\int_0^x t(1-t)\mathrm{d}t$$

Or $\forall t \in [0,1], 0 \leqslant t(1-t) \leqslant \frac{1}{4}$ car

$\forall t \in [0,1], t(1-t) - \frac{1}{4} = -(t-\frac{1}{2})^2$

Par positivité de l'intégrale,

$$\int_0^x t(1-t)\mathrm{d}t \leqslant \int_0^x \frac{1}{4}\mathrm{d}t = \frac{x}{4} \underbrace{\leqslant}_{x\leqslant 1} \frac{1}{4}$$

D'où

$$\left|\int_0^x a_n f_n(t)\omega(t)\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{a^2\|\omega\|_\infty}{4}\sqrt{\|\omega\|_\infty 3}$$

- En majorant $|f_n'(0)|$ à l'aide de la question 16f, (#) entraîne:

$$|f_n'(x)| \leqslant a\sqrt{\frac{\|\omega\|_\infty}{3}} + \frac{a^2\|\omega\|_\infty}{4}\sqrt{\frac{\|\omega\|_\infty}{3}}$$

D'où $\boxed{|f_n'(x)| \leqslant a\sqrt{\frac{\|\omega\|_\infty}{3}}\left(1+\frac{a}{4}\|\omega\|_\infty\right)}$

17/ f_n est de classe $\mathcal{C}^2$, donc en particulier dérivable sur $[0,1]$, donc sur $[x,y]$ pour tout $(x,y) \in [0,1]^2$.

De plus,

$$\forall t \in [x,y] \subset [0,1], \quad |f_n'(t)| \leqslant C.$$

D'après le théorème des accroissements finis,

$\forall (x,y) \in [0,1]^2, \forall n \in \mathbb{N},$

$$\left|f_n(x) - f_n(y)\right| \leqslant C\left|x-y\right|$$

18/ Soit $\epsilon > 0$

18/ a/ D'après la question 16c, Pour tout $x \in [0,1]$, $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$,

donc pour tout $k \in [0,N]$, $\lim_{n\to+\infty} f_n(\alpha_k) = 0$.

Ceci se traduit par: $\forall k \in [0,N], \exists p_k \in \mathbb{N} / \forall n > p_k, \left|f_n(\alpha_k)\right| < \frac{\epsilon}{2}$

Notons $p = \max(p_0, \cdots, p_N)$, on a alors:

$\forall k \in [0,N], \forall n > p, \left|f_n(\alpha_k)\right| < \frac{\epsilon}{2}$.

On a montré: $\boxed{\exists p \in \mathbb{N} / \forall k \in [0,N], \forall n > p, \left|f_n(\alpha_k)\right| < \frac{\epsilon}{2}}$

18/ b/

- Soit $x \in [0,1[$ et $k = \lfloor Nx \rfloor$

Par définition de la partie entière, $k \in \mathbb{N}$

et $k \leqslant Nx < k+1$,

donc $\frac{k}{N} \leqslant x < \frac{k+1}{N}$,

donc $x \in \left[\frac{k}{N}, \frac{k+1}{N}\right] = [\alpha_k, \alpha_{k+1}]$

D'après l'inégalité triangulaire, $\forall n > p$,

$$\left|f_n(x)\right| \leqslant \left|f_n(x) - f_n(\alpha_k)\right| + \left|f_n(\alpha_k)\right| (\bigstar)$$

Or d'après la question 17,

$$\left|f_n(x) - f_n(\alpha_k)\right| \leqslant C\left|x - \alpha_k\right|$$

$$\leqslant C\frac{1}{N}$$

$$\leqslant C\frac{\epsilon}{2C} = \frac{\epsilon}{2}$$

De plus, $p > n$, donc d'après la question 18a, $\left|f_n(\alpha_k)\right| < \frac{\epsilon}{2}$

On majore alors $\left|f_n(x)\right|$ grâce à $(\bigstar)$:

$$\left|f_n(x)\right| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

- Si $x = 1$, alors $\left|f_n(\alpha_k)\right| = 0 < \frac{\epsilon}{2}$

On a montré : $\boxed{\forall \epsilon > 0, \exists p \in \mathbb{N} / \forall n > p, \forall x \in [0,1], \left|f_n(x)\right| < \epsilon}$

18/ c/ Ceci s'écrit encore: $\forall \epsilon > 0, \quad \exists p \in \mathbb{N} / \forall n > p, \|f_n\|_\infty < \epsilon$

ce qui traduit $\boxed{\lim_{n\to+\infty} \|f_n\|_\infty = 0}$.

18/ d/ On a :

$$0 \leqslant \left|\int_0^1 f_n^2(t)\omega(t)\mathrm{d}t\right| \leqslant \|f_n\|_\infty^2 \int_0^1 \omega(t)\mathrm{d}t$$

D'après la question 18c,

$\lim_{n\to+\infty} \|f_n\|_\infty^2 \int_0^1 \omega(t)\mathrm{d}t = 0.$

donc par encadrement, $\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n^2(t)\omega(t)\mathrm{d}t$

$= \lim_{n\to+\infty} \|f_n\|_2$

$= 0 (\clubsuit)$.

Mais nous avons raisonné par l'absurde en supposant, juste avant la question 14, que l'hypothèse (H_∞) était réalisée ;

ceci impliquait, dans la question 14, l'existence de (f_n) telle que $\|f_n\|_2 = 1$,

donc $\lim_{n\to+\infty} \|f_n\|_2 = 1$.

Le résultat $(\clubsuit)$ est donc en contradiction avec la question 14, donc avec l'hypothèse (H_∞), qui est donc fausse.

Nous concluons que l'hypothèse (H_∞) n'est jamais réalisée.

Contact

3 rue de l'Estrapade 75005 Paris

contact@groupe-reussite.fr

01 84 88 32 69

Qui sommes-nous ?

Témoignages

Notre newsletter

Nous rejoindre

Devenir professeur

Notre équipe

Copyright @ GROUPE REUSSITE - Mentions légales

groupe-reussite.fr est évalué 4,8/5 par 977 clients sur Google France