CORRECTION ESSEC/HEC
Année 2021/2022

Problème :
Endomorphismes de Frobenuis, algèbre linéaire, diagonalisation, intégrales impropres, info.

1) La famille $\mathcal{B}(e, n+1)$ contient $n+1$ éléments et $\dim(E) = n$ donc :

$$\boxed{\mathcal{B}(e, n+1) \text{ est liée.}}$$

2) L'ensemble $\{k \in \mathbb{N}^* | \mathcal{B}(e, k) \text{ est libre}\}$ est majoré par n d'après la question précédente, car si la famille est liée pour $k = n+1$, il en est naturellement de même pour $k > n+1$.

De plus, l'ensemble est non vide, car il contient 1, en effet, la famille $\mathcal{B}(e, 1) = (e)$ qui est une famille libre puisque $e \neq 0$. On peut donc conclure par le théorème de la borne supérieur :

$$\boxed{d(e) \text{ existe.}}$$

3) Par la question précédente, on sait que $(e, ..., u^{d(e)-1}(e))$ est libre et $(e, ..., u^{d(e)})$ est liée, donc il existe des scalaires $a_0, ..., a_{d(e)-1}$ tels que :

$$\boxed{u^{d(e)}(e) = \sum_{i=0}^{d(e)-1} a_i u^i(e).}$$

Raisonnons par récurrence:

le cas $k = d(e)$ vient d'être traité.

Soit $k \geq d(e)$, supposons que $u^k(e)$ est combinaison linéaire de $e, ..., u^{d(e)-1}(e)$.

$$\begin{aligned}
u^{k+1}(e) &= u(u^k(e)) \\
&= u(b_0 e + ... + b_{d(e)-1} u^{d(e)-1}(e)) && \textit{(par hypothèse de récurrence)} \\
&= b_0 u(e) + ... + b_{d(e)-1} u^{d(e)}(e) && \textit{(par linéarité de u)} \\
&= b_0 e + ... + b_{d(e)-2} u^{d(e)-1}(e) + b_{d(e)-1}(a_0 e + ... + a_{d(e)-1} u^{d(e)-1}(e))
\end{aligned}$$

Ainsi, $u^{k+1}(e)$ est bien une combinaison linéaire de la famille $(e, ..., u^{d(e)-1}(e))$.

On conclut alors par le principe de récurrence :

$$\boxed{\forall k \geq d(e),\ u^k(e) \text{ est combinaison linéaire de } (e, ..., u^{d(e)-1}(e)).}$$

Considérons x un élément de $E_u(e)$, par définition de $E_u(e)$ x est une combinaison linéaire de $e, ..., u^{n-1}(e)$, mais nous venons de montrer que toutes les puissances $u^k(e)$ sont combinaisons linéaires de $e, ..., u^{d(e)-1}(e)$, donc finalement x est combinaison linéaire de $e, ..., u^{d(e)-1}(e)$ et ainsi, $(e, ..., u^{d(e)-1}(e))$ est une famille génératrice de $E_u(e)$. On a alors, par la question 2 une famille libre et génératrice :

$$\boxed{\mathcal{B}(e, d(e)) \text{ base de } E_u(e).}$$

4)

Remarque

Pour montrer qu'un ensemble E est stable par un endomorphisme f il suffit de montrer que $f(x) \in E$ pour tous les éléments x d'une base de E.

Soit $k \in [\![1, d(e) - 1]\!]$, $u(u^k(e)) = u^{k+1}(e) \in E_u(e)$ par la question précédente. Ainsi,

$$\boxed{E_u(e) \text{ est stable par } u.}$$

On souhaite montrer que $E_u(e) \subset F$, pour cela, considérons $x \in E_u(e)$ un élément de la base.Il existe un k tel que $x = u^k(e)$. Comme $e \in F$ et F stable par u : $u(e) \in F$, puis $u(u(e)) \in F$, ..., $u^k(e) \in F$, donc $x \in F$. Ceci étant vrai pour tous les éléments de la base, on a bien montrer que :

$$\boxed{E_u(e) \subset F.}$$

5) Si e est un vecteur propre de u alors $u(e) = \lambda e$ donc la famille $(e, u(e))$ est liée, ainsi : $d(e) = 1$. La réciproque est évidente (on aurait pu raisonner par équivalence..) On obtient donc :

$$\boxed{d(e) = 1 \Longleftrightarrow e \text{ est un vecteur propre de } u.}$$

6) Si u est une homothétie de rapport λ alors pour tout $e \neq 0$ de E on a $u(e) = \lambda e$, donc par la question précédente $d(e) = 1$.

Réciproquement, si pour tout $e \neq 0$ de E on a $d(e) = 1$ alors par la question précédente tous vecteurs non nuls de E est un vecteur propre de u. Considérons alors deux éléments différents e_1 et e_2 qui forment une famille libre dans E (ce choix est possible car $n \geq 2$, il suffit d'extraire deux vecteurs d'une base de E.) Il existe alors λ et μ deux réels tels que $u(e_1) = \lambda e_1$ et $u(e_2) = \mu e_2$.

Par linéarité de u : $u(e_1 + e_2) = \lambda e_1 + \mu e_2$.

Or, il existe γ dans $\mathbb{R}$ tel que $u(e_1 + e_2) = \gamma(e_1 + e_2)$ car $e_1 + e_2$ est un vecteur non nul de E (en effet, s'il était nul alors (e_1, e_2) serait une famille liée.)

On obtient alors $\lambda e_1 + \mu e_2 = \gamma(e_1 + e_2)$, puis

$$(\lambda - \gamma)e_1 + (\mu - \gamma)e_2 = 0$$

On conclut par liberté de la famille (e_1, e_2) que $\lambda = \mu = \gamma$.

On vient de montrer que deux vecteurs propres différents formant une famille libre de E sont associés à la même valeurs propres notée λ. Ceci étant vrai pour tous les vecteurs non nuls de E par hypothèse, ce résultat s'étend sur une base de E, puis pour tout vecteurs non nuls de E. Finalement $u = \lambda id_E$.

$$\boxed{u \text{ est une homothétie ssi pour tout } e \text{ non nul de } E\ d(e) = 1.}$$

7) Si u est un endomorphisme cyclique alors il existe $e \neq 0$ tel que $(e, ..., u^{n-1}(e))$ est une base de E (car par définition $E = E_u(e)$.) Donc la famille $(e, ..., u^{n-1}(e))$ est libre, et comme $u^n(e) \in E$ il est combinaison linéaire de $e, ..., u^{n-1}(e)$, donc la famille $(e, ..., u^n(e))$ est liée, par définition de $d(e)$, on obtient directement $d(e) = n$. La réciproque est évidente avec ce que nous venons de faire. Finalement,

$$\boxed{u \text{ cyclique ssi il existe } e \neq 0 \text{ tel que } d(e) = n.}$$

8) soit $k \in [\![0; n-2]\!]$, $u(u^k(e)) = u^{k+1}(e)$, et $u(u^{n-1}(e)) = u^n(e) = a_0 e + ... + a_{n-1}u^{n-1}(e)$. donc :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & a_0 \\ 1 & 0 & (0) & & a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & & a_2 \\ \vdots & (0) & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix}$$

On reconnait bien une matrice de Frobenuis.

9)

$$\begin{aligned} P_A(u)(e) &= \Big(u^n - a_{n-1}u^{n-1} - ... - a_0\Big)(e) \\ &= u^n(e) - a_{n-1}u^{n-1}(e) - ... - a_0 e \\ &= \boxed{0} \end{aligned}$$

Soit $k \in [\![1; n-1]\!]$, remarquons que $P_A(u)$ et u^k sont deux polynômes en u, comme les polynômes en u commutent avec u, ils commutent entre eux, donc :

$$\begin{aligned} P_A(u)(u^k(e)) &= \Big(P_A(u) \circ u^k\Big)(e) \\ &= \Big(u^k \circ P_A(u)\Big)(e) \\ &= u^k(0) \\ &= \boxed{0} \end{aligned}$$

Comme u est cyclique, $(e, ..., u^{n-1}(e))$ est une base de E. Nous venons donc de montrer que l'endomorphisme $P_A(u)$ s'annule sur une base de E. C'est nécessairement l'endomorphisme nul.

$$\boxed{P_A \text{ est un polynôme annulateur de } u.}$$

10) Considérons $b_0, ..., b_{n-1}$ des réels tels que $b_0 id_E + ... + b_{n-1}u^{n-1} = 0$. En évaluant cette égalité d'endomorphisme en e, on obtient :

$$b_0 e + ... + b_{n-1}u^{n-1}(e) = 0$$

Or, la famille $(e, ..., u^{n-1}(e))$ est une famille libre, donc $b_0 = ... = b_{n-1} = 0$.

$$\boxed{(id_E, ...u^{n-1}) \text{ est libre.}}$$

11) Comme $\deg(P_A) = n$, supposons qu'il existe Q un polynôme non nul de degré inférieur ou égal à $n-1$ tel que $Q(u) = 0$. Ainsi, $Q(u)$ est une combinaison linéaire de $id_E, ..., u^{n-1}$, mais nous venons de voir que cette famille est libre, donc les scalaires définissant Q sont tous nuls, Q est le polynôme nul, ce qui est absurde.

$$\boxed{P_A \text{ est un polynôme annulateur de } u \text{ de degré minimal.}}$$

12) Si λ est valeur propre de u, comme P_A est annulateur de u, le cours nous assure que λ est une racine de P_A.

Réciproquement, si λ est une racine de P_A on peut écrire $P_A = Q(X-\lambda)$, avec $\deg(Q) = n-1$.

Supposons par l'absurde $u - \lambda id_E$ injective, comme c'est un endomorphisme en dimension finie, il est bijectif. La réécriture de P_A nous donne $P_A(u) = Q(u) \circ (u - \lambda id_E)$, puis par bijectivité de $u - \lambda id_E$ et comme $P_A(u) = 0$ on obtient $0 = Q(u)$. Q est donc un polynôme annulateur de u de degré $n-1$, ce qui est absurde par la question précédente.

Ainsi, $u - \lambda id_E$ est non injectif : λ est une valeur propre de u.

$$\boxed{\lambda \text{ valeur propre de } u \text{ ssi } \lambda \text{ racine de } P_A.}$$

En considérant la matrice $A - \lambda I_n$, on remarque aisément que les $n-1$ premières colonnes forment une famille libre. Donc l'endomorphisme $u - \lambda id_E$ qui lui est associé est de rang au moins $n-1$, le théorème du rang nous assure alors que son noyau est de dimension inférieur ou égale à 1. Comme ce n'est pas 0, puisque λ est une valeur propre de u :

$$\boxed{\dim(E_\lambda(u)) = 1.}$$

13) On sait d'après le cours que u est diagonalisable ssi la somme des dimensions des sous-espaces propres vaut n, nous venons de voir qu'ils sont tous de dimension 1, d'où :

$$\boxed{u \text{ diagonalisable ssi } P_A \text{ admet } n \text{ racines simples.}}$$

14) Comme F est une matrice symétrique à coefficients réels, $\boxed{f \text{ est diagonalisable.}}$

15) Après calcul on obtient $-2, 0, 1$ comme valeurs propres et respectivement $(1,-1,-2)$, $(1,1,0)$ et $(1,-1,1)$ comme vecteurs propres.

16) $V = (3,-1,-1)$, $f(V) = (-1,1,5)$, $f^2(V) = (5,-5,-7)$

On montre facilement à la main que la famille $(V, f(V), f^2(V))$ est libre dans $\mathbb{R}^3$. De plus, la famille $(V, ..., f^3(V))$ est constituée de 4 vecteurs, elle est nécessairement liée dans $\mathbb{R}^3$. $\boxed{d(V) = 3}$.

la question 7 nous assure alors que $\boxed{f \text{ est cyclique.}}$

17) Comme $G^2 = 2G$, le polynôme $X^2 - 2X$ est annulateur de g, il est de degré minimal car s'il en existe un de degré 1 G serait une matrice scalaire, ce qui n'est pas le cas. La question 11 nous assure que le polynôme caractéristique d'un endomorphisme cyclique est de degré n et que c'est le degré minimal d'un polynôme annulateur. Par conséquent $\boxed{g \text{ n'est pas cyclique.}}$

18) $GV_1 = 2V_1$, $GV_2 = 0V_2$ et $GV_3 = 2V_3$, donc (V_1, V_2, V_3) est constituée de vecteurs propres de g. Comme V_1 et V_3 ne sont pas colinéaires ils forment une base de $E_2(g)$, de plus g est un endomoprhisme symétrique, le théorème spectral nous assure alors que les espaces propres sont en sommes direct, donc

$$\boxed{(V_1, V_2, V_3) \text{ est une base de vecteurs propres de } g.}$$

19) Notons $\mathcal{I}$ l'ensemble des degrés des diviseurs communs de P et Q. Cet ensemble est non vide car 1 est un diviseur commun à P et Q, donc $0 \in \mathcal{I}$. Remarquons qu'un diviseur à P et à Q ne peut pas être de degré strictement plus grand que P et Q donc $\mathcal{I}$ est une partie de $\mathbb{N}$ non vide et majorée par min(deg(P),deg(Q)). Le théorème de la borne supérieur nous assure l'existence d'un maximum pour $\mathcal{I}$. Notons le d, ainsi, le polynôme dont le degré est d est un polynôme qui divise P et Q et est de degré maximal. En divisant ce polynôme par son coefficient de plus haut degré (nécessairement non nul) on obtient un polynôme noté Δ qui divise P et Q de degré maximal et dont le coefficient dominant est 1.

Attention !

Les deux questions suivantes sont hors programme ECG, la question 21 peut quand même être vue, en admettant le résultat de la question 20, et en faisant abstraction de l'ensemble $\mathbb{C}$ et en adaptant l'énoncé en `Python` ...

20) Considérons a une racine de P de multiplicité 2 (sans perte de généralité) alors a est une racine de P et de P'. Donc $X-a$ divise P et P'. $X-a$ est donc un diviseur commun à P et P' de degré 1, comme un pgcd de P et P' est un diviseur commun de degré maximal, il est alors de degré supérieur ou égal à 1.

Réciproquement, si un pgcd de P et P' noté Δ est de degré supérieur ou égal à 1, supposons par l'absurde que P admet n racines simples dans $\mathbb{C}$, alors les deux factorisations dans $\mathbb{C}$ de P et P' sont de la forme $(X-z_1)...(X-z_n)$ et $(X-x_1)...(X-x_n)$ avec les z_i différents des x_j donc le seul diviseur commun à P et P' est 1, puis $\Delta = 1$, ce qui est absurde puisque Δ est de degré supérieur ou égal à 1.

21) Voici le programme :

```
def racSimp(c) :
    p = poly(c,'x','c')
    d = degree(bezout(p,derivat(p)))
    return d < 1
```

Nous avons vus à la question 13 qu'une matrice de Frobenius est diagonalisable si son polynôme caractéritistique possède n racines simples, il suffit donc de remplacer `c` par les coefficients du polynôme caractéristique de la matrice de Frobenius, c'est-à-dire `c = [-A[:,n-1],1]` où `A` est la matrice de Frobenius associée. Si la fonction `racSimp(c)` répond `T` alors la matrice est diagonalisable, sinon elle ne l'est pas.

22) Soit $k \in]\!]1,n[\![$, $P(x_k)P(x_{k+1}) < 0$ signifie que $P(x_k)$ et $P(x_{k+1})$ sont de signe contraire, ainsi par continuité de P et le théorème des valeurs intermédiaires P possède au moins une racine a_k sur $[x_k, x_{k+1}]$. Ceci étant vrai pour tout k dans $[\![1,n]\!]$, P possède au moins n racines distinctes (car chacune sur des intervalles disjoints.) Or, P est de degré n donc il possède au plus n racines, finalement :

$$\boxed{P \text{ possède } n \text{ racines distinctes.}}$$

23) Supposons d'abord $|z| > 1$, comme $P(z) = 0$ on a $z^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} a_k z^k$.

Comme $|z| > 1$, pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$: $|z|^k \leq |z|^{n-1}$.

Donc, par l'inégalité triangulaire :

$$\left|\sum_{k=0}^{n-1} a_k z^k\right| \leq \sum_{k=0}^{n-1} |a_k||z|^k \leq |z|^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} |a_k|$$

En reprenant l'égalité avec z^n, on a : $|z|^n \leq |z|^{n-1} \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} |a_k|$. Comme $z \neq 0$, en divisant par $|z|^{n-1}$, on obtient :

$$|z| \leq \sum_{k=0}^{n-1} |a_k|$$

On peut donc conclure que :

$$\boxed{|z| \leq \max\left(1, \sum_{k=0}^{n-1} |a_k|\right).}$$

24) Voici le programme :

```
def racSimpApprox(c,pas) :
    p = poly([-c,1],‘x‘,‘c‘)
    S = 0
    x = m - pas/2
    while x <= m + pas/2 :
        if horner(p,x)*horner(p,x+pas) < 0 :
            S = S +1
        x = x + pas
    if S == degree(p) :
        val = T
    else :
        val = ‘ind‘
    return val
```

25) D'après la question 22 si la fonction `racSimpApprox(c,pas)` renvoie `T` alors le polynôme caractéristique de la matrice de Frobenius possède n racines simples, donc la matrice est diagonalisable. Si la fonction renvoie `"ind"` alors elle n'est pas diagonalisable.

26) Remarquons d'abord que les endomorphismes dans les compositions sont des polynômes en u, ils commutent donc entre eux. Notons x_k le k-ème vecteurs d'une base de vecteurs propres de E.

$$\begin{aligned}(u - \lambda_1 id_E) \circ ... \circ (u - \lambda_p id_E)(x_k) &= (u - \lambda_1 id_E) \circ ... \circ (u - \lambda_p id_E) \circ (u - \lambda_k id_E)(x_k) \\ &= (u - \lambda_1 id_E) \circ ... \circ (u - \lambda_p id_E)(0) = 0\end{aligned}$$

car $(u - \lambda_k id_e)(x_k) = u(x_k) - \lambda_k x_k = 0$.

L'endomorphisme $(u - \lambda_1 id_E) \circ ... \circ (u - \lambda_p id_E)$ est donc nul sur une base de E :

$$\boxed{(u - \lambda_1 id_E) \circ ... \circ (u - \lambda_p id_E) \text{ est l'endomorphisme nul.}}$$

27) En développant la composition, on obtient une égalité de la forme :

$$(u - \lambda_1 id_E) \circ ... \circ (u - \lambda_p id_E) = \sum_{k=0}^{p-1} a_k u^k + u^p = 0$$

Donc u^p est combinaison linéaire de $id_E, ..., u^{p-1}$:

$$\boxed{(id_E, ..., u^p) \text{ est une famille liée.}}$$

28) Si u est cyclique, la question 10 montre que $(id_E, ..., u^{n-1})$ est libre, donc $p \geq n$. Or, $\dim(E) = n$ donc le nombre de valeurs propres distinctes de u, qui est p est inférieur ou égal à n. Finalement :

$$\boxed{p = n.}$$

29) Pour $k \in [\![0, n-1]\!]$, $u^k(e_i) = \lambda_i^k e_i$. En notant A_n la matrice de passage de la base $(e_1, ..., e_n)$ à la famille $(e, ..., u^{n-1}(e))$, on obtient :

$$A_n = \begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 & \dots & \lambda_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \lambda_n & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

Soit $X \in \text{Ker}(A_n)$, et notons $P = x_0 + x_1 X + ... + x_{n-1} X^{n-1}$

$$A_n X = 0 \iff \begin{cases} x_0 + \lambda_1 x_1 + ... + \lambda_1^{n-1} x_{n-1} = 0 \\ \vdots \\ x_0 + \lambda_n x_1 + ... + \lambda_n^{n-1} x_{n-1} = 0 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} P(\lambda_1) = 0 \\ \vdots \\ P(\lambda_n) = 0 \end{cases}$$

Comme $\deg(P) \leq n-1$ et que P possède n racines distinctes, P est le polynôme nul. Par liberté de la famille $(1, X, ..., X^{n-1})$, on en déduit $x_0 = ... = x_{n-1} = 0$, puis $X = 0$. Ainsi $\text{Ker}(A_n) = \{0\}$, par le théorème du rang $\text{rg}(A_n) = n$, et on obtient bien :

$$\boxed{\mathcal{B}(e, n) \text{ est libre.}}$$

En utilisant aussi la question 27, on peut en déduire que $d(e) = n$, comme $(e_1, ..., e_n)$ est une base et que e est une combinaison linéaire de cette base : $e \neq 0$, donc par la question 7 :

$$\boxed{u \text{ est cyclique.}}$$

30) Comme g et f sont symétriques réels, il en est de même de u_α, donc $\boxed{u_\alpha \text{ est diagonalisable.}}$

En reprenant les résultats de la *Section C*, et en notant P la matrice dont les colonnes sont V_1,V_2 et V_3, on obtient :

$$F + \alpha G = P diag(-2 + 2\alpha, 0, 1 + 2\alpha) P^{-1}.$$

$F + \alpha G$ étant une matrice représentative de $f + \alpha g$, on en déduit que les valeurs propres de u_α sont $-2 + 2\alpha, 0, 1 + 2\alpha$. Ainsi, si $\alpha \neq 1$ et $\alpha \neq -\frac{1}{2}$ alors u_α possède 3 valeurs propres distinctes et les questions précédentes nous assure que u_α est diagonalisable.

31) Considérons $(a_0, ..., a_{r-1}) \in \mathbb{R}^r$ tel que $a_0 e + ... + a_{r-1} u^{r-1}(e) = 0$. En composant dans cette égalité par u^{r-1} et par linéarité on obtient :

$$a_0 u^{r-1}(e) + a_1 u^r(e) + ... + a_{r-1} u^{2r-2}(e) = 0$$

Or, u est nilpotent d'indice r donc $u^k = 0$ pour tout $k \geq r$. L'égalité précédente devient alors $a_0 u^{r-1}(e) = 0$, mais comme $u^{r-1}(e) \neq 0$, on obtient $a_0 = 0$.

On reprend alors l'égalité de départ qui devient $a_1 u(e) + ... + a_{r-1} u^{r-1}(e) = 0$, et on procède de la même manière en composant par u^{r-2} pour obtenir $a_1 = 0$, puis on reitère jusqu'à obtenir $a_{r-1} = 0$.

Comme $a_0 = ... = a_{r-1} = 0$, $\boxed{(e, ..., u^{r-1}(e)) \text{ est libre.}}$

32) E est de dimension n, comme la famille $(e, ..., u^{r-1}(e))$ est de cardinal r et libre, on a nécessairement $\boxed{r \leq n.}$

Si $r = n$: $d(e) = n$ et $e \neq 0$ car sinon on aurait $u^{r-1}(e) = 0$, donc par la question 7, u est cyclique.

Réciproquement, si u est cyclique il existe $a \neq 0$ tel que $(a, ..., u^{n-1}(a))$ soit libre dans E. Supposons par l'absurde que $r < n$, donc $r \leq n-1$, et dans ce cas là $u^r(a) = ... = u^{n-1}(a) = 0$ (car u est nilpotent d'indice r) mais ceci est absurde puisque la famille $(a, ...u^{n-1}(a))$ est libre. Donc $r = n$.

$$\boxed{r = n \text{ ssi } u \text{ est cyclique.}}$$

Les $n-1$ première colonnes sont celles d'une matrice de Frobenius et la dernière est constituée de 0 puisque $u^n = 0$ car u est nilpotent d'indice $n = r$.

33) Par produit et compositions $t \mapsto P(x+t)e^{-t}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$, donc l'intégrale est impropre en $+\infty$. Par croissance comparée, $\lim\limits_{t \mapsto +\infty} (t^2 P(x+t)e^{-t}) = 0$, donc pour $t \geq 1$:

$0 \leq |P(x+t)e^{-t}| \underset{+\infty}{=} \circ\left(\frac{1}{t^2}\right)$

Comme $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$ converge en tant qu'intégrale de Riemann, on peut conclure par critère de négligeabilité des intégrales positives que :

$$\int_1^{+\infty} P(x+t)e^{-t} dt \text{ converge absolument.}$$

La convergence absolue entrainant la converge, et en utilisant la relation de Chasles, on peut finalement conclure :

$$\boxed{\int_0^{+\infty} P(x+t)e^{-t} dt \text{ converge.}}$$

Comme $P \in E$, on peut écrire $P(x+t) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k t^k$. *(L'écriture n'est pas du tout rigoureuse, il faudrait écrire P comme une somme, puis utiliser la formule du binôme... mais l'idée générale reste la même.)*

Pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} a_k x^k t^k e^{-t} dt$ est une combinaison linéaire de $\Gamma(k+1)$, donc convergente. On obtient donc en utilisant la linéarité des intégrales convergentes :

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} P(x+t)e^{-t} dt &= \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k \int_0^{+\infty} t^k e^{-t} dt \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k \Gamma(k+1) \end{aligned}$$

$$\boxed{\int_0^{+\infty} P(x+t)e^{-t} dt \in E.}$$

34) Nous venons de montrer que u va de E dans E.

Considérons $(P, Q) \in E \times E$, $\lambda \in \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
u(\lambda P+Q)(x) &= \int_0^{+\infty} (\lambda P+Q)(x+t)e^{-t}dt \\
&= \int_0^{+\infty} (\lambda P(x+t)+Q(x+t))e^{-t}dt \\
&= \lambda\int_0^{+\infty} P(x+t)e^{-t}dt + \int_0^{+\infty} Q(x+t)e^{-t}dt \quad \textit{(par linéarité des intégrales convergentes.)} \\
&= \lambda u(P)(x)+u(Q)(x)
\end{aligned}$$

Ceci étant vrai pour tout $x \in \mathbb{R}$, on obtient que u est linéaire.

$$\boxed{u \text{ est un endomorphisme de } E.}$$

35) Considérons $A > 0$, les fonctions $t \mapsto P(x+t)$ et $t \mapsto -e^{-t}$ étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, A]$, par intégration par parties, on a :

$$\int_0^A P(x+t)e^{-t}dt = \Big[-P(x+t)e^{-t}\Big]_0^A + \int_0^A P'(x+t)e^{-t}dt$$

Comme $\lim\limits_{A\mapsto+\infty} \Big(P(x+A)e^{-A}\Big) = 0$ (par croissance comparée.) et comme $u(P)(x)$ et $u(P')(x)$ existe (car P et P' sont dans E), on obtient, en faisant tendre A vers $+\infty$:

$$\boxed{u(P)(x) = P(x) + u(P')(x).}$$

36) Notons que pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, $P^{(k)} \in E$, la relation précédente appliquée à P' donne $u(P')(x) = P' + u(P'')(x)$, en injectant alors dans le résultat de la question précédente on obtient :

$$u(P)(x) = P + P' + u(P'')(x)$$

En itérant ce procédé successivement pour P'', puis $P^{(3)}, ..., P^{(n-1)}$, on a :

$$u(P)(x) = P(x) + ... + P^{(n-1)}(x) + u(P^{(n)})(x)$$

0r, $\deg(P) \leq n-1$, donc $P^{(n)} = 0$ et alors $u(P^{(n)})(x) = 0$. On obtient bien :

$$\boxed{u(P) = \sum_{k=0}^{n-1} P^{(k)}.}$$

37) Posons $s = x+t$ (changement de variable affine) comme $\displaystyle\int_0^{+\infty} P(x+t)e^{-t}dt$ converge, par changement de variable généralisée :

$$u(P)(x) = \int_x^{+\infty} P(s)e^{-(s-x)}ds = \boxed{e^x \textstyle\int_x^{+\infty} P(s)e^{-s}ds.}$$

38) Comme $\displaystyle\int_0^{+\infty} P(s)e^{-s}ds$ converge (Cf question 33), on peut utiliser la relation de Chasles pour obtenir :

$$\int_x^{+\infty} P(s)e^{-s}ds = \int_0^{+\infty} P(s)e^{-s}ds - \int_0^x P(s)e^{-s}ds$$

Comme $s \mapsto P(s)e^{-s}$ est continue sur $[0, x]$, par le théorème fondamentale de l'analyse, cette fonction admet une primitive notée G de classe C^1 sur $[0, x]$. Ceci étant vrai pour tout $x \in \mathbb{R}$, G est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$\int_x^{+\infty} P(s)e^{-s}ds = \int_0^{+\infty} P(s)e^{-s}ds - G(x) + G(0)$$

Donc $x \mapsto \displaystyle\int_x^{+\infty} P(s)e^{-s}ds$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. Sa dérivée en x vaut $-G'(x) = -P(x)e^{-x}$.

Par la question précédente, on peut en déduire par produit que $u(P)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. On a aussi pour $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} u(P)'(x) &= u(P)(x) + e^x\left(-P(x)e^{-x}\right) \\ &= u(P)(x) - P(x) \end{aligned}$$

$$\boxed{(u(P))' = u(P) - P.}$$

Par la question 35, on sait que $u(P) - P = u(P')$, donc $\boxed{(u(P))' = u(P').}$

39) Soit $k \in [\![0, n-1]\!]$, par la question 36 $u(X^k) = X^k + kX^{k-1} + k(k-1)X^{k-2} + ... + k!$. D'où la matrice suivante :

$$\boxed{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & & n! \\ 0 & 1 & 2 & (*) & \vdots \\ \vdots & 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & (0) & \ddots & n \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

La matrice étant triangulaire, ses valeurs propres sont ses coefficients diagonaux : $\boxed{\mathrm{Sp}(u) = \{1\}.}$

40) Considérons v matriciellement : V=$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(v) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & & n! \\ 0 & 0 & 2 & (*) & \vdots \\ \vdots & 0 & 0 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & (0) & \ddots & n \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$

En notant $C_i(V)$ la i-ème colonne de la matrice, on remarque que les colonnes $C_2(V), ..., C_n(V)$ forment une base de $\mathrm{Im}(V)$ (résultat immédiat puisqu'elles sont "échelonnées"). Donc en écrivant les vecteurs de cette base explicitement (sous forme polynômiale), on obtient une base de $\mathrm{Im}(v)$ qui est $(1, 2X + 2, ..., nX^{n-2} + ... + n!)$, les polynômes de cette base étant échelonnés en degré, dans $\mathbb{R}_{n-2}[X]$ et au nombre de $n-1$, c'est aussi une base de $\mathbb{R}_{n-2}[X]$. Finalement :

$$\boxed{\mathrm{Im}(v) = \mathbb{R}_{n-2}[X].}$$

41) Le calcul explicite de V^2 donne une matrice avec des 0 sous la diagonale, sur la diagonale et "au dessus" de la diagonale (pour les coefficient $(V^2)_{i,i+1}$) tandis que les coefficients $(V^2)_{i,j}$ avec $j > i+1$ sont strictement positifs. On remarque donc que le calcule de V^2 fait apparaitre une nouvelle diagonale de 0. Pour V^3, il en est de même on obtient $(V^3)_{i,j} = 0$ pour $j \leq i+2$ et $(V^3)_{i,j} > 0$ sinon. En continuant ainsi, on obtient V^{n-1} de la forme :

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & a \\ \vdots & (0) & \vdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}, \text{ avec } a > 0$$

Ainsi, $V^{n-1} \neq 0$ et le calcul de V^n donne clairement 0. Comme V représente l'endomorphisme v :

$$\boxed{v \text{ est un endomorphisme nilpotent.}}$$

Comme $\dim(E) = n$ et que v est nilpotent d'indice n, la question 32 nous assure que $\boxed{v \text{ est cyclique.}}$

42) Soit u une homothétie de rapport λ, et notons $(e_1, ..., e_n)$ une base de E. On a alors $E = \text{Vect}(e_1) \oplus ... \oplus \text{Vect}(e_n)$. Comme $u(e_i) = \lambda e_i \in \text{Vect}(e_i)$ pour tout i dans $[\![1, n]\!]$, les espaces $\text{Vect}(e_i)$ sont stables par u.

De plus, les restrictions $u_{|\,\text{Vect}(e_i)}$ sont des endomorphismes en dimension 1, et comme u est une homothétie, par la question 6 : $d(e_i) = 1$, la question 7 nous permet alors de dire que $u_{|\,\text{Vect}(e_i)}$ est cyclique.

$$\boxed{\text{La propriété } (\mathcal{R}) \text{ est vraie pour les homothéties.}}$$

43) Si u n'est pas une homothétie, par la question 6 on sait qu'il existe $e \neq 0$ tel que $d(e) \neq 1$.

44) Il suffit juste de se souvenir de la question 7...

45) $\varphi(e_{d-1}) = 1 \neq 0$ car $e_{d-1} = 0 \times e_0 + ... + 0 \times e_{d-2} + 1 \times e_{d-1} + 0 \times e_d ... + 0 \times e_{n-1}$. Donc $\varphi \neq 0$.

Soient x, y deux éléments de E et $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda x + y) &= \varphi\left(\sum_{k=0}^{n-1} (\lambda x_k + y_k) e_k\right) \\ &= \lambda x_{d-1} + y_{d-1} \\ &= \lambda \varphi(x_k) + \varphi(y_k) \end{aligned}$$

Comme φ est clairement à valeurs dans $\mathbb{R}$, on conclut :

$$\boxed{\varphi \text{ est une forme linéaire non nulle.}}$$

46) Soient x, y deux éléments de E et $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \Phi(\lambda x + y) &= \left(\varphi\left(u^{d-1}(\lambda x + y)\right), ..., \varphi(\lambda x + y)\right) \\ &= \left(\lambda \varphi\left(u^{d-1}(x)\right) + \varphi\left(u^{d-1}(y)\right), ..., \lambda \varphi(x) + \varphi(y)\right) \qquad \textit{(car } \varphi \textit{ et } u \textit{ sont linéaires)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&= \lambda\left(\varphi\left(u^{d-1}(x)\right), ..., \varphi(x)\right) + \left(\varphi\left(u^{d-1}(y)\right), ..., \varphi(y)\right)\\&= \lambda\Phi(x) + \Phi(y)\end{aligned}$$

$$\boxed{\Phi \text{ est linéaire.}}$$

47) Remarquons d'abors plusieurs choses :

$\varphi(u^k(e)) = \varphi(e_k) = 0$, si $k \leq d-2$

$\varphi(u^{d-1}(e)) = \varphi(e_{d-1}) = 1$

$\varphi(u^d(e)) = \varphi(a_0 e_0 + ... + a_{d-1}e_{d_1}) = a_{d-1}$

On obtient alors :

$$\begin{aligned}\Phi(e_0) &= \left(\varphi\left(u^{d-1}(e)\right), ..., \varphi(e)\right)\\&= \boxed{(1, 0, ..., 0)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Phi(e_1) &= \left(\varphi\left(u^{d-1}(e_1)\right), ..., \varphi(e_1)\right)\\&= \left(\varphi\left(u^{d}(e)\right), ..., \varphi(e_1)\right)\\&= \boxed{(a_{d-1}, 1, 0, ..., 0)}\end{aligned}$$

Pour le cas général, remarquons que pour $k \in [\![1, d-1]\!]$ $u^{d-1}(e_k), ..., u^{d-k}(e_k)$ vont être de la forme $u^j(e)$ avec $j \geq d$, notons alors leurs images par φ respectivement $\beta_{0,k}, ..., \beta_{k-1,k}$ et pour les autres $u^{d-(k+1)}(e_k), ..., u^0(e_k)$ ils sont de la forme $u^j(e)$ avec $j < d$ donc pour ces derniers on aura $\varphi\left(u^{d-(k+1)}(e_k)\right) = 1$ et $\varphi\left(u^{d-(k+2)}(e_k)\right) = ... = \varphi(e_k) = 0$. On obtient bien :

$$\boxed{\Phi(e_k) = (\beta_{0,k}, ..., \beta_{k-1,k}, 1, 0, ..., 0).}$$

48) Comme $\mathcal{B}(e,d) = \{e_0, ..., e_{d-1}\}$, la quesiton précédente nous donne directement :

$$\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}(e,d)}(\Phi_{|F_1}) = \begin{pmatrix} 1 & a_{d-1} & & & \\ 0 & 1 & & (*) & \\ \vdots & 0 & \ddots & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

La matrice étant triangulaire sans 0 sur la diagonale elle est de rang maximal donc $\boxed{\Phi_{|F_1} \text{ est bijectif.}}$

49) Considérons $x \in F_1 \cap G$, comme $G = \mathrm{Ker}(\Phi)$, $x \in \mathrm{Ker}(\Phi_{|F_1})$. Par la question précédente $\Phi_{|F_1}$ est bijectif donc $\mathrm{Ker}(\Phi_{|F_1}) = \{0\}$. On en déduit que $x = 0$, puis $\boxed{F_1 \cap G = \{0\}.}$

Comme $\dim(E) = n$ et $\dim(F_1) = d$, nous devons montrer que $\dim(G) = n - d$. Remarquons alors que $\mathrm{Im}(\Phi_{|F_1}) \subset \mathrm{Im}(\Phi)$ car $F_1 \subset E$. De plus, par définition de Φ, $\mathrm{Im}(\Phi) \subset \mathbb{K}^d$. On obtient alors la double inégalité suivante en passant au dimension :

$$\mathrm{rg}(\Phi_{|F_1}) \leq \mathrm{rg}(\Phi) \leq d$$

Comme $\Phi_{|F_1}$ est bijectif à valeurs dans $\mathbb{K}^d$: $\mathrm{rg}(\Phi_{|F_1}) = d$, puis $\mathrm{rg}(\Phi) = d$. Le théorème du rang nous assure alors que $\dim(G) = \dim \mathrm{Ker}(\Phi) = n - d$. Finalement,

$$\boxed{E = F_1 \oplus G.}$$

Montrons maintenant que G est stable par u : Considérons $x \in G$, on sait alors que $\varphi(x) = \varphi(u(x)) = ... = \varphi(u^{d-1}(x)) = 0$. On veut montrer que $\Phi(u(x)) = 0$:

On a alors $\Phi(u(x)) = (\varphi(u^d(x)), \varphi(u^{d-1}(x)), ..., \varphi(u(x))) = (\varphi(u^d(x)), 0, ..., 0)$.

Il reste donc à montrer que $\varphi(u^d(x)) = 0$. Pour cela, remarquons que d est choisit de manière maximale dans le sens où $d(x) \leq d$ pour tout x dans E. Comme par définition de $d(x)$ la famille $(x, ..., u^{d(x)}(x))$ est liée, on en déduit que la surfamille $(x, ..., u^d(x))$ est liée. Ainsi, $u^d(x)$ s'exprime comme combinaison linéaire de $x, ..., u^{d-1}(x)$.

On a alors, $\varphi(u^d(x)) = \varphi(b_0 x + ... + b_{d-1} u^{d-1}(x)) = b_0 \varphi(x) + ... + b_{d-1} \varphi(u^{d-1}(x)) = 0$. Finalement, $\Phi(u(x)) = 0$ donc $u(x) \in G$.

$$\boxed{G \text{ est stable par } u.}$$

50) Comme $\dim(F_1) = d = d(e)$, par la question 7 :

$$\boxed{u_{|F_1} \text{ est cyclique.}}$$

51) Par l'absurde supposons que $d(e') > d(e)$, ainsi, la famille $(e', ..., u^{d(e')-1}(e'))$ est de cardinal $d(e')$. Or, dans l'énoncé l'entier $d = d(e)$ est maximal, on a donc une absurdité.

$$\boxed{d(e') \leq d.}$$

52) Procédons par récurrence forte sur la dimension :

Si $\dim(E) = 1$: u est une homothétie donc le résultat est vrai par la question 42.

Si $\dim(E) = n > 1$, Les questions 49 et 50 nous donne déjà $E = F_1 \oplus G$ avec u_{F_1} cyclique.

Comme G est stable par u, $u_{|G}$ est un endomorphisme de G avec $\dim(G) < n$, par hypothèse de récurrence on peut alors écrire $G = F_2 \oplus ... \oplus F_p$ avec $u_{|F_i}$ cyclique.

On obtient alors $E = F_1 \oplus ... \oplus F_p$ avec $u_{|F_i}$ cyclique.

Le principe de récurrence forte nous permet de dire :

$$\boxed{\text{La relation } (\mathcal{R}) \text{ est réalisée.}}$$

53) Comme F_i est stable par u, si on considère un élément de $\mathcal{B}_{F_i}$, il sera combinaison linéaire des éléments de $\mathcal{B}_{F_i}$. La matrice de u dans la concaténation des bases sera alors une matrice diagonale par blocs, où chaque blocs et de taille $\dim(F_i)$:

$$\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \mathrm{Diag}(A_1, ..., A_p), \text{ avec } A_i \in \mathcal{M}_{\dim(F_i)}(\mathbb{R}).}$$

54) Il s'agit d'expliciter les blocs $A_1, ..., A_p$ dans la question précédente dans le cas où u est nilpotent.

Considérons $i \in [\![1, p]\!]$, A_i est la matrice représentative de $u_{|F_i}$. Comme u est nilpotent d'indice p, pour tout $x \in F_i$, $u^p_{|F_i}(x) = 0$, de plus $u_{|F_i}$ est cyclique d'après la propriété $(\mathcal{R})$, donc $u_{|F_i} \neq 0$, et ainsi $u_{|F_i}$ est nilpotent d'indice $p_i \leq p$. Mais par la question 32, puisque $u_{|F_i}$ est nilpotent et cyclique on a $p_i = \dim(F_i)$ et il existe une base dans laquelle A_i est une matrice de Frobenius avec comme dernière colonne que des 0. Ainsi,

$$A_i = \begin{pmatrix} 0 & & & & 0 \\ 1 & \ddots & & (0) & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \\ \vdots & (0) & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ainsi, la matrice diagonale par blocs qui représente u dans la base adaptée à la décomposition en somme directe, possèdent des coefficients nuls sauf éventuellement les coefficients en position $(i, i-1)$ qui seront des 1 s'ils font partis d'un bloc et 0 sinon.

55)

$$\begin{aligned} u(f(e)) &= u\left(-\sum_{k=1}^{n-1} a_k u^{k-1}(e) + u^{n-1}(e)\right) \\ &= -\sum_{k=1}^{n-1} a_k u^k(e) + u^n(e) \\ &= -\sum_{k=1}^{n-1} a_k u^k(e) + \sum_{k=0}^{n-1} a_k u^k(e) \\ &= \boxed{a_0 e} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u(f(u(e))) &= u\left(-\sum_{k=2}^{n-1} a_k u^{k-2}(e) + u^{n-2}(e)\right) \\ &= \boxed{-\sum_{k=2}^{n-1} a_k u^{k-1}(e) + u^{n-1}(e)} \end{aligned}$$

Pour $j = 0$ et $j = 1$ les calculs viennent d'être fait. Pour $j \geq 2$:

$$\begin{aligned} u(f(u^j(e))) &= u\left(-\sum_{k=j+1}^{n-1} a_k u^{k-j-1}(e) + u^{n-j-1}(e)\right) \\ &= \boxed{-\sum_{k=j+1}^{n-1} a_k u^{k-j}(e) + u^{n-j}(e)} \end{aligned}$$

$$u(f(u^{n-1}(e))) = \boxed{u(e).}$$

56) $AS = \text{Mat}_{\mathcal{B}(e,n)}(u)\text{Mat}_{\mathcal{B}(e,n)}(f) = \text{Mat}_{\mathcal{B}(e,n)}(u \circ f.)$

En écrivant alors les résultats de la question précédente en coordonnée dans la base $\mathcal{B}(e,n) = (e, ..., u^{n-1}(e))$, on obtient :

$$\boxed{AS = \begin{pmatrix} a_0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a_2 & -a_3 & \dots & -a_{n-2} & -a_{n-1} & 1 \\ 0 & -a_3 & -a_4 & \iddots & \iddots & 1 & 0 \\ \vdots & \iddots & \iddots & \iddots & \iddots & \iddots & \vdots \\ 0 & -a_{n-2} & \iddots & \iddots & \iddots & (0) & \vdots \\ 0 & -a_{n-1} & 1 & 0 & & & \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

57) Les colonnes de S étant "échelonnée" sans 0 sur la deuxième grande diagonale de la matrice, elle est inversible.

58)

$$\begin{aligned} PS_1\,{}^tP({}^tP)^{-1}S_2P^{-1} &= PS_1S_2P^{-1} \\ &= PAP^{-1} \\ &= P\text{Mat}_{\mathcal{B}(e,n)}(u)P^{-1} \\ &= \text{Mat}_{\mathcal{B}_n}(u) && \textit{(formule de changement de base.)} \\ &= \boxed{M.} \end{aligned}$$

Posons alors $V = PS_1\,{}^tP$ et $W = ({}^tP)^{-1}S_2P^{-1}$. On montre aisément que ${}^tV = V$ et ${}^tW = W$, de plus, W est inversible comme produit de trois matrices inversibles. Ainsi :

$$\boxed{\text{La propriété } (\mathcal{S}) \text{ est vérifiée.}}$$

59) Comme $M = VW$, ${}^tM = ({}^tW)({}^tV) = WV$ car W et V sont symétriques. Or, W est inversible donc $W^{-1}({}^tM) = V$, en injectant dans l'égalité $M = VW$, on obtient

$$\boxed{M = W^{-1}({}^tM)W, \text{ avec } W \text{ symétrique inversible.}}$$

60) Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et notons u l'endomorphisme qui lui est canoniquement associée. D'après la question 53, on peut écrire $\text{Mat}(u)$ dans une base $\mathcal{B}$ comme une diagonale par blocs $A_1, ..., A_p$.

En faisant jouer le rôle de A dans la question précédente à A_1, ... , A_p, on sait qu'il existe Q_i symétrique et inversible tels que ${}^tA_i = Q_i^{-1}A_iQ_i$ pour tout $i \in [\![1,p]\!]$.

On pose alors $Q = \text{diag}(Q_1, ..., Q_p)$ et on obtient :

$$Q^{-1}\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)Q = \text{diag}(Q_1^{-1}A_1Q_1, ..., Q_p^{-1}A_pQ_p) = {}^t\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$$

On applique la formule de changement de base comme à la question 58 et le résultat est vrai pour M et ${}^tM$. Finalement,

$$\boxed{\text{Toute matrice est semblable à sa transposée.}}$$