Corrigé de l'épreuve ESSEC 2016 Maths 1

Partie I

1. Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n^2 - x^2 \neq 0$ et on a

$$u_n(x) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2x}{n^2} \text{ d'où } |u_n(x)| \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2|x|}{n^2}$$

La série de terme général $\frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann convergente. Donc la série de tg $\frac{2|x|}{n^2}$ est convergente. Par théorème de comparaison pour les séries à terme positif, la série de tg $|u_n(x)|$ converge. La série de terme général $u_n(x)$ est alors absolument convergente donc convergente.

2. (a) Pour tout $x \in D$, $-x \in D$. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n(-x) = -u_n(x)$. On en déduit $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(-x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$. Or, $\varphi(x) = \frac{1}{x} - \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$. D'où $\varphi(-x) = -\frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x) = -\varphi(x)$.

La fonction φ est alors impaire.

(b) Soit $x \in D$ et $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{1}{n-x} - \frac{1}{n+x} = \frac{n+x-n+x}{(n-x)(n+x)} = \frac{2x}{n^2-x^2}$$

(c) Soit $x \in D$ et $N \in \mathbb{N}^*$. D'après l'égalité de la question 2.b,

$$\sum_{n=1}^{N} u_n(x+1) = \sum_{n=1}^{N} \left[\frac{1}{n-1-x} - \frac{1}{n+1+x}\right] = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n-1-x} - \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n+1+x}$$

On fait le changement d'indice $k = n-1$ dans la première somme et $k = n+1$ dans la seconde. On obtient

$$\sum_{n=1}^{N} u_n(x+1) = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{k-x} - \sum_{k=2}^{N+1} \frac{1}{k+x}$$

$$\text{D'où, } \sum_{n=1}^{N} u_n(x+1) = -\frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{N-1} \left(\frac{1}{n-x} - \frac{1}{n+x}\right) + \frac{1}{x+1} - \frac{1}{N+x} - \frac{1}{N+1+x}$$

Ainsi, $\sum_{n=1}^{N} u_n(x+1) = -\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} + \sum_{n=1}^{N-1} u_n(x) - \frac{1}{N+x} - \frac{1}{N+1+x}$.

On fait tendre N vers $+\infty$ car tout converge dans cette égalité. Il vient

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x+1) = -\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} + \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$$

On a finalement $$\varphi(x+1) = \frac{1}{x+1} - \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x+1) = \frac{1}{x} - \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x) = \varphi(x)$$

3. (a) Soit $x \in D \cup \{0,1\}$. Pour tout $n \geq 2$, $n^2 - x^2 \neq 0$ et $\frac{2x}{n^2-x^2} = \frac{1}{n-x} - \frac{1}{n+x}$ d'après la question 2.b qui reste encore valable pour $x = 0$ (de façon immédiate) et pour $x = 1$ car $\frac{1}{1-x} - \frac{1}{1+x} = \frac{2x}{1-x^2}$.

De même qu'à la question 1, la série de terme général $u_n(x)$ (pour $n \geq 2$) est absolument convergente donc convergente. On en déduit l'existence de $g(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2x}{n^2-x^2}$ et on a

$$g(x)=\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{2x}{n^2-x^2}=\sum_{n=2}^{+\infty}\left(\frac{1}{n-x}-\frac{1}{n+x}\right)$$

(b) Soit $x\in D$.
$$\varphi(x)=\frac{1}{x}-\frac{2x}{1-x^2}-g(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1+x}-g(x)$$
car comme déjà vérifié précédemment, $\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{1}{1+x}=\dfrac{2x}{1-x^2}$.

(c) Soit $h\in\left]-\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right[$ et $x\in[0;1]$. Pour tout $n\geq 2$,
$$\frac{1}{n-x}-\frac{1}{n-x-h}=-\frac{h}{(n-x)(n-x-h)}\quad\text{et}\quad\frac{1}{n+x}-\frac{1}{n+x+h}=\frac{h}{(n+x)(n+x+h)}$$
D'où,
$$\left(\frac{1}{n-x-h}-\frac{1}{n+x+h}\right)-\left(\frac{1}{n-x}-\frac{1}{n+x}\right)=h\left(\frac{1}{(n-x)(n-x-h)}+\frac{1}{(n+x)(n+x+h)}\right)$$
Pour tout $N\geq 2$, on a donc
$$\begin{aligned}\left|\sum_{n=2}^{N}u_n(x+h)-\sum_{n=2}^{N}u_n(x)\right| &\leq \sum_{n=2}^{N}|u_n(x+h)-u_n(x)|\\ &\leq |h|\sum_{n=2}^{N}\left|\frac{1}{(n-x)(n-x-h)}+\frac{1}{(n+x)(n+x+h)}\right|\end{aligned}$$
Or, pour tout $n\geq 2$, comme $x\in[0;1]$ et $h\in\left]-\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right[$,
$$n+x\geq n-x\geq n-1>0\quad\text{et}\quad n+x+h\geq n-x-h\geq n-\frac{3}{2}>0$$
Dès lors, $0<\dfrac{1}{(n-x)(n-x-h)}+\dfrac{1}{(n+x)(n+x+h)}<\dfrac{2}{(n-1)(n-\frac{3}{2})}$ et
$$\left|\sum_{n=2}^{N}u_n(x+h)-\sum_{n=2}^{N}u_n(x)\right|\leq |h|\sum_{n=2}^{N}\frac{2}{(n-1)(n-\frac{3}{2})}$$
$\dfrac{2}{(n-1)(n-\frac{3}{2})}\underset{n\to+\infty}{\sim}\dfrac{2}{n^2}$. La série de tg $\dfrac{2}{n^2}$ est le multiple du tg d'une série de Riemann convergente. Par TCPSTP, on en déduit que la série de tg $\dfrac{2}{(n-1)(n-\frac{3}{2})}$ converge. On peut alors faire tendre N vers $+\infty$ dans l'inégalité précédente car toutes les quantités convergent. On obtient
$$|g(x+h)-g(x)|\leq |h|\sum_{n=2}^{N}\frac{2}{(n-1)(n-\frac{3}{2})}$$
On a donc bien
$$\forall x\in[0;1]\quad |g(x+h)-g(x)|\leq C|h|\text{ avec }C=\sum_{n=2}^{N}\frac{2}{(n-1)(n-\frac{3}{2})}$$

(d) Soit $x_0\in[0;1]$. D'après la question précédente, pour tout $h\in\left]-\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right[$,
$$|g(x_0+h)-g(x_0)|\leq C|h|$$
$C|h|\xrightarrow[h\to 0]{}0$. Par théorème d'encadrement, $g(x_0+h)\xrightarrow[h\to 0]{}g(x_0)$ d'où $g(x)\xrightarrow[x\to x_0]{}g(x_0)$. La fonction g est donc continue en x_0. Cette propriété est vraie pour tout x_0 de $[0;1]$.

La fonction g est donc continue sur $[0;1]$.

D'après la question 3.b, pour tout $x \in]\,0\,;1\,[$,

$$\varphi(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} - g(x)$$

Les fonctions $x \mapsto \frac{1}{x}$, $x \mapsto \frac{1}{1-x}$ et $x \mapsto \frac{1}{1-x}$ sont continues sur $]\,0\,;1\,[$ ainsi que la fonction g. Par somme, on en déduit que

La fonction φ est continue sur $]\,0\,;1\,[$.

Or, la fonction φ est périodique de période 1. Par suite,

La fonction φ est continue sur D.

4. (a) D'après la question 3.b, pour tout $x \in D$, $\varphi(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} - g(x)$. Donc pour tout $x \in D$, $x\varphi(x) = 1 - \frac{x}{1-x} + \frac{x}{1+x} - xg(x)$. D'après la question 3.d, $xg(x) \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0g(0)$ donc $xg(x) \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0$. De plus, $\frac{x}{1-x} \xrightarrow[x\to 0]{} 0$ et $\frac{x}{1+x} \xrightarrow[x\to 0]{} 0$. Par théorème d'opérations,

$$x\varphi(x) \xrightarrow[x\to 0^+]{} 1$$

De plus, pour tout $x \in]\,-1\,;0\,[$, $x\varphi(x) = -x\varphi(-x)$ car φ est impaire (d'après la question I.2.a). Or, d'après le calcul précédent, $-x\varphi(-x) \xrightarrow[x\to 0^-]{} 1$. D'où

$$x\varphi(x) \xrightarrow[x\to 0^-]{} 1$$

On en déduit $x\varphi(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 1$ puis

$$\varphi(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{1}{x}$$

Pour tout $x \in D$, $\varphi(x) - \frac{1}{x} = -\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} - g(x)$. On en déduit par théorème d'opération et par continuité de g sur $[\,0\,;1\,]$

$$\varphi(x) - \frac{1}{x} \xrightarrow[x\to 0^+]{} -1 + 1 - g(0)$$

Or, $g(0) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2\times 0}{n^2 - 0^2} = 0$ et $-1 + 1 = 0$. D'où

$$\varphi(x) - \frac{1}{x} \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0$$

Pour tout $x \in]\,0\,;1\,[$, on a

$$\varphi(x) - \frac{1}{x} = -\left(\varphi(-x) - \frac{1}{-x}\right)$$

Or si $x < 0$, $-x > 0$ donc $\varphi(-x) - \frac{1}{-x} \xrightarrow[x\to 0^-]{} 0$. D'où $\varphi(x) - \frac{1}{x} \xrightarrow[x\to 0^-]{} 0$. On a donc

$$\lim_{x\to 0} \left(\varphi(x) - \frac{1}{x}\right) = 0$$

(b) Pour tout $x \in D$, $\varphi(x) = \varphi(x-1)$. Or, $x - 1 \xrightarrow[x\to 1]{} 0$. Donc d'après les résultats de la question précédente, $\varphi(x-1) \underset{x\to 1}{\sim} \frac{1}{x-1}$ d'où

$$\varphi(x) \underset{x\to 1}{\sim} \frac{1}{x-1}$$

On a également d'après ce qui précède, pour $x \in D$, $\varphi(x) - \dfrac{1}{x-1} = \varphi(x-1) - \dfrac{1}{x-1} \underset{x\to 1}{\longrightarrow} 0$. Ainsi,

$$\lim_{x\to 1}\left(\varphi(x) - \frac{1}{x-1}\right) = 0$$

Partie II

5. Soit $f \in E$. Pour tout $x \in [\,0\,;1\,]$, $\dfrac{x}{2} \in [\,0\,;1\,]$ et $\dfrac{x+1}{2} \in [\,0\,;1\,]$. Par composition, la fonction $x \mapsto f\left(\dfrac{x}{2}\right) + f\left(\dfrac{x+1}{2}\right)$ est encore continue sur $[\,0\,;1\,]$ et à valeurs réelles. Donc $T(f) \in E$.
Soit $(f,g) \in E^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Pour tout $x \in [\,0\,;1\,]$,

$$[T(\lambda f+g)](x) = (\lambda f+g)\left(\frac{x}{2}\right)+(\lambda f+g)\left(\frac{x+1}{2}\right) = \lambda\left(f\left(\frac{x}{2}\right)+f\left(\frac{x+1}{2}\right)\right)+g\left(\frac{x}{2}\right)+g\left(\frac{x+1}{2}\right) = \lambda[T(f)](x)+$$

On a donc $T(\lambda f+g) = \lambda T(f) + T(g)$ et

$$T \text{ est un endomorphisme de } E.$$

6. (a) Soit $k \in [\,0\,;n\,]$. Pour tout $x \in [\,0\,;1\,]$,

$$[T(e_k)](x) = \frac{x^k}{2^k} + \frac{(x+1)^k}{2^k} = \frac{1}{2^k}\left(2x^k + \sum_{j=0}^{k-1}\binom{k}{j}x^j\right)$$

On a donc $T(e_k) = \dfrac{1}{2^k}\displaystyle\sum_{j=0}^{k-1}\binom{k}{j}e_j + \dfrac{1}{2^{k-1}}e_k \in F_n$. Par linéarité de l'endomorphisme T, la famille $(e_k)_{0\le k\le n}$ étant une base de F_n, on en déduit

$$\boxed{\forall f \in F_n \quad T(f) \in F_n}$$

(b) On reprend les calculs de la question précédente :

$$\forall k \in [\![\,0\,;\,n\,]\!] \quad T(e_k) = \frac{1}{2^k}\sum_{j=0}^{k-1}\binom{k}{j}e_j + \frac{1}{2^{k-1}}e_k$$

La matrice de T_n dans B_n est donc triangulaire supérieure et

$$\mathrm{Mat}_{B_n}(T_n) = \begin{pmatrix} 2 & 1/2 & \cdots & 1/2^k & \cdots & 1/2^n \\ 0 & 1 & \cdots & k/2^k & \cdots & n/2^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & 1/2^{k-1} & \cdots & \binom{n}{k}/2^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1/2^{n-1} \end{pmatrix}$$

(c) La matrice de T_n dans la base B_n est triangulaire supérieure. On en déduit directement les valeurs propres de T_n qui sont les éléments diagonaux. Les valeurs propres de T_n sont donc les $\boxed{\{1/2^{k-1}, 0 \le k \le n\}}$.
T_n est un endomorphisme de F_n qui est de dimension $n+1$. De plus, T_n a $n+1$ valeurs propres distinctes deux à deux. On en déduit que

$$T_n \text{ est diagonalisable.}$$

7. (a) D'après la question 6, on a $T(e_0) = 2e_0$ donc $(T - 2\,\mathrm{id}_E)(e_0) = 0_E$. Par conséquent,

$$\mathrm{Ker}\,(T - 2\,\mathrm{id}_E) \text{ n'est pas réduit à } \{0_E\}.$$

(b) Comme f est dans $\operatorname{Ker}(T - 2\,\mathrm{id}_E)$, pour tout $x \in [\,0\,;1\,]$,

$$f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{x+1}{2}\right) = 2f(x) \qquad (\star)$$

En appliquant cette égalité à x_0, on obtient

$$f\left(\frac{x_0}{2}\right) + f\left(\frac{x_0+1}{2}\right) = 2m \quad \text{d'où} \quad f\left(\frac{x_0}{2}\right) = 2m - f\left(\frac{x_0+1}{2}\right)$$

Or m étant le minimum de f sur $[\,0\,;1\,]$, on a $f\left(\dfrac{x_0+1}{2}\right) \geq m$ d'où

$$f\left(\frac{x_0}{2}\right) \leq m$$

Or $m \leq f\left(\dfrac{x_0}{2}\right)$. On en déduit $\boxed{f\left(\dfrac{x_0}{2}\right) = m}$

(c) Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f\left(\dfrac{x_0}{2^n}\right) = m$.
L'égalité est immédiate par définition pour $n = 0$.
Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $f\left(\dfrac{x_0}{2^n}\right) = m$. On applique alors le résultat de la question 7.b à $\dfrac{x_0}{2^n}$ qui vérifie bien l'égalité demandée. On obtient ainsi

$$f\left(\frac{\frac{x_0}{2^n}}{2}\right) = m \quad \text{d'où } f\left(\frac{x_0}{2^{n+1}}\right) = m$$

Par conséquent, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad f\left(\dfrac{x_0}{2^n}\right) = m}$.

(d) La fonction f est continue sur $[\,0\,;1\,]$ et $\dfrac{x_0}{2^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. En passant à la limite dans l'égalité démontrée à la question 7.c, on obtient $\boxed{m = f(0)}$.

(e) On applique ici l'égalité $(\star)$ à x_1. On obtient

$$f\left(\frac{x_1}{2}\right) + f\left(\frac{x_1+1}{2}\right) = 2M \quad \text{d'où} \quad f\left(\frac{x_1}{2}\right) = 2M - f\left(\frac{x_1+1}{2}\right)$$

Or M étant le maximum de f sur $[\,0\,;1\,]$, on a $f\left(\dfrac{x_1+1}{2}\right) \leq M$ d'où

$$f\left(\frac{x_1}{2}\right) \geq M$$

Or $M \geq f\left(\dfrac{x_1}{2}\right)$. On en déduit $\boxed{f\left(\dfrac{x_1}{2}\right) = M}$
Par une récurrence du même type que celle réalisée à la question 7.c, on montre alors que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f\left(\dfrac{x_1}{2^n}\right) = M$. Par continuité de f en passant à la limite dans cette égalité, on obtient $\boxed{f(0) = M}$.

(f) On a démontrée aux questions 7.d et 7.e que $m = M = f(0)$. Or $m = \min\limits_{x\in[\,0\,;1\,]} f(x)$ et $M = \max\limits_{x\in[\,0\,;1\,]} f(x)$. On en déduit

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est constante sur } [\,0\,;1\,].}$$

8. (a) On note D_{cot} l'ensemble de définition de la fonction cot. On a pour $x \in \mathbb{R}$,

$$x \in D_{\text{cot}} \;\Leftrightarrow\; \sin(\pi x) \neq 0 \;\Leftrightarrow\; \forall k \in \mathbb{Z},\; \pi x \neq \pi k \;\Leftrightarrow\; \forall k \in \mathbb{Z},\; x \neq k \;\Leftrightarrow\; x \in D$$

La fonction cot est donc définie sur D. Elle y est continue comme quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas.

Pour tout $x \in D$, $-x \in D$ et

$$\cot(-x) = \pi\frac{\cos(-\pi x)}{\sin(-\pi x)} = -\pi\frac{\cos(\pi x)}{\sin(\pi x)} = -\cot(x)$$

La fonction cot est donc impaire.
Pour tout $x \in D$, $x+1 \in D$ et

$$\cot(x+1) = \pi\frac{\cos(\pi x+\pi)}{\sin(\pi x+\pi)} = \pi\frac{-\cos(\pi x)}{-\sin(\pi x)} = \cot(x)$$

La fonction cot est donc périodique de période 1.

(b) $\cos(\pi x) \xrightarrow[x\to 0]{} 1$ donc $\cos(\pi x) \underset{x\to 0}{\sim} 1$. Comme $\pi x \xrightarrow[x\to 0]{} 0$, alors $\sin(\pi x) \underset{x\to 0}{\sim} \pi x$. D'où, $\cot(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{\pi}{\pi x}$ puis

$$\boxed{\cot(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{1}{x}}$$

De plus, pour tout $x \neq 0$, $\cot(x) - \frac{1}{x} = \frac{x\pi\cos(\pi)x - \sin(\pi x)}{x\sin(\pi x)}$. On a $x\sin(\pi x) \underset{x\to 0}{\sim} \pi x^2$. De plus, au voisinage de 0, $\cos(\pi x) = 1 - \frac{\pi^2x^2}{2} + \mathrm{o}(x^2)$ et $\sin(\pi x) = \pi x - \frac{\pi^3x^3}{6} + \mathrm{o}(x^3)$. D'où,

$$x\pi\cos(\pi)x - \sin(\pi x) = \pi x - \frac{\pi^3x^3}{2} - \pi x + \frac{\pi^3x^3}{6} + \mathrm{o}(x^3) \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{\pi^3x^3}{3}$$

Ainsi, $\boxed{\cot(x) - \frac{1}{x} \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{\pi^2 x}{3}}$.

(c) $\cot(x) = \cot(x-1) \underset{x\to 1}{\sim} \frac{1}{x-1}$ car $x-1 \xrightarrow[x\to 1]{} 0$.
On a également, $\cot(x) - \frac{1}{x-1} \underset{x\to 1}{\sim} -\frac{\pi^2}{3}(x-1)$.

(d) Soit $x \in D$. Si $x/2 \notin D$, alors $x = 2p$ avec $p \in \mathbb{Z}$ d'où $x \notin D$ et c'est absurde. De même si $\frac{x+1}{2} \notin D$, alors il existe $p' \in \mathbb{Z}$ tel que $x = 2p'-1$ et $x \notin D$, ce qui est absurde. Dès lors, $\frac{x}{2} \in D$ et $\frac{x+1}{2} \in D$. Et, pour tout $x \in D$

$$\cot\left(\frac{x}{2}\right) + \cot\left(\frac{x+1}{2}\right) = \pi\frac{\cos\left(\pi\frac{x}{2}\right)}{\sin\left(\pi\frac{x}{2}\right)} + \pi\frac{\cos\left(\pi\frac{x}{2}+\frac{\pi}{2}\right)}{\sin\left(\pi\frac{x}{2}+\frac{\pi}{2}\right)} = \pi\frac{\cos\left(\pi\frac{x}{2}\right)}{\sin\left(\pi\frac{x}{2}\right)} - \pi\frac{\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)}$$

$$\text{Ainsi, } \cot\left(\frac{x}{2}\right) + \cot\left(\frac{x+1}{2}\right) = \pi\frac{\cos\left(\pi\frac{x}{2}\right)^2 - \sin\left(\pi\frac{x}{2}\right)^2}{\sin\left(\pi\frac{x}{2}\right)\cos\left(\pi\frac{x}{2}\right)}$$

$$\text{D'où, } \cot\left(\frac{x}{2}\right) + \cot\left(\frac{x+1}{2}\right) = 2\pi\frac{\cos(\pi x)}{\sin(\pi x)} = 2\cot(x)$$

à l'aide des formules de duplication.

9. (a) Soit $x \in D$. Soit $N \geq 2$. On calcule

$$\begin{aligned}
I_N &= \sum_{n=2}^{N}\left(\frac{1}{n-\frac{x}{2}} - \frac{1}{n+\frac{x}{2}}\right) + \sum_{n=2}^{N}\left(\frac{1}{n-\frac{x+1}{2}} - \frac{1}{n+\frac{x+1}{2}}\right)\\
&= 2\left(\sum_{n=2}^{N}\frac{1}{2n-x} + \sum_{n=2}^{N}\frac{1}{2n-1-x} - \sum_{n=2}^{N}\frac{1}{2n+x} - \sum_{n=2}^{N}\frac{1}{2n+1+x}\right)\\
&= 2\left(\sum_{k=3}^{2N}\frac{1}{k-x} - \sum_{k=4}^{2N+1}\frac{1}{k+x}\right)
\end{aligned}$$

en regroupant les termes d'indices pair et impair dans les sommes. Alors,

$$I_N = 2\left(\sum_{k=3}^{2N}\frac{1}{k-x} - \sum_{k=3}^{2N}\frac{1}{k+x}\right) + \frac{2}{3+x} - \frac{2}{2N+1+x}$$

En faisant tendre N vers $+\infty$ dans cette expression, il vient

$$g\left(\frac{x}{2}\right) + g\left(\frac{x+1}{2}\right) = 2g(x) + \frac{2}{3+x} - \frac{2}{2-x} + \frac{2}{2+x}$$

De plus,

$$\frac{1}{\frac{x}{2}} - \frac{1}{1-\frac{x}{2}} + \frac{1}{1+\frac{x}{2}} = \frac{2}{x} - \frac{2}{2-x} + \frac{2}{2+x}$$

$$\text{Et, } \frac{1}{\frac{x+1}{2}} - \frac{1}{1-\frac{x+1}{2}} + \frac{1}{1+\frac{x+1}{2}} = \frac{2}{x+1} - \frac{2}{1-x} + \frac{2}{3+x}$$

Avec la formule de la question 3.b., on trouve alors

$$\boxed{\varphi\left(\frac{x}{2}\right) + \varphi\left(\frac{x+1}{2}\right) = \frac{2}{x} - \frac{2}{1-x} + \frac{2}{x+1} - 2g(x) = 2\varphi(x)}$$

(b) La fonction $\varphi - \cot$ est continue sur $]\,0\,;1\,[$ et périodique.

Pour $x \in D$, $\varphi(x) - \cot(x) = \varphi(x) - \dfrac{1}{x} - \left(\cot(x) - \dfrac{1}{x}\right)$. Or, d'après la question 8.b, $\cot(x) - \dfrac{1}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} 0$ et $\varphi(x) - \dfrac{1}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} 0$ d'après la question 4.a. On en déduit que $\varphi(x) - \cot(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$ et on prolonge $\varphi - \cot$ par continuité en 0 en posant $(\varphi - \cot)(0) = 0$

Pour $x \in D$, $\varphi(x) - \cot(x) = \varphi(x) - \dfrac{1}{x-1} - \left(\cot(x) - \dfrac{1}{x-1}\right)$. Or, d'après la question 8.b, $\cot(x) - \dfrac{1}{x-1} \xrightarrow[x\to 1]{} 0$ et $\varphi(x) - \dfrac{1}{x-1} \xrightarrow[x\to 1]{} 0$ d'après la question 4.a. On en déduit que $\varphi(x) - \cot(x) \xrightarrow[x\to 1]{} 0$ et on prolonge $\varphi - \cot$ par continuité en 1 en posant $(\varphi - \cot)(1) = 0$. On conclut

La fonction $\varphi - \cot$ se prolonge par continuité sur $[\,0\,;1\,]$.

(c) La fonction $\varphi - \cot$ est donc continue sur $[\,0\,;1\,]$. De plus, d'après les question 8.d et 9.a, $T(\varphi - \cot) = 2(\varphi - \cot)$ donc $\varphi - \cot \in \operatorname{Ker}(T - \operatorname{id}_E)$. D'après la question 7.f, la fonction $\varphi - \cot$ est alors constante sur $[\,0\,;1\,]$. Comme elle vaut 0 en 0, on a pour tout $x \in\,]\,0\,;1\,[$, $\varphi(x) = \cot(x)$. La deux fonctions étant périodiques de période 1, on conclut :

$$\forall x \in D \quad \varphi(x) = \cot(x)$$

10. (a) Pour tout $x \in D$,

$$\frac{1 - x\cot(x)}{2x^2} = \frac{\frac{1}{x} - \cot(x)}{2x} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{\pi^2 x}{6x} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{\pi^2}{6}$$

$$\text{Ainsi, } \lim_{x\to 0} \frac{1 - x\cot(x)}{2x^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

(b) Soit $x \in\,]\,0\,;1\,[$.

$$\delta(x) - \frac{x^2}{1-x^2} = \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n^2-x^2} - \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n^2} - 1 + \frac{1}{1-x^2} - \frac{x^2}{1-x^2}$$

Or, $-1 + \dfrac{1}{1-x^2} - \dfrac{x^2}{1-x^2} = \dfrac{-1+x^2+1-x^2}{1-x^2} = 0$ d'où

$$\delta(x) - \frac{x^2}{1-x^2} = \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{n^2 - x^2} - \frac{1}{n^2} \right) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^2}{n^2(n^2 - x^2)}$$

Pour tout $x \in]\,0\,;1\,[$ et pour tout $n \geq 2$, $n^2 - x^2 \geq n^2 - 1 > 0$ donc $0 < \dfrac{x^2}{n^2(n^2-x^2)} \leq \dfrac{x^2}{n^2(n^2-1)}$. On en déduit

$$\boxed{\left| \delta(x) - \frac{x^2}{1-x^2} \right| = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^2}{n^2(n^2-x^2)} \leq x^2 \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2(n^2-1)}}$$

(c) La fonction $x \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 - x^2}$ étant paire, il suffit de calculer la limite pour $x \to 0^+$. On utilise l'inégalité établie à la question 10.b.

$$x^2 \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2(n^2-1)} \xrightarrow[x \to 0^+]{} 0$$

Par théorème d'encadrement, on a ainsi $\delta(x) - \dfrac{x^2}{1-x^2} \xrightarrow[x \to 0^+]{} 0$. Or, pour $x \in]\,0\,;1\,[$,

$$\delta(x) = \delta(x) - \frac{x^2}{1-x^2} + \frac{x^2}{1-x^2}$$

Et, $\dfrac{x^2}{1-x^2} \xrightarrow[x \to 0^+]{} 0$. D'où, par théorème d'opérations, $\delta(x) \xrightarrow[x \to 0^+]{} 0$. On en déduit

$$\boxed{\lim_{x \to 0^+} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 - x^2} = \lim_{x \to 0} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 - x^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}}$$

(d) Pour $x \in D$,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 - x^2} = \frac{1}{2x} \left(\frac{1}{x} - \varphi(x) \right) = \frac{1 - x\varphi(x)}{2x^2}$$

Or, $\varphi(x) = \cot(x)$ d'où $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 - x^2} = \frac{1 - x\cot(x)}{2x^2}$. D'après la formule établie à la question 10.a, on en déduit

$$\lim_{x \to 0} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 - x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{1 - x\cot(x)}{2x^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Par unicité de la limite

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}}$$

Partie III : Développement eulérien de la fonction sinus

11. Soit $x \in [\,0\,;1\,[$. $x^2/n^2 \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$. Alors $|\alpha_n(x)| \underset{n \to +\infty}{\sim} \dfrac{x^2}{n^2}$. Par comparaison avec le tg positif x^2/n^2 d'une série convergente, on en déduit que la série $\sum \alpha_n(x)$ est absolument convergente, donc convergente.

12. (a) Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Par linéarité de l'intégrale,

$$\begin{aligned} \int_0^x \left(\sum_{n=1}^{N} \frac{-2t}{n^2 - t^2} \right) dt &= \sum_{n=1}^{N} \int_0^x \frac{-2t}{n^2 - t^2} dt \\ &= \sum_{n=1}^{N} \left[\ln(n^2 - t^2) \right]_0^x \\ &= \sum_{n=1}^{N} \ln\left(1 - \frac{x^2}{n^2} \right) \end{aligned}$$

Donc, $\boxed{\displaystyle\int_0^x \left(\sum_{n=1}^{N} \frac{-2t}{n^2-t^2}\right) dt = \beta_N(x)}$.

(b) La fonction $t \mapsto \varphi(t) - \dfrac{1}{t}$ est continue sur $]\,0\,;1\,[$ d'après la partie I, d'après le théorème d'opérations. De plus, d'après la question I.4.a, la fonction $t \mapsto \varphi(t) - \dfrac{1}{t}$ est prolongeable par continuité en 0. On en déduit que pour $x \in\,]\,0\,;1\,[$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^x \left(\varphi(t) - \frac{1}{t}\right) dt$ converge.

(c) Soit $x \in\,]\,0\,;1\,[$.

$$\begin{aligned}\left|\int_0^x \left(\varphi(t) - \frac{1}{t}\right) dt - \int_0^x \left(\sum_{n=1}^{N} \frac{-2t}{n^2-t^2}\right) dt\right| &= \left|\int_0^x \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{-2t}{n^2-t^2} dt\right| \\ &\leq \int_0^x \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{2t}{n^2-t^2} dt\end{aligned}$$

Or, pour tout $t \in [\,0\,;x\,]$, $0 \leq t^2 \leq x^2 \leq 1$ donc pour tout $n \geq N+1$, $0 < n^2-1 \leq n^2-t^2$ d'où $0 < \dfrac{1}{n^2-t^2} \leq \dfrac{1}{n^2-1}$. D'où,

$$\left|\int_0^x \left(\varphi(t) - \frac{1}{t}\right) dt - \int_0^x \left(\sum_{n=1}^{N} \frac{-2t}{n^2-t^2}\right) dt\right| \leq \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{\int_0^x 2t\,dt}{n^2-1}$$

Or, $0 \leq \displaystyle\int_0^x 2t\,dt = x^2 \leq 1$. On en déduit

$$\boxed{\left|\int_0^x \left(\varphi(t) - \frac{1}{t}\right) dt - \int_0^x \left(\sum_{n=1}^{N} \frac{-2t}{n^2-t^2}\right) dt\right| \leq \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n^2-1}}$$

(d) Soit $x \in\,]\,0\,;1\,[$. D'après les questions précédentes, on en déduit pour tout $N \geq 1$,

$$\left|\int_0^x \left(\varphi(t) - \frac{1}{t}\right) dt - \beta_N(x)\right| \leq \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n^2-1}$$

La série de terme général $\dfrac{1}{n^2-1}$ étant convergente, $\displaystyle\sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n^2-1} \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0$. De plus, $\beta_N(x) \xrightarrow[N\to+\infty]{} \beta(x)$. On en déduit d'après le théorème d'encadrement et l'unicité de la limite

$$\boxed{\beta(x) = \int_0^x \left(\varphi(t) - \frac{1}{t}\right) dt}$$

(e) Soit $x \in\,]\,0\,;1\,[$. D'après la question II.9, on a pour tout $y \in\,]\,0\,;x\,[$,

$$\begin{aligned}\int_y^x \left(\varphi(t) - \frac{1}{t}\right) dt &= \int_y^x \pi\frac{\cos(\pi t)}{\sin(\pi t)} dt - \int_y^x \frac{1}{t} dt \\ &= [\ln(\sin(\pi t))]_y^x - [\ln(\pi t)]_y^x \\ &= \ln\left(\frac{\sin(\pi x)}{\pi x}\right) - \ln\left(\frac{\sin(\pi y)}{\pi y}\right)\end{aligned}$$

Or, $\dfrac{\sin(\pi y)}{\pi y} \xrightarrow[y\to 0]{} 1$ d'où $\ln\left(\dfrac{\sin(\pi y)}{\pi y}\right) \xrightarrow[y\to 0]{} 0$. En passant à la limite dans l'expression précédente, on en déduit

$$\boxed{\beta(x) = \int_0^x \left(\varphi(t) - \frac{1}{t}\right) dt = \ln\left(\frac{\sin(\pi x)}{\pi x}\right)}$$

13. (a) Soit $x \in [0;1[$. Pour tout $n \geq 1$ et pour tout $k \geq 1$, $1 - x^2/k^2 > 0$ donc $P_n(x) > 0$, d'où $\ln(P_n(x)) = \ln(\pi x) + \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 - \frac{x^2}{k^2}\right) = \ln(\pi x) + \beta_n(x)$. La suite $(\beta_n(x))$ convergeant, on en déduit par somme que la suite $(\ln(P_n(x)))$ converge. On en déduit que la suite $(P_n(x))_{n\geq 1}$ est convergente.

(b) Soit $x \in]0;1]$. La fonction ln étant continue sur $]0;+\infty[$, en passant à la limite dans l'égalité précédente, il vient

$$\ln(P(x)) = \ln(\pi x) + \beta(x)$$

D'où,

$$\boxed{P(x) = \pi x \exp(\beta(x)) = \sin(\pi x)}$$

(c) Soit $x \in \mathbb{R}$. Il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $k \geq n_0$, $0 \leq \frac{x^2}{k^2} < 1$ d'où $1 - \frac{x^2}{k^2} > 0$. De la même manière qu'à la question 11, on montre que la série $\sum_{k \geq n_0} \ln\left(1 - \frac{x^2}{k^2}\right)$ converge. Dès lors la suite $\left(\prod_{k=n_0}^{N} \left(1 - \frac{x^2}{k^2}\right)\right)_{N \geq n_0}$ converge. En la multipliant par un nombre fini de termes, il vient que la suite $(P_n(x))_{n\geq 1}$ converge.

(d) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in]-n;n[$.

$$\begin{aligned}
P_n(x+1) &= \pi(x+1)\prod_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{(x+1)^2}{k^2}\right) \\
&= \frac{\pi(x+1)}{\prod_{k=1}^{n} k^2} \times \prod_{k=1}^{n}(k-1-x)\prod_{k=1}^{n}(k+1+x) \\
&= \frac{\pi(x+1)}{\prod_{k=1}^{n} k^2} \times (-x)\prod_{k=1}^{n-1}(k-x)\prod_{k=2}^{n+1}(k+x) \\
&= \frac{\pi(x+n+1)(-x)}{(n-x)}\prod_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{x^2}{k^2}\right) \\
&= -\frac{(x+n+1)}{(n-x)}P_n(x)
\end{aligned}$$

(e) Soit $x \in \mathbb{R}$. D'après la question précédente, pour tout $n \geq |x| + 1$,

$$P_n(x+1) = -\frac{(x+n+1)}{(n-x)}P_n(x)$$

$\frac{(x+n+1)}{(n-x)} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$. En passant à la limite dans l'expression précédente, on obtient

$$\boxed{P(x+1) = -P(x)}$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$P(x+2) = -P(x+1) = P(x)$$

La fonction P est alors 2-périodique sur $\mathbb{R}$.

(f) Soit $x \in [-1;0[$, alors $x+1 \in [0;1[$. Donc $P(x+1) = \sin(\pi(x+1)) = -\sin(\pi x)$ d'après la question 13.b. De plus, d'après la question 13.f, $P(x) = -P(x+1) = \sin(\pi x)$. On a donc montré que pour tout $x \in [-1;1[$, $P(x) = \sin(\pi x)$. La fonction P est 2-périodique sur $\mathbb{R}$ tout comme la fonction $x \mapsto \sin(\pi x)$. On en déduit alors

$$\boxed{\text{Pour tout } x \in \mathbb{R},\ P(x) = \sin(\pi x).}$$

Partie IV : Un autre développement du sinus

14. Soit $x \in D \cup \{0\}$. Pour tout $n \geq 1$, $n^2 - x^2 \neq 0$ donc $\nu_n(x)$ existe. De plus, $|\nu_n(x)| \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{|x|}{n^2}$. Par comparaison avec le multiple d'une série de Riemann convergente, la série de tg $\nu_n(x)$ est absolument convergente, donc convergente.
15. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $x \in D \cup \{0\}$.

    Les fonctions $t \mapsto \cos(xt)$ et $t \mapsto \dfrac{\sin(nt)}{n}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[\,0\,;\pi\,]$. Par intégration par parties, il vient

$$\lambda_n(x) = \left[\cos(xt)\frac{\sin(nt)}{n}\right]_0^\pi + \int_0^\pi \frac{x}{n}\sin(xt)\sin(nt)dt = \frac{x}{n}\int_0^\pi \sin(xt)\sin(nt)dt$$

   Les fonctions $t \mapsto \sin(xt)$ et $t \mapsto -\dfrac{\cos(nt)}{n}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[\,0\,;\pi\,]$. Par intégration par parties, il vient

$$\lambda_n(x) = \frac{x}{n}\left[-\sin(xt)\frac{\cos(nt)}{n}\right]_0^\pi + \frac{x}{n}\int_0^\pi \frac{x}{n}\cos(xt)\cos(nt)dt = -\sin(\pi x)(-1)^n\frac{x}{n^2} + \frac{x^2}{n^2}\lambda_n(x)$$

   Dès lors,

$$\boxed{\lambda_n(x) = \frac{\sin(\pi)(-1)^{n-1}x}{n^2 - x^2} = \sin(\pi x)\nu_n(x)}$$

   En utilisant la formule indiquée dans l'énoncé, on pouvait procéder autrement.

$$\begin{aligned}
\lambda_n(x) &= \frac{1}{2}\int_0^\pi \cos((x+n)t)dt + \frac{1}{2}\int_0^\pi \cos((x-n)t)dt \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{\sin((x+n)t)}{x+n}\right]_0^\pi + \frac{1}{2}\left[\frac{\sin((x-n)t)}{x-n}\right]_0^\pi \\
&= (-1)^n\frac{\sin(x\pi)}{2(x+n)} + (-1)^n\frac{\sin(x\pi)}{2(x-n)} \\
&= (-1)^n\frac{\sin(\pi x)}{2(x^2-n^2)}(x-n+x+n) \\
&= \frac{(-1)^{n-1}x\sin(\pi x)}{n^2-x^2}
\end{aligned}$$

16. Soit $t \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

    (a) $C_n(t) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{k=1}^n e^{ikt} + \dfrac{1}{2}\sum_{k=1}^n e^{-ikt}$. Pour $t \neq 2p\pi$ avec $p \in \mathbb{Z}$, $e^{it} \neq 1$ et $e^{-it} \neq 1$, d'où

$$\begin{aligned}
C_n(t) &= \frac{1}{2}e^{it}\frac{e^{nit}-1}{e^{it}-1} + \frac{1}{2}e^{-it}\frac{e^{-nit}-1}{e^{-it}-1} \\
&= \frac{1}{2}e^{i(n+1)t/2}\frac{\sin(nt/2)}{\sin(t/2)} + \frac{1}{2}e^{-i(n+1)t/2}\frac{\sin(nt/2)}{\sin(t/2)} \\
&= \cos((n+1)t/2)\frac{\sin(nt/2)}{\sin(t/2)}
\end{aligned}$$

    De plus,

$$\begin{aligned}
\sin((2n+1)t/2) - \sin(t/2) &= \sin((n+1)t/2)\cos(nt/2) + \cos((n+1)t/2)\sin(nt/2) \\
&- \sin((n+1)t/2)\cos(nt/2) + \sin(nt/2)\cos((n+1)t/2) \\
&= 2\cos((n+1)t/2)\sin(nt/2)
\end{aligned}$$

    On en déduit que

$$\boxed{C_n(t) = \frac{1}{2}\frac{\sin((2n+1)t/2))}{\sin(t/2)} - \frac{1}{2}}$$

    (b) Si $t = 2p\pi$ avec $p \in Z$, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\cos(kt) = 1$ donc $C_n(t) = n$.

(c) Par linéarité de l'intégrale,

$$I_n = \sum_{k=1}^{n} \int_0^\pi \cos(kt)dt = \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{\sin(kt)}{k}\right]_0^\pi = 0$$

17. Les fonctions F et $t \mapsto -\dfrac{\cos((2n+1)t/2)}{(2n+1)/2}$ étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[\,0\,;\pi\,]$, en intégrant par parties, on obtient

$$\int_0^\pi F(t)\sin\left((2n+1)t/2\right)dt = -\left[F(t)\frac{\cos((2n+1)t/2)}{(2n+1)/2}\right]_0^\pi + \frac{1}{n+1/2}\int_0^\pi F'(t)\cos((2n+1)t/2)dt$$

La fonction F étant de classe $\mathcal{C}^1$, elle est bornée sur $[\,0\,;\pi\,]$ par un réel $M>0$ de même que sa dérivée F' par $M'>0$ et que la fonction $t \mapsto \cos((2n+1)t/2)$ qui est bornée par 1. On a donc

$$\left|\int_0^\pi F(t)\sin\left((2n+1)t/2\right)dt\right| \le \frac{2M+\pi M'}{n+\dfrac{1}{2}}$$

Or, $\dfrac{2M+\pi M'}{n+\dfrac{1}{2}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. D'où, d'après le théorème d'encadrement,

$$\boxed{\int_0^\pi F(t)\sin\left((2n+1)t/2\right)dt \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0}$$

18. (a) La fonction Φ_x est de classe C^1 sur $]\,0\,;\pi\,]$ comme quotient de deux fonctions de classe C^1 dont le dénominateur ne s'annule pas.
Au voisinage de 0^+, comme $xt \xrightarrow[t\to0]{} 0$ et $t/2 \xrightarrow[t\to0]{} 0$, on a

$$\Phi_x(t) \underset{t\to0^+}{\sim} \frac{\dfrac{-x^2t^2}{2}}{\dfrac{t}{2}} \underset{t\to0^+}{\sim} -x^2t \xrightarrow[t\to0]{}$$

On en déduit au voisinage de 0^+ $\Phi_x(t) = -x^2t + o(t)$. Or, $\Phi_x(0)=0$, on en déduit que Φ_x est continue en 0 et dérivable en 0 avec $\Phi_x'(0) = -x^2$.
Or, pour tout $t \in\,]\,0\,;\pi\,]$,

$$\Phi_x'(t) = \frac{-x\sin(t/2)\sin(xt) - 1/2\cos(t/2)(\cos(xt)-1)}{\sin^2(t/2)}$$

On détermine un équivalent de cette expression en considérant des développements limités d'ordre 2 du numérateur et du dénominateur. On obtient au voisinage de 0^+,

$$-x\sin(t/2)\sin(xt) - 1/2\cos(t/2)(\cos(xt)-1) = -\frac{x^2t}{2} + \frac{x^2t^2}{4} + o(t^2) = -\frac{x^2t^2}{4} + o(t^2)$$

D'où, $\Phi_x'(t) \underset{t\to0}{\sim} \dfrac{-\dfrac{x^2t^2}{4}}{\dfrac{t^2}{4}} \underset{t\to0}{\sim} -x^2 \xrightarrow[t\to0]{} -x^2 = \Phi_x'(0)$. La fonction Φ_x' est donc continue en 0 et on en déduit que

$$\boxed{\text{La fonction } \Phi_x' \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } [\,0\,;\pi\,].}$$

(b) Soit $t \in\,]\,0\,;\pi\,]$. D'après la question 16.a, on a directement

$$C_n(t)(\cos(xt)-1) \quad = \quad -\frac{1}{2}(\cos(xt)-1) + \frac{1}{2}\Phi_x(t)\sin\left((2n+1)\frac{t}{2}\right)$$

De plus, d'après la question 16.b, $C_n(0) = n$ donc $C_n(0)(\cos(x\times 0)-1) = 0$. De plus,

$$-\frac{1}{2}(\cos(x\times 0)-1)+\frac{1}{2}\Phi_x(0)\sin\left((2n+1)\frac{0}{2}\right)=0$$

On a donc le résultat voulu aussi pour $t=0$.

(c) Soit $n\in\mathbb{N}^*$ et soit $x\in D$. Par linéarité de l'intégrale,

$$\sum_{k=1}^{n}\lambda_k(x)=\int_0^{\pi}\cos(xt)C_n(t)dt$$

En utilisant la quantité I_n, on a encore avec la question 18.b

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\lambda_k(x) &= \int_0^{\pi}C_n(t)(\cos(xt)-1)dt+I_n\\ &= -\frac{1}{2}\int_0^{\pi}(\cos(xt)-1)dt+\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\Phi_x(t)\sin\left((2n+1)\frac{t}{2}\right)dt+I_n\\ &= -\frac{\sin(\pi x)}{2x}+\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\Phi_x(t)\sin\left((2n+1)\frac{t}{2}\right)dt+I_n\end{aligned}$$

19. (a) Soit $x\in D$. Partons de l'expression établie à la question 18.c. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $I_n=0$. De plus, la fonction Φ_x étant de classe C^1 sur $[\,0\,;\pi\,]$, on en déduit d'après la question 17 que

$$\int_0^{\pi}\Phi_x(t)\sin\left((2n+1)\frac{t}{2}\right)dt\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$$

De plus, d'après la question 15, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=1}^{n}\lambda_k(x)=\sin(\pi x)\sum_{k=1}^{n}\nu_k(x)$$

Or, $\sum_{k=1}^{n}\nu_k(x)\xrightarrow[n\to+\infty]{}\psi(x)$. Dès lors en passant à la limite dans l'expression établie à la question 18.c, on obtient

$$\boxed{\psi(x)\sin(\pi x)=-\frac{\sin(\pi x)}{2x}+\frac{\pi}{2}}$$

(b) Soit $x\in D$. On a donc $\sin(\pi x)\neq 0$. En divisant l'expression de la question précédente par $\frac{\sin(\pi x)}{2}$, on obtient

$$2\psi(x)=-\frac{1}{x}+\frac{\pi}{\sin(\pi x)}$$

D'où, $$\boxed{\frac{\pi}{\sin(\pi x)}=\frac{1}{x}+2x\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2-x^2}}$$