PARTIE I

Le programme autorise à identifier polynômes et fonctions polynômes.

Ainsi nous confondons $\mathcal{P}$ et $\mathbb{R}[X]$ et $\mathcal{P}_r$ et $\mathbb{R}_r[X]$ ... et sans doute x et X !

(Q1) a) • Soit $P \in \mathcal{P}$. $P(X+1)$ est encore un élément de $\mathcal{P}$ donc $\Delta P = P(X+1) - P(X)$ appartient aussi à $\mathcal{P}$. <u>Δ est une application de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$.</u>

• Soit $(P, Q) \in \mathcal{P}^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

$\Delta(\lambda P + Q) = (\lambda P + Q)(X+1) - (\lambda P + Q)(X) = \lambda (P(X+1) - P(X)) + Q(X+1) - Q(X) = \lambda \Delta P + \Delta Q$.

$\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall (P, Q) \in \mathcal{P}^2$, $\Delta(\lambda P + Q) = \lambda \Delta P + \Delta Q$. <u>$\Delta$ est linéaire.</u>

Ainsi <u>Δ est un endomorphisme de $\mathcal{P}$.</u>

<u>b)</u> Soit $k \in \mathbb{N}^*$. $\Delta X^k = (X+1)^k - X^k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} X^i - X^k = \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k}{i} X^i$; donc ΔX^k est de degré $k-1$. Notons aussi que $\Delta 1 = 1 - 1 = 0$.

Soit $r \in \mathbb{N}^*$ et P un élément de $\mathcal{P}$ de degré r. $\exists (a_0, a_1, \ldots, a_r) \in \mathbb{R}^{r+1}$, $P = \sum_{k=0}^{r} a_k X^k$ et $a_r \neq 0$

$\Delta P = \sum_{k=0}^{r} a_k \Delta X^k = \sum_{k=1}^{r} a_k \Delta X^k$.

Pour tout $k \in [\![1, r]\!]$, ΔX^k est un polynôme de degré $k-1$

Alors 1° Pour tout $k \in [\![1, r-1]\!]$, $a_k \Delta X^k$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à $k-1$ donc inférieur ou égal à $r-2$. (à un abus près si $r=1$).

2° $a_r \Delta X^r$ est un polynôme de degré $r-1$ car a_r n'est pas nul.

Ainsi ΔP est de degré $r-1$.

<u>Si P est un élément de $\mathcal{P}$ de degré r strictement positif, ΔP est de degré $r-1$.</u>

<u>c)</u> • Soit $P \in \operatorname{Ker} \Delta$. Supposons que le degré de P soit r et que r soit strictement positif. Alors ΔP est de degré $r-1$ donc ΔP n'est pas nul !

Ainsi $\deg P \leqslant 0$. $P \in \mathcal{P}_0$.

- Réciproquement supposons que $P \in \mathcal{P}_0$. $\exists \lambda \in \mathbb{R}, P = \lambda$.

$\Delta P = P(X+1) - P(X) = \lambda - \lambda = 0$; $P \in \operatorname{Ker} \Delta$.

Ainsi $\forall P \in \mathcal{P}$, $P \in \operatorname{Ker} \Delta \Leftrightarrow P \in \mathcal{P}_0$.

$\operatorname{Ker} \Delta = \mathcal{P}_0$ ou $\operatorname{Ker} \Delta$ est l'ensemble des fonctions polynomiales constantes.

Q2 a) • Soit $P \in \mathcal{P}_r$. Notons que $\Delta_r P \in \mathcal{P}$ car $\Delta_r P = \Delta P$!

1er cas.. le degré de P est un entier k strictement positif. $k \leq r$.

Alors $\deg \Delta P = k-1$. Alors $\deg \Delta P \leq r-1 \leq r$.

Ainsi $\Delta_r P = \Delta P \in \mathcal{P}_r$ (et même à $\mathcal{P}_{r-1}$).

2e cas.. P est constant. Alors $\Delta_r P = \Delta P = 0$ donc $\Delta_r P \in \mathcal{P}_r$.

$\forall P \in \mathcal{P}_r$, $\Delta_r P \in \mathcal{P}_r$. Δ_r est bien une application de $\mathcal{P}_r$ dans $\mathcal{P}_r$

• Δ est linéaire donc Δ_r l'est également. Δ_r est linéaire.

Δ_r est un endomorphisme de $\mathcal{P}_r$.

b) $\operatorname{Ker} \Delta_r = \{P \in \mathcal{P}_r \mid \Delta_r P = 0\} = \{P \in \mathcal{P}_r \mid \Delta P = 0\} \overset{\operatorname{Ker}\Delta = \mathcal{P}_0}{=} \{P \in \mathcal{P}_r \mid P \in \mathcal{P}_0\} = \mathcal{P}_r \cap \mathcal{P}_0 = \mathcal{P}_0$.

$\operatorname{Ker} \Delta_r = \mathcal{P}_0$.

c) $\operatorname{Im} \Delta_r = \Delta_r(\operatorname{Vect}(1, X, \dots, X^r)) = \operatorname{Vect}(\Delta 1, \Delta X, \dots, \Delta X^r) \overset{\Delta 1 = 0}{=} \operatorname{Vect}(\Delta X, \Delta X^2, \dots, \Delta X^r)$.

$\forall i \in [\![1, r]\!]$, $\deg \Delta X^i = i-1$.

Alors $(\Delta X, \Delta X^2, \dots, \Delta X^r)$ est une famille de polynômes non nuls de $\mathcal{P}_{r-1}$ de degrés échelonnés. C'est donc une famille libre de cardinal r de $\mathcal{P}_{r-1}$.

Comme $\mathcal{P}_{r-1}$ est de dimension r, c'est donc une base de $\mathcal{P}_{r-1}$.

Ainsi $\operatorname{Im} \Delta_r = \operatorname{Vect}(\Delta X, \Delta X^2, \dots, \Delta X^r) = \mathcal{P}_{r-1}$.

$\operatorname{Im} \Delta_r = \mathcal{P}_{r-1}$.

d) Soit $P \in \mathcal{P}$. $\exists r \in \mathbb{N}^*$, $P \in \mathcal{P}_{r-1}$ (prendre $r=1$ si P est nul et $r = \deg P + 1$ si P n'est pas nul).

Alors $P \in \mathcal{P}_{r-1} = \operatorname{Im} \Delta_r$. Donc $\exists Q \in \mathcal{P}_r$, $\Delta_r Q = P$.

Ainsi $Q \in \mathcal{P}$ et $\Delta Q = \Delta_r Q = P$.

$\forall P \in \mathcal{P}$, $\exists Q \in \mathcal{P}$, $\Delta P = Q$. Δ est surjective.

(Q3) Notons Δ' la restriction de Δ à E

- Δ' est une application linéaire de E dans $\mathcal{P}$ car Δ est linéaire de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$.
- Soit $P \in \operatorname{Ker} \Delta'$. $\Delta' P = 0$. $\Delta P = 0$. $\exists \lambda \in \mathbb{R}$, $P = \lambda$. Or $P(0) = 0$ donc $\lambda = 0$.
  Ainsi $P = 0$.
  $\operatorname{Ker} \Delta' = \{0\}$. Δ' est injective.
- Soit $P \in \mathcal{P}$. $\exists Q \in \mathcal{P}$, $\Delta Q = P$ car Δ est surjective.
  Posons $\lambda = Q(0)$ et $\hat{Q} = Q - \lambda$.
  Alors $\hat{Q}(0) = 0$ donc $\hat{Q} \in E$ et $\Delta' \hat{Q} = \Delta \hat{Q} = \Delta Q - \Delta \lambda = \Delta Q - 0 = \Delta Q = P$.
  Ainsi $\forall P \in \mathcal{P}$, $\exists \hat{Q} \in E$, $\Delta' \hat{Q} = P$. Δ' est surjective.

Finalement la restriction de Δ à E est un isomorphisme de E sur $\mathcal{P}$.

(Q4) a) • Considérons la suite $(N_n)_{n \in \mathbb{N}}$ satisfaisant à la récurrence suivante :

$$N_0 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad N_n = \Delta'^{-1}(N_{n-1}).$$

Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, N_n existe et appartient à $\mathcal{P}$.

-> C'est clair pour $n = 0$

-> Supposons la propriété vraie pour $n-1$ avec $n \in \mathbb{N}^*$.
$N_{n-1} \in \mathcal{P}$ et Δ'^{-1} est une application de $\mathcal{P}$ dans E, ainsi $\Delta'^{-1}(N_{n-1})$ est défini et appartient à E donc à $\mathcal{P}$. N_n est défini et appartient à $\mathcal{P}$.

Ceci achève la récurrence.

1°/ $N_0 = 1$.

2°/ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $N_n = \Delta'^{-1}(N_{n-1})$. Alors $N_n \in \mathcal{E}$ et $\Delta' N_n = N_{n-1}$.

Ainsi $N_n(0) = 0$ et $\Delta N_n = N_{n-1}$.

La suite $(N_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc telle que : $N_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\Delta N_n = N_{n-1}$ et $N_n(0) = 0$

Considérons une seconde suite $(\Pi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\Pi_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\Delta \Pi_n = \Pi_{n-1}$ et $\Pi_n(0) = 0$.

Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, \Pi_n = N_n$.

→ C'est clair pour $n=0$.

→ Supposons que pour n dans $\mathbb{N}^*$ on ait : $\Pi_{n-1} = N_{n-1}$.

$\Pi_n \in \mathcal{E}$, $N_n \in \mathcal{E}$, $\Delta' \Pi_n = \Delta \Pi_n = \Pi_{n-1} = N_{n-1} = \Delta N_n = \Delta' N_n$ et Δ' est injective. Alors $\Pi_n = N_n$ ce qui achève la récurrence.

Finalement <u>Il existe une suite et une seule d'éléments de $\mathcal{P}$ vérifiant :</u>
<u>$N_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\Delta N_n = N_{n-1}$ et $N_n(0) = 0$.</u>

<u>b)</u> Posons $T_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $T_n = \frac{1}{n!}\prod_{k=0}^{n-1}(X-k)$. (T_n) est une suite d'éléments de $\mathcal{P}$.

Montrons que $\forall n \in \mathbb{N}$, $T_n = N_n$.

- $T_0 = 1$.
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$ * $T_n(0) = 0$ * 1er cas $n \geq 2$

$$\Delta T_n = T_n(X+1) - T_n(X) = \frac{1}{n!}\left[\prod_{k=0}^{n-1}(X-k+1) - \prod_{k=0}^{n-1}(X-k)\right] = \frac{1}{n!}\left[\prod_{k=-1}^{n-2}(X-k) - \prod_{k=0}^{n-1}(X-k)\right].$$

$$\Delta T_n = \frac{1}{n!}\left(\prod_{k=0}^{n-2}(X-k)\right)\left(X+1-(X-(n-1))\right) = \frac{n}{n!}\prod_{k=0}^{n-2}(X-k) = T_{n-1}.$$

2e cas.. $n=1$. $\Delta T_1 = \Delta(X-1) = (X+1-1)-(X-1) = 1 = T_0$.

Ainsi $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $\mathcal{P}$ telle que :

$T_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\Delta T_n = T_{n-1}$ et $T_n(0) = 0$.

Alors d'après a) : $\forall n \in \mathbb{N}$, $T_n = N_n$. Ainsi <u>$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $N_n = \frac{1}{n!}\prod_{k=0}^{n-1}(X-k)$.</u>

c) Soit $r \in \mathbb{N}$. $\forall i \in [\![0,r]\!]$, $\deg N_i = i$.

Ainsi $(N_0, N_1, \dots, N_r)$ est une famille de polynômes non nuls de $\mathcal{P}_r$ de degrés échelonnés. C'est donc une famille libre de cardinal $r+1$ de $\mathcal{P}_r$.
Comme $\mathcal{P}_r$ est de dimension $r+1$, c'est une base de $\mathcal{P}_r$.

<u>Pour tout r dans $\mathbb{N}$, $(N_0, N_1, \dots, N_r)$ est une base de $\mathcal{P}_r$.</u>

Le reste est hors-programme, vu à la fin... si j'ai le temps !

d) Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

$\forall i \in \mathbb{N}^*$, $\Delta N_i = N_{i-1}$. Une récurrence des plus simple montre alors que :

$\forall n \in [\![0,k]\!]$, $\Delta^n N_k = N_{k-n}$. Ceci vaut encore pour $k=0$.

Alors $\forall k \in \mathbb{N}$, $\forall n \in [\![0,k]\!]$, $\Delta^n N_k = N_{k-n}$.

Soit $k \in \mathbb{N}$. $\Delta^k N_k = N_0 = 1$. Alors $\Delta^{k+1} N_k = \Delta 1 = 0$.

$\forall n \in [\![k+1, +\infty[\![$, $\Delta^n N_k = \Delta^{n-(k+1)}(\Delta^{k+1} N_k) = \Delta^{n-(k+1)} 0 = 0$.

Ainsi <u>$\forall k \in \mathbb{N}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\Delta^n N_k = \begin{cases} N_{k-n} & \text{si } k \geq n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$</u>.

Soit $r \in \mathbb{N}$ et $\varphi \in \mathcal{P}_r$. $(N_0, N_1, \dots, N_r)$ est une base de $\mathcal{P}_r$ donc

$\exists (a_0, a_1, \dots, a_r) \in \mathbb{R}^{r+1}$, $\varphi = \sum_{k=0}^{r} a_k N_k$.

$\forall n \in [\![0,r]\!]$, $\Delta^n \varphi = \sum_{k=0}^{r} a_k \Delta^n N_k = \sum_{k=n}^{r} a_k N_{k-n}$

$\forall n \in [\![0,r]\!]$, $\Delta^n \varphi(0) = \sum_{k=n}^{r} a_k N_{k-n}(0)$.

Or $\forall i \in \mathbb{N}$, $N_i(0) = \begin{cases} 1 & \text{si } i=0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

Ainsi $\forall n \in [\![0,r]\!]$, $\Delta^n \varphi(0) = a_n$. Alors $\varphi = \sum_{k=0}^{r} \Delta^k \varphi(0) N_k = \sum_{n=0}^{r} \Delta^n \varphi(0) N_n$.

<u>$\forall r \in \mathbb{N}$, $\forall \varphi \in \mathcal{P}_r$, $\varphi = \sum_{n=0}^{r} \Delta^n \varphi(0) N_n$</u> ...ce qui répond <u>très</u> largement à la question.

Soit $\varphi \in \mathcal{P}$. $\exists r \in \mathbb{N}$, $\varphi \in \mathcal{P}_r$.

Alors $\varphi = \sum_{n=0}^{r} \Delta^n \varphi(0)\, N_n$. $\deg \varphi \leq r$.

$\forall i \in [\![r+1, +\infty[\![$, $\Delta^i \varphi = \sum_{n=0}^{r} \Delta^n \varphi(0)\, \Delta^i N_n = 0$ car $\forall i \in [\![r+1, +\infty[\![$, $\forall n \in [\![0, r]\!]$, $\Delta^i N_n = 0$

Ainsi $\forall i \in [\![r+1, +\infty[\![$ $\Delta^i \varphi(0) = 0$. Cela autorise l'écriture $\varphi = \sum_{n=0}^{+\infty} \Delta^n \varphi(0)\, N_n$.

$\forall \varphi \in \mathcal{P}$, $\varphi = \sum_{n=0}^{+\infty} \Delta^n \varphi(0)\, N_n$

e) Soit $\varphi \in \mathcal{P}$. $\exists r \in \mathbb{N}$, $\varphi \in \mathcal{P}_r$. $\varphi = \sum_{n=0}^{r} \Delta^n \varphi(0)\, N_n$

On a : $\varphi = \sum_{n=0}^{r} \Delta^n \varphi(0)\, \Delta N_{n+1} = \Delta\left(\sum_{n=0}^{r} \Delta^n \varphi(0)\, N_{n+1}\right)$.

Posons $P_\varphi = \sum_{n=0}^{r} \Delta^n \varphi(0) N_{n+1}$. $P_\varphi \in \mathcal{P}$ et $P_\varphi(X+1) - P_\varphi(X) \overset{\Delta P_\varphi = \varphi}{=} \varphi$.

Soit $P \in \mathcal{P}$.

$P(X+1) - P(X) = \varphi \Leftrightarrow \Delta P = \varphi \Leftrightarrow \Delta P = \Delta P_\varphi \Leftrightarrow \Delta(P - P_\varphi) = 0 \Leftrightarrow P - P_\varphi \in \mathcal{P}_0$

$P(X+1) - P(X) = \varphi \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}$, $P = P_\varphi + \lambda$.

$P_\varphi = \sum_{n=0}^{r} \Delta^n \varphi(0)\, N_{n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \Delta^n \varphi(0)\, N_{n+1}$ car $\varphi \in \mathcal{P}_r$ et donc

$\Delta^n \varphi(0) = 0$ si $n \in [\![r+1, +\infty[\![$. Ainsi :

$\forall \varphi \in \mathcal{P}$, $\{P \in \mathcal{P} \mid P(X+1) - P(X) = \varphi\} = \left\{\sum_{n=0}^{+\infty} \Delta^n \varphi(0)\, N_{n+1} + \lambda \ ; \lambda \in \mathbb{R}\right\}$.

f) Soit φ un élément de $\mathcal{P}$. Soit P un élément de $\mathcal{P}$ tel que $P(X+1) - P(X) = \varphi$.

$\forall n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^{n} \varphi(k) = \sum_{k=0}^{n} (P(k+1) - P(k)) = P(n+1) - P(0)$.

$\forall n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^{n} \varphi(k) = P(n+1) - P(0)$.

Posons $\varphi = X^2$ et $P = P_\varphi = \sum_{n=0}^{+\infty} \Delta^n \varphi(0)\, N_{n+1}$.

$\Delta^0 \varphi = \varphi = X^2$. $\Delta^1 \varphi = (X+1)^2 - X^2 = 2X+1$. $\Delta^2 \varphi = 2(X+1)+1-(2X+1) = 2$

$\Delta^3 \varphi = 0$ donc $\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq 3 \Rightarrow \Delta^n \varphi = 0$.

Ainsi $\Delta^0 \varphi(0) = 0$, $\Delta^1 \varphi(0) = 1$, $\Delta^2 \varphi(0) = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq 3 \Rightarrow \Delta^n \varphi(0) = 0$.

Ainsi $P = 1 \times N_2 + 2N_3 = \frac{1}{2}X(X-1) + \frac{2}{6}X(X-1)(X-2) = \frac{1}{6}X(X-1)(2X-4+3)$.

$P = \frac{1}{6}X(X-1)(2X-1)$.

Alors $\forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{\ell=0}^{n} \ell^2 = \sum_{\ell=0}^{n} \varphi(\ell) = P(n+1) - P(0) = \frac{1}{6}(n+1)(n+1-1)(2(n+1)-1) - 0$.

$$\underline{\forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1).}$$

(Q5) Soit $\varphi \in \Theta$. Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N},\ \Delta^n \varphi = \sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} \binom{n}{i} \varphi(X+i)$.

- $\sum_{i=0}^{0} (-1)^{0-i} \binom{0}{i} \varphi(X+i) = \varphi(X) = \Delta^0 \varphi$; la propriété est vraie pour $n=0$.
- Supposons la propriété vraie pour $n \in \mathbb{N}$ et montrons la pour $n+1$.

Par hypothèse de récurrence $\Delta^n \varphi = \sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} \binom{n}{i} \varphi(X+i)$. Par linéarité de Δ :

$$\Delta^{n+1}\varphi = \sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} \binom{n}{i} \Delta(\varphi(X+i)) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} \binom{n}{i} \left[\varphi(X+i+1) - \varphi(X+i)\right].$$

$$\Delta^{n+1}\varphi = \sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} \binom{n}{i} \varphi(X+i+1) - \sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} \binom{n}{i} \varphi(X+i).$$

$$\Delta^{n+1}\varphi = \sum_{i=1}^{n+1} \underbrace{(-1)^{n-(i-1)}}_{\text{ou } (-1)^{n+1-i}} \binom{n}{i-1} \varphi(X+i) + \sum_{i=0}^{n} (-1)^{n+1-i} \binom{n}{i} \varphi(X+i).$$

$$\Delta^{n+1}\varphi = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{n+1-i} \Big[\underbrace{\binom{n}{i-1} + \binom{n}{i}}_{\binom{n+1}{i}} \Big] \varphi(X+i) + \binom{n}{n} \varphi(X+n+1) + (-1)^{n+1} \binom{n}{0} \varphi(X).$$

$$\Delta^{n+1}\varphi = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{n+1-i} \binom{n+1}{i} \varphi(X+i) + \varphi(X+n+1) + (-1)^{n+1}\varphi(X) \underset{\binom{n+1}{0} = \binom{n+1}{n+1} = 1}{=} \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^{n+1-i} \binom{n+1}{i} \varphi(X+i).$$

Ceci achève la récurrence.

$\forall \varphi \in \mathcal{G}, \forall n \in \mathbb{N}, \ \Delta^n \varphi = \sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} \binom{n}{i} \varphi(X+i).$

(Q6) a) i. g et h sont deux endomorphismes de $\mathcal{G}_r$. Pour montrer que $g=h$ il suffit de prouver que $\forall i \in [\![0,r]\!], \ g(N_i)=h(N_i)$ car $(N_0, N_1, \dots, N_r)$ est une base de $\mathcal{G}_r$.

Cela revient à montrer que $\forall j \in [\![0,r]\!], \ g(N_{r-j}) = h(N_{r-j})$.

Rappelons que l'on suppose que $g \in C(\Delta_r)$, $h \in C(\Delta_r)$ et $g(N_r)=h(N_r)$.

- Par hypothèse la propriété est vraie pour $j=0$.
- Supposons la propriété vraie pour j dans $[\![0,r-1]\!]$ et montrons la pour $j+1$.

$g(N_{r-(j+1)}) = g(N_{r-j-1}) = g(\Delta N_{r-j}) = g(\Delta_r N_{r-j}) = (g \circ \Delta_r)(N_{r-j})$ et $g \in C(\Delta_r)$.

$g(N_{r-(j+1)}) = (\Delta_r \circ g)(N_{r-j}) = \Delta_r g(N_{r-j})$ car $g \circ \Delta_r = \Delta_r \circ g$.

De même $h(N_{r-(j+1)}) = \Delta_r h(N_{r-j})$

h l'hypothèse de récurrence donne $g(N_{r-j}) = h(N_{r-j})$.

donc $g(N_{r-(j+1)}) = \Delta_r g(N_{r-j}) = \Delta_r h(N_{r-j}) = h(N_{r-(j+1)})$. Ceci achève la récurrence.

Ceci achève également de montrer que $g=h$.

Si $g \in C(\Delta_r)$, $h \in C(\Delta_r)$ et $g(N_r)=h(N_r)$ alors $g=h$.

ii. $N_r \in \mathcal{G}_r$ et $g \in \mathcal{L}(\mathcal{G}_r)$ donc $g(N_r) \in \mathcal{G}_r$. $(N_0, N_1, \dots, N_r)$ est une base de $\mathcal{G}_r$.

Ainsi $\exists ! (a_0, a_1, \dots, a_r) \in \mathbb{R}^{r+1}, \ g(N_r) = a_0 N_0 + a_1 N_1 + \dots + a_{r-1} N_{r-1} + a_r N_r$.

$\exists ! (a_0, a_1, \dots, a_r) \in \mathbb{R}^{r+1}, \ g(N_r) = a_0 N_0 + a_1 N_1 + \dots + a_r N_r$.

iii. • $\forall i \in [\![0,r]\!]$, $\Delta_r \circ \Delta_r^i = \Delta_r^{i+1} = \Delta_r^i \circ \Delta_r$; $\forall i \in [\![0,r]\!]$, $\Delta_r^i \in C(\Delta_r)$.

Soit $g \in Vect(Id_{g_r}, \Delta_r, \dots, \Delta_r^r)$.

$\exists (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_r) \in \mathbb{R}^{r+1}$, $g = \sum_{i=0}^{r} \alpha_i \Delta_r^i$.

Alors $\Delta_r \circ g = \Delta_r \circ (\sum_{i=0}^{r} \alpha_i \Delta_r^i) = \sum_{i=0}^{r} \alpha_i \Delta_r^{i+1} = (\sum_{i=0}^{r} \alpha_i \Delta_r^i) \circ \Delta_r = g \circ \Delta_r$.

Ainsi $g \in C(\Delta_r)$.

Par conséquent $Vect(Id_{g_r}, \Delta_r, \dots, \Delta_r^r) \subset C(\Delta_r)$.

• Réciproquement soit $g \in C(\Delta_r)$.

$g \in \mathcal{L}(g_r)$ donc $\exists (a_0, a_1, \dots, a_r) \in \mathbb{R}^{r+1}$, $g(N_r) = a_r N_r + a_{r-1} N_{r-1} + \dots + a_0 N_0$.

Notons que $g(N_r) = a_r Id_{g_r}(N_r) + a_{r-1} \Delta_r(N_r) + a_{r-2} \Delta_r^2(N_r) + \dots + a_0 \Delta_r^r(N_r)$.

Posons alors $h = a_r Id_{g_r} + a_{r-1} \Delta_r + \dots + a_0 \Delta_r^r$.

D'après ce qui précède $h \in C(\Delta_r)$.

Alors $g \in C(\Delta_r)$, $h \in C(\Delta_r)$ et $g(N_r) = h(N_r)$. Ainsi $g = h$

Par conséquent $g \in Vect(Id_{g_r}, \Delta_r, \Delta_r^2, \dots, \Delta_r^r)$.

Finalement $\underline{\underline{C(\Delta_r) = Vect(Id_{g_r}, \Delta_r, \Delta_r^2, \dots, \Delta_r^r)}}$.

Ce qui montre que $\underline{\underline{C(\Delta_r)}}$ est un sous-espace vectoriel de $\underline{\underline{\mathcal{L}(g_r)}}$ et que $(Id_{g_r}, \Delta_r, \Delta_r^2, \dots, \Delta_r^r)$ en est une famille génératrice.

Montrons que cette famille est libre.

Soit $(\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_r) \in \mathbb{R}^{r+1}$ tel que $\beta_0 Id_{g_r} + \beta_1 \Delta_r + \dots + \beta_r \Delta_r^r = 0_{\mathcal{L}(g_r)}$

Alors $\beta_0 N_r + \beta_1 \Delta_r N_r + \dots + \beta_r \Delta_r^r N_r = 0_{g_r}$.

Ainsi $\beta_0 N_r + \beta_1 N_{r-1} + \dots + \beta_r N_0 = 0_{g_r}$. La liberté de la famille $(N_0, N_1, \dots, N_r)$ donne $\beta_0 = \beta_1 = \dots = \beta_r = 0$. Ceci achève de montrer que $(Id_{g_r}, \Delta_r, \dots, \Delta_r^r)$ est libre.

$\underline{\underline{(Id_{g_r}, \Delta_r, \dots, \Delta_r^r) \text{ est une base de } C(\Delta_r)}}$.

iv. Soit $P\in\mathcal{P}$. $(d\circ\Delta)(P) = d(P(X+1)-P(X)) = P'(X+1)-P'(X) = \Delta(P'(X)) = (\Delta\circ d)(P)$

Ainsi $d\circ\Delta=\Delta\circ d$.

Supposons qu'il existe $a_0,a_1,\dots,a_r$ dans $\mathbb{R}$ tels que $d=\sum_{\ell=0}^{r} a_\ell\Delta_r^\ell$.

$d(N_{r+1}) = \sum_{\ell=0}^{r} a_\ell \Delta_r^\ell(N_{r+1}) = \sum_{\ell=0}^{r} a_\ell N_{r+1-\ell} = a_0N_{r+1}+a_1N_r+\dots+a_rN_1$.

0 est une racine de $N_{r+1},N_r,\dots,N_1$ donc 0 est racine de $d(N_{r+1})=N'_{r+1}$.

Or clairement 0 est racine d'ordre 1 de N_{r+1} donc $N'_{r+1}(0)\neq 0$!!

Ainsi $d\circ\Delta=\Delta\circ d$ mais quelle que soit la valeur de r il n'existe pas $a_0,a_1,\dots,a_r$ dans $\mathbb{R}$ tels que $d=\sum_{\ell=0}^{r} a_\ell N_\ell$.

b) $\Delta_r(N_0)=0$ et $\forall n\in[\![1,r]\!]$, $\Delta_r(N_n)=N_{n-1}$

Alors la matrice de Δ_r dans la base $(N_n)_{n\in[\![0,r]\!]}$ est :

$$\begin{pmatrix}0&1&0&\cdots&0\\ \vdots&\ddots&\ddots&\ddots&\vdots\\ \vdots&&\ddots&\ddots&0\\ \vdots&&&\ddots&1\\ 0&\cdots&\cdots&\cdots&0\end{pmatrix}.$$

Nous avons déjà vu que :

$\forall \ell\in\mathbb{N},\ \forall n\in[\![0,r]\!],\quad \Delta_r^\ell N_n = \begin{cases} N_{n-\ell} & \text{si } \ell\le n\\ 0 & \end{cases}$

Alors $\forall n\in[\![0,r]\!]$, $\Delta_r^{r+1}N_n=0$. $\quad\Delta_r^{r+1}=0_{\mathcal{L}(\mathcal{P}_r)}$ ...(*)

X^{r+1} est un polynôme annulateur de Δ_r. Alors $\mathrm{Sp}\,\Delta_r\subset\{0\}$.

Notons que $\Delta_r(N_0)=0$ et $N_0=1\neq0$ donc $0\in\mathrm{Sp}\,\Delta_r$. $\mathrm{Sp}\,\Delta_r=\{0\}$.

Supposons que Δ_r est diagonalisable alors $\mathrm{Ker}\,\Delta_r=\mathrm{SEP}(\Delta_r,0)=\mathcal{P}_r$.

donc $\Delta_r=0_{\mathcal{L}(\mathcal{P}_r)}$. Or $\Delta_r N_1=1\neq0$ ($r\in\mathbb{N}^*$!)

Ainsi Δ_r n'est pas diagonalisable ... si $r\in\mathbb{N}^*$.

(*) car Δ_r^{r+1} et $0_{\mathcal{L}(\mathcal{P}_r)}$ sont deux endomorphismes de $\mathcal{P}_r$ qui coïncident sur une base de $\mathcal{P}_r$.

c) Supposons qu'il existe $g \in \mathcal{L}(\mathcal{G}_r)$ tel que $g \circ g = \Delta_r$.

Alors $g \circ \Delta_r = g \circ (g \circ g) = (g \circ g) \circ g = \Delta_r \circ g$. Ainsi $g \in C(\Delta_r)$.

Dans ces conditions $\exists (a_0, a_1, \dots, a_r) \in \mathbb{R}^{r+1}$, $g = \sum_{k=0}^{r} a_\ell \Delta_r^\ell$.

Alors $\Delta_r = \left(\sum_{\ell=0}^{r} a_\ell \Delta_r^\ell\right) \circ \left(\sum_{i=0}^{r} a_i \Delta_r^i\right) = \sum_{\ell=0}^{r} \sum_{i=0}^{r} a_\ell a_i \Delta_r^{\ell+i}$.

Rappelons que $\forall j \in [\![r+1, +\infty [\![$, $\Delta_r^j = 0_{\mathcal{L}(\mathcal{G}_r)}$ car $\Delta_r^{r+1} = 0_{\mathcal{L}(\mathcal{G}_r)}$.

Donc $\Delta_r = \sum_{\ell=0}^{r} \sum_{i=0}^{r-\ell} a_\ell a_i \Delta_r^{\ell+i} = \sum_{\ell=0}^{r} \sum_{j=\ell}^{r} a_\ell a_{j-\ell} \Delta_r^j$

$\Delta_r = \sum_{j=0}^{r} \left(\sum_{\ell=0}^{j} a_\ell a_{j-\ell}\right) \Delta_r^j$.

La liberté de $(Id_{\mathcal{G}_r}, \Delta, \Delta^2, \dots, \Delta^r)$ donne $\forall j \in [\![0, r]\!]$, $\sum_{\ell=0}^{j} a_\ell a_{j-\ell} = \begin{cases} 1 & \text{si } j = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Alors $0 = \sum_{\ell=0}^{0} a_\ell a_{0-\ell}$ et $\sum_{\ell=0}^{1} a_\ell a_{1-\ell} = 1$.

Donc $0 = a_0^2$ et $a_0 a_1 + a_1 a_0 = 1$. Ainsi $a_0 = 0$ et $2 a_0 a_1 = 1$!!

<u>Il n'existe pas d'endomorphisme g de $\mathcal{G}_r$ tels que $g \circ g = \Delta_r$.</u>

PARTIE II

(Q1) $t\in\mathbb{R}$. a) Soit $n\in\mathbb{N}^*$. u_n est défini (!) et $u_n>0$ car $x\in\mathbb{R}-\mathbb{N}$.

$$v_n=\ln\frac{u_{n+1}}{u_n}=\ln\left[\frac{(n+1)^t\,N_{n+1}(x)}{n^t\,N_n(x)}\right]=\ln\left[\left(\frac{n+1}{n}\right)^t\left|\frac{x-n}{n+1}\right|\right].$$

Supposons alors $n>x$ (ce qui n'est en rien restrictif pour étudier la nature de la série de terme général v_n).

Alors $v_n=t\ln\frac{n+1}{n}+\ln\frac{n-x}{n+1}=t\ln\left(1+\frac1n\right)+\ln\frac{1-\frac{x}{n}}{1+\frac1n}=(t-1)\ln\left(1+\frac1n\right)+\ln\left(1-\frac{x}{n}\right)$.

$\ln\left(1+\frac1n\right)=\frac1n-\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ et $\ln\left(1-\frac{x}{n}\right)=-\frac{x}{n}-\frac12\left(\frac{x}{n}\right)^2+o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

Ainsi $v_n=\frac{t-1}{n}-\frac{t-1}{2n^2}-\frac{x}{n}-\frac12\frac{x^2}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)=\frac{t-1-x}{n}-\frac{t-1+x^2}{2}\times\frac{1}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

1er cas : $t-1-x\neq0$. Alors $v_n\sim(t-1-x)\times\frac1n$.

Or la série de terme général $(t-1-x)\times\frac1n$ est divergente et de signe constant. Ceci suffit alors pour dire que la série de terme général v_n diverge.

2ème cas : $t-1-x=0$. Alors $\frac{t-1+x^2}{2}=\frac{x+x^2}{2}$

a) $\frac{x+x^2}{2}\neq0$. $v_n\sim-\frac{x+x^2}{2}\frac{1}{n^2}$; $|v_n|\sim\frac{|x+x^2|}{2}\times\frac{1}{n^2}$.

Or $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\frac{|x+x^2|}{2}\times\frac{1}{n^2}\geq0$ et la série de terme général $\frac{|x+x^2|}{2}\times\frac{1}{n^2}$ converge. Les règles de comparaison des séries à termes positifs montrent alors la convergence de la série de terme général $|v_n|$.

b) $\frac{x+x^2}{2}=0$. $v_n=o\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Alors, $|v_n|=o\left(\frac{1}{n^2}\right)$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $|v_n|\geq0$ et $\frac{1}{n^2}\geq0$ comme la série de terme général $\frac{1}{n^2}$ converge, les règles de comparaison des séries à termes positifs donnent la convergence de la série de terme général $|v_n|$.

Ainsi si $t-1-x=0$ la série de terme général v_n est absolument convergente donc convergente.

Finalement <u>la série de terme général v_n converge si et seulement si $t=x+1$.</u>

<u>b]</u> Observons que : $\forall n\in [\![2,+\infty[\![$, $\ln u_n=\sum_{k=1}^{n-1}\left(\ln(u_{k+1})-\ln(u_k)\right)+\ln u_1$.

$\forall n\in [\![2,+\infty[\![$, $\ln u_n=\sum_{k=1}^{n-1} v_k+\ln u_1$.

1^{er} cas.. $t-1-x>0$. Rappelons que $v_n\sim(t-1-x)\times\frac{1}{n}$ et que <u>la série de terme général v_n diverge</u>.

$\forall n\in\mathbb{N}^*$, $(t-1-x)\times\frac{1}{n}>0$. Donc <u>$\exists n_0\in\mathbb{N}^*$, $\forall n\in[\![n_0,+\infty[\![$, $v_n>0$.</u>

Dans ces conditions : $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n-1} v_k=+\infty$. Alors $\lim\limits_{n\to+\infty}\ln u_n=+\infty$

Finalement $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=+\infty$

2^{ème} cas.. $t-1-x<0$. Rappelons que $v_n\sim(t-1-x)\times\frac{1}{n}$ et que <u>la série de terme général v_n diverge.</u>

$\forall n\in\mathbb{N}^*$, $(t-1-x)\times\frac{1}{n}<0$. Donc <u>$\exists n_0\in\mathbb{N}^*$, $\forall n\in[\![n_0,+\infty[\![$, $v_n<0$</u>

Alors $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n-1} v_k=-\infty$. Ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty}(\ln u_n)=-\infty$. $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=0$.

3^{ème} cas.. $t-1-x=0$. La série de terme général v_n converge et :

$\forall n\in\mathbb{N}^*-\{1\}$, $\ln u_n=\sum_{k=1}^{n-1} v_k+\ln u_1$ donc la suite de terme général $\ln u_n$ converge vers $\sum_{k=1}^{+\infty} v_k+\ln u_1$.

Alors $(u_n)_{n\geqslant1}$ converge vers $u_1 e^{\sum_{k=1}^{+\infty} v_k}$; notons que $u_1 e^{\sum_{k=1}^{+\infty} v_k}>0$.

<u>Si $t-1-x>0$: $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=+\infty$</u>. <u>Si $t-1-x<0$: $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=0$.</u>

<u>Si $t=x+1$: $(u_n)_{n\geqslant1}$ converge et a une limite strictement positive.</u>

Posons $t = x+1$. Alors nous pouvons dire qu'il existe un réel strictement positif tel que $\lim_{n\to+\infty} u_n = C(x)$. Ainsi $u_n \sim C(x)$ car $C(x) \neq 0$.

Alors $n^{x+1}|N_n(x)| \underset{n\to+\infty}{\sim} C(x)$; $|N_n(x)| \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{C(x)}{n^{x+1}}$.

Il existe un réel strictement positif $C(x)$ tel que : $|N_n(x)| \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{C(x)}{n^{x+1}}$.

(Q2) a) $b \in \mathbb{R}_+^*$ et $\forall x \in [0,+\infty[$, $f(x) = b^x$.

$\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = \sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i}\binom{n}{i} f(i) = \sum_{i=0}^{n}(-1)^{n-i}\binom{n}{i} b^i = (b-1)^n$.

Si $b \in \mathbb{R}_+^*$ et si $\forall x \in [0,+\infty[$, $f(x) = b^x$ alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = (b-1)^n$.

---

b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Observons que $\varphi \in \mathcal{P}_n$ et rappelons que $(N_k)_{k\in[\![0,n]\!]}$ est une base de $\mathcal{P}_n$.

La démonstration faite en I Q4 d) donne $\varphi = \sum_{k=0}^{n} \Delta^k(\varphi)(0) N_k$.

Ainsi $\sum_{k=0}^{n} \Delta^k(\varphi)(0) N_k = \sum_{k=0}^{n} a_k N_k$. La liberté de $(N_0, N_1, \dots, N_n)$ donne alors :

$\forall k \in [\![0,n]\!]$, $a_k = \Delta^k(\varphi)(0)$.

D'après I Q5 : $\forall k \in [\![0,n]\!]$, $a_k = \Delta^k(\varphi)(0) = \sum_{i=0}^{k}(-1)^{k-i}\binom{k}{i}\varphi(i)$.

donc $\forall k \in [\![0,n]\!]$, $\sum_{i=0}^{k}(-1)^{k-i}\binom{k}{i} f(i) = \sum_{i=0}^{k}(-1)^{k-i}\binom{k}{i}\varphi(i)$.

Montrons alors par récurrence finie que $\forall k \in [\![0,n]\!]$, $f(k) = \varphi(k)$.

- $\sum_{i=0}^{0}(-1)^{0-i}\binom{0}{i} f(i) = \sum_{i=0}^{0}(-1)^{0-i}\binom{0}{i}\varphi(i)$ donc $f(0) = \varphi(0)$.
- Soit $k \in [\![0,n-1]\!]$. Supposons que $\forall i \in [\![0,k]\!]$, $f(i) = \varphi(i)$.

$\sum_{i=0}^{k+1}(-1)^{k+1-i}\binom{k+1}{i} f(i) = \sum_{i=0}^{k+1}(-1)^{k+1-i}\binom{k+1}{i}\varphi(i)$. L'hypothèse de récurrence

donne : $\sum_{i=0}^{k}(-1)^{k+1-i}\binom{k+1}{i}\varphi(i) + f(k+1) = \sum_{i=0}^{k+1}(-1)^{k+1-i}\binom{k+1}{i}\varphi(i)$, donc $f(k+1) = \varphi(k+1)$.

ceci achève la récurrence.

Finalement $\forall k \in [\![0,n]\!]$, $f(k)=g(k)$.

Alors $x \mapsto f(x)-g(x)$ s'annule en $0,1,2,\dots,n$.

4) Soit x un élément de $[0,+\infty[$ et soit $n\in\mathbb{N}$.

1er cas.. $x \in [0,+\infty[- [\![0,n]\!]$. Rappelons que f est de classe C^∞ sur $[0,+\infty[$.

Soit $A\in\mathbb{R}$. Posons $\forall t\in[0,+\infty[$, $\varphi(t)=f(t)-\sum_{\ell=0}^{n} a_\ell N_\ell(t) - N_{n+1}(t)A$.

$\varphi(x)=0 \iff A\,N_{n+1}(x) = f(x) - \sum_{\ell=0}^{n} a_\ell N_\ell(x)$

$x \notin [\![0,n]\!]$ donc x n'est pas un zéro de N_{n+1}.

Alors $\varphi(x)=0 \iff A=\frac{1}{N_{n+1}(x)}\left[f(x)-\sum_{k=0}^{n} a_\ell N_\ell(x)\right]$.

dans la suite nous supposerons que $A=\frac{1}{N_{n+1}(x)}\left[f(x)-\sum_{\ell=0}^{n} a_\ell N_\ell(x)\right]$.

Alors φ s'annule en x.

De plus $\forall i\in[\![0,n]\!]$, $\varphi(i)=f(i)-\sum_{\ell=0}^{n} a_\ell N_\ell(i) - N_{n+1}(i)A$

Or $\forall i\in[\![0,n]\!]$, $f(i)=\sum_{\ell=0}^{n} a_\ell N_\ell(i)$ et $N_{n+1}(i)=0$.

Par conséquent $\forall i\in[\![0,n]\!]$, $\varphi(i)=0$. Ainsi $0,1,\dots,n,x$ sont $n+2$ zéros distincts de φ.

$f, N_0, N_1,\dots, N_{n+1}$ sont de classe C^∞ sur $[0,+\infty[$ donc φ est de classe C^∞ sur $[0,+\infty[$.

Montrons alors par récurrence que pour tout $i\in[\![0,n+1]\!]$, $\varphi^{(i)}$ s'annule au moins $n+2-i$ fois sur $[0,+\infty[$.

→ C'est clair pour $i=0$.

→ Supposons la propriété vraie pour i dans $[\![0,n]\!]$ et montrons la pour $i+1$.

Posons $g=\varphi^{(i)}$. g admet au moins $n+2-i$ zéros distincts $x_1,x_2,\dots,$ x_{n+2-i} tels que $0\leq x_1<x_2<\dots<x_{n+2-i}$.

Soit $k\in[\![1,n+1-i]\!]$. g est dérivable sur $[x_k,x_{k+1}]$ et $g(x_k)=g(x_{k+1})=0$.

Le théorème de Rolle montre l'existence de y_k dans $]x_k,x_{k+1}[$ tel que $g'(y_k)$.

$y_1, y_2, \dots, y_{n+2-i}$ sont alors $n+2-i$ zéros distincts de g appartenant à $[0,+\infty[$

Ainsi $\varphi^{(i+1)}$ admet au moins $n+2-(i+1)$ zéros distincts dans $[0,+\infty[$.

ceci achève la récurrence.

Nous pouvons alors dire que $\varphi^{(n+1)}$ admet au moins un zéro dans $[0,+\infty[$.

$\exists \theta \in [0,+\infty[, \ \varphi^{(n+1)}(\theta) = 0.$

$\forall t \in [0,+\infty[, \quad \varphi(t) = f(t) - \sum_{\ell=0}^{n} a_\ell N_\ell(t) - N_{n+1}(t) A.$

Rappelons que $\forall \ell \in [\![0,n]\!], N_\ell \in \mathcal{P}_n$ donc $\forall \ell \in [\![0,n]\!], N_\ell^{(n+1)} = 0_{\mathcal{P}_n}$.

Alors $\forall t \in [0,+\infty[, \ \varphi^{(n+1)}(t) = f^{(n+1)}(t) - N_{n+1}^{(n+1)}(t) A.$

$\forall t \in \mathbb{R}, \ N_{n+1}(t) = \frac{1}{(n+1)!} \prod_{i=0}^{n} (x-i)$. Alors $N_{n+1}^{(n+1)}$ est une constante.

ici $N_{n+1}^{(n+1)} = \frac{1}{(n+1)!} (n+1)!$

Ainsi $\forall t \in [0,+\infty[, \ \varphi^{(n+1)}(t) = f^{(n+1)}(t) - A$. Alors $0 = \varphi^{(n+1)}(\theta) = f^{(n+1)}(\theta) - A$.

Donc $A = f^{(n+1)}(\theta)$. Alors $\frac{1}{N_{n+1}(x)} \left[f(x) - \sum_{\ell=0}^{n} a_\ell N_\ell(x) \right] = A = f^{(n+1)}(\theta).$

Donc $f(x) = \sum_{\ell=0}^{n} a_\ell N_\ell(x) + N_{n+1}(x) f^{(n+1)}(\theta).$

<u>2ème cas</u> : $x \in [\![0,n]\!]$. Alors $f(x) = \sum_{\ell=0}^{n} a_\ell N_\ell(x)$ et $N_{n+1}(x) = 0$.

Alors si θ est un élément quelconque de $[0,+\infty[$.

$f(x) = \sum_{\ell=0}^{n} a_\ell N_\ell(x) + N_{n+1}(x) f^{(n+1)}(\theta)$. D'où l'on :

$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0,+\infty[, \exists \theta \in [0,+\infty[, \ f(x) = \sum_{\ell=0}^{n} a_\ell N_\ell(x) + N_{n+1}(x) f^{(n+1)}(\theta).$

d) Soit $x \in [0,+\infty[$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $\exists \theta \in [0,+\infty[$

$\exists \theta \in [0,+\infty[$, $f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k N_k(x) + N_{n+1}(x) f^{(n+1)}(\theta)$

$\left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} a_k N_k(x) \right| = |N_{n+1}(x)| \, |f^{(n+1)}(\theta)| \leq M(n+1) |N_{n+1}(x)|$

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} a_k N_k(x) \right| \leq M(n+1) |N_{n+1}(x)|$. Supposons que $x \notin \mathbb{N}$.

Or $M n |N_{n+1}(x)| \underset{n\to+\infty}{\sim} M(n+1) \frac{C(x)}{(n+1)^{x+1}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{M n C(x)}{n^{x+1}} = \frac{M C(x)}{n^{x}}$ car $x \in [0,+\infty[\setminus \mathbb{N}$.

Ainsi $\lim_{n\to+\infty} \left(M n \left| N_{n+1}(x) \right| \right) = \lim_{n\to+\infty} \frac{M C(x)}{n^{x}} = 0$ ($x>0$!)

Alors par encadrement on déduit : $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k N_k(x) = f(x)$.

La série de terme général $a_k N_k(x)$ converge et $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k N_k(x) = f(x)$.

Supposons maintenant que x soit dans $\mathbb{N}$.

$\forall n \in [\![x,+\infty [\![$, $N_{n+1}(x) = 0$ (les zéros de N_{n+1} sont $0, 1, 2, \dots, n$)

Alors $\forall n \in [\![x,+\infty [\![$, $\left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} a_k N_k(x) \right| \leq M n |N_{n+1}(x)| = 0$.

$\forall n \in [\![x,+\infty [\![$, $f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k N_k(x)$. Cela suffit largement pour dire que la série de terme général $a_k N_k(x)$ converge et $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k N_k(x) = f(x)$.

Ainsi $\forall x \in [0,+\infty[$, $f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k N_k(x)$

Supposons que f s'annule sur $\mathbb{N}$. $\forall i \in \mathbb{N}$, $f(i) = 0$. $\forall k \in \mathbb{N}$, $a_k = \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} \binom{k}{i} f(i) = 0$.

Alors $\forall x \in [0,+\infty[$, $f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k N_k(x) = 0$.

Si f s'annule sur $\mathbb{N}$, f est nulle sur $[0,+\infty[$.

(Q3) a) Soit h un réel tel que $|h|>1$. Soit $x\in\mathbb{R}-\mathbb{N}$.

$$|h^n N_n(x)| = |h|^n |N_n(x)| \underset{n\to+\infty}{\sim} |h|^n \frac{c(x)}{n^{x+1}}.$$

$c(x)>0$ donc par croissance comparée $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(|h|^n \frac{c(x)}{n^{x+1}}\right)=+\infty$ car $|h|>1$.

Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} |h^n N_n(x)| = +\infty$. La suite $(h^n N_n(x))$ ne peut converger vers 0.

<u>La série de terme général $h^n N_n(x)$ est divergente si $x\in\mathbb{R}-\mathbb{N}$ et si h est un réel tel que $|h|>1$.</u>

b) Ici $h\in\mathbb{R}$ et $|h|<1$. x est un élément de $\mathbb{R}$.

i) <u>1er cas.</u> $x\notin\mathbb{N}$. $n^2|h^n N_n(x)| = n^2|h|^n|N_n(x)| \underset{n\to+\infty}{\sim} n^2|h|^n \frac{c(x)}{n^{x+1}} = c(x)|h|^n \frac{1}{n^{x-1}}$.

$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(c(x)|h|^n\frac{1}{n^{x-1}}\right)=0$ par croissance comparée car $|h|<1$.

Ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(n^2|h^n N_n(x)|\right)=0$. Alors $|h^n N_n(x)| = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

De plus $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $|h^n N_n(x)|\geqslant 0$ et $\frac{1}{n^2}\geqslant 0$. La convergence de la série de terme général $\frac{1}{n^2}$ et les règles de comparaison des séries à termes positifs donnent la convergence de la série de terme général $|h^n N_n(x)|$.

<u>2e cas.</u> $x\in\mathbb{N}$. Alors $\forall n\in[\![x,+\infty[\![$, $|h^n N_n(x)| = |h^n\times 0| = 0$.
La suite $(|h^n N_n(x)|)_{n\geqslant 0}$ est nulle à partir du rang $x+1$.
Donc la série de terme général $|h^n N_n(x)|$ converge.

<u>Si $x\in\mathbb{R}$ et si h est un réel tel que $|h|<1$ alors la série de terme général $h^n N_n(x)$ est absolument convergente.</u>

ii) Posons $\forall t\in]-1,+\infty[$, $\varphi(t)=(1+t)^x$. φ est de classe C^∞ sur $]-1,+\infty[$ et une récurrence simple donne $\forall n\in\mathbb{N}$, $\forall t\in]-1,+\infty[$, $\varphi^{(n)}(t) = x(x-1)\cdots(x-n+1)(1+t)^{x-n}$

donc $\forall n\in\mathbb{N}$, $\forall t\in]-1,+\infty[$, $\varphi^{(n)}(t) = N_n(x)(1+t)^{x-n}\times n!$

Rappelons que $h \in \mathbb{R}$ et que $|h|<1$. Alors $h \in]-1,+\infty[$. La formule de Taylor avec reste intégral donne : $\varphi(h) = \sum_{\ell=0}^{n} \frac{h^\ell}{\ell!}\varphi^{(\ell)}(0) + \int_0^h \frac{(u-h)^n}{n!}\varphi^{(n+1)}(u)\,du$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

pour c ii.

$\forall n\in\mathbb{N}$, $(1+h)^x = \sum_{\ell=0}^{n} \frac{h^\ell}{\ell!} N_\ell(x)\times \ell! + \int_0^h \frac{(u-h)^n}{n!} N_{n+1}(x)(1+u)^{x-(n+1)}(n+1)!\,du$.

$\forall n\in\mathbb{N}$, $(1+h)^x = \sum_{\ell=0}^{n} h^\ell N_\ell(x) + (n+1)N_{n+1}(x)\int_0^h \left(\frac{h-u}{1+u}\right)^n (1+u)^{x-1}\,du$.

⚠ Notons que ceci vaut pour tout $h\in]-1,+\infty[$!

Posons : $\forall u \in]-1,+\infty[$, $\gamma(u) = \frac{u-h}{1+u}$. γ est dérivable sur $]-1,+\infty[$ et $\forall u\in]-1,+\infty[$, $\gamma'(u)=\frac{1+h}{(1+u)^2}$.

Alors $\forall u\in]-1,+\infty[$, $\gamma'(u)>0$. γ est strictement croissante sur $]-1,+\infty[$

Si $h\geq 0$: $\forall u\in[0,h]$, $\gamma(0)\le\gamma(u)\le\gamma(h)$; $\forall u\in[0,h]$, $-h\le\gamma(u)\le 0$; $\forall u\in[0,h]$, $|\gamma(u)|\le h=|h|$

Si $h<0$: $\forall u\in[h,0]$, $\gamma(h)\le\gamma(u)\le\gamma(0)$; $\forall u\in[h,0]$, $0\le\gamma(u)\le -h$; $\forall u\in[h,0]$ $|\gamma(u)|\le -h=|h|$.

donc $\forall u\in \overleftrightarrow{[0,h]}$, $|\gamma(u)|\le|h|$; $\forall n\in\mathbb{N}, \forall u\in\overleftrightarrow{[0,h]}$, $\left|\frac{h-u}{1+u}\right|^n = \left|\frac{u-h}{1+u}\right|^n = |\gamma(u)|^n \le |h|^n$.

Supposons $h\neq 0$ et distinguons deux cas.

1er cas... $h>0$. $\left|\frac{1}{|h|^n}\int_0^h \left(\frac{h-u}{1+u}\right)^n(1+u)^{x-1}du\right| \le \frac{1}{|h|^n}\int_0^h \left|\frac{h-u}{1+u}\right|^n |(1+u)^{x-1}|\,du$ pour tout n dans $\mathbb{N}$.

$\forall n\in\mathbb{N}$, $\left|\frac{1}{|h|^n}\int_0^h \left(\frac{h-u}{1+u}\right)^n(1+u)^{x-1}du\right| \le \frac{1}{|h|^n}\int_0^h |h|^n(1+u)^{x-1}du = \int_0^h(1+u)^{x-1}du = \left|\int_0^h (1+u)^{x-1}du\right|$

2ème cas... $h<0$. Soit $n\in\mathbb{N}$.

$\left|\frac{1}{|h|^n}\int_0^h \left(\frac{h-u}{1+u}\right)^n(1+u)^{x-1}du\right| \underset{|-A|=|A|}{=} \frac{1}{|h|^n}\left|\int_h^0 \left(\frac{h-u}{1+u}\right)^n(1+u)^{x-1}du\right| \le \frac{1}{|h|^n}\int_h^0 \left|\frac{h-u}{1+u}\right|^n (1+u)^{x-1}du$.

$\left|\frac{1}{|h|^n}\int_0^h \left(\frac{h-u}{1+u}\right)^n(1+u)^{x-1}du\right| \le \frac{1}{|h|^n}\int_h^0 |h|^n(1+u)^{x-1}du = \int_h^0(1+u)^{x-1}du = \left|\int_0^h(1+u)^{x-1}du\right|$.

Finalement si h n'est pas nul : $\forall n\in\mathbb{N}$, $\left|\frac{1}{|h|^n}\int_0^h \left(\frac{h-u}{1+u}\right)^n(1+u)^{x-1}du\right| \le \left|\int_0^h (1+u)^{x-1}du\right|$.

Si h n'est pas nul la suite $\left(\frac{1}{|h|^n}\int_0^h \left(\frac{h-u}{1+u}\right)^n(1+u)^{x-1}du\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

(ii) • Si h est nul : $\forall n \in \mathbb{N}$, $(1+h)^x - \sum_{k=0}^{n} h^k N_k(x) = 1 - N_0(x) = 0$.

Alors $\sum_{k=0}^{+\infty} h^k N_k(x) = (1+h)^x$.

• Supposons h non nul. $\exists M_h \in \mathbb{R}_+^*$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\left| \frac{1}{|h|^n} \int_0^h \left(\frac{h-u}{1+u}\right)^n (1+u)^{x-1} du \right| \leq M_h$.

Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}$, $\left|(1+h)^x - \sum_{k=0}^{n} h^k N_k(x)\right| = \left|(n+1) N_{n+1}(x) |h|^n\right| \left| \frac{1}{|h|^n} \int_0^h \left(\frac{h-u}{1+u}\right)^n (1+u)^{x-1} du \right|$

Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}$, $\left|(1+h)^x - \sum_{k=0}^{n} h^k N_k(x)\right| \leq (n+1) |N_{n+1}(x)| |h|^n M_h$ (*).

<u>1^er cas</u>... $x \notin \mathbb{N}$. Alors $(n+1) |N_{n+1}(x)| |h|^n M_h \underset{n \to +\infty}{\sim} n \frac{C(x)}{(n+1)^{x+1}} |h|^n M_h \underset{n \to +\infty}{\sim} n \frac{C(x)}{n^{x+1}} |h|^n M_h$.

Donc $(n+1) |N_{n+1}(x)| |h|^n M_h \underset{n \to +\infty}{\sim} C(x) M_h \frac{|h|^n}{n^x}$.

Or $|h| < 1$ donc, par croissance comparée, $\lim_{n \to +\infty} \left(C(x) M_h \frac{|h|^n}{n^x}\right) = 0$.

Ainsi $\lim_{n \to +\infty} \left((n+1) |N_{n+1}(x)| |h|^n M_h\right) = 0$.

<u>2^e cas</u>... $x \in \mathbb{N}$. Alors $N_{n+1}(x) = 0$ dès que $n \geqslant x$ on a donc encore et très largement $\lim_{n \to +\infty} \left((n+1) |N_{n+1}(x)| |h|^n M_h\right) = 0$.

Dans ces conditions (*) donne : $\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} h^k N_k(x) = (1+h)^x$ par encadrement.

Si $|h| < 1$ $\sum_{k=0}^{+\infty} h^k N_k(x) = (1+h)^x$ pour tout x dans $\mathbb{R}$.

<u>c)</u> <u>Ici $h = 1$</u> i... x est un réel tel que $x \leq -1$.

$$|N_n(x)| \sim \frac{C(x)}{n^{x+1}} \text{ car } x \notin \mathbb{N}.$$

Alors $\lim_{n \to +\infty} |N_n(x)| = \lim_{n \to +\infty} \frac{C(x)}{n^{x+1}} = \begin{cases} C(x) & \text{si } x = -1 \\ +\infty & \text{si } x < -1 \end{cases}$; la suite $(N_n(x))_{n \geqslant 0}$ ne converge pas vers 0. <u>La série de terme général $N_n(x)$ diverge pour $x \leq -1$.</u>

ii. <u>Ici on a $x \in \mathbb{R}$ et $x > -1$.</u>

Nous avons remarqué que la formule de 3° b) ii. vaut pour tout t dans $]-1,+\infty[$.

Alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $(1+1)^x - \sum_{k=0}^{n} 1^k N_k(x) = (n+1) N_{n+1}(x) \int_0^1 \left(\frac{1-u}{1+u}\right)^n (1+u)^{x-1} du$.

$\forall n \in \mathbb{N}$, $2^x - \sum_{\ell=0}^{n} N_\ell(x) = (n+1) N_{n+1}(x) \int_0^1 \left(\frac{1-u}{1+u}\right)^n (1+u)^{x-1} du$.

$\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall u \in [0,1]$, $0 \leq \left(\frac{1-u}{1+u}\right)^n (1+u)^{x-1} = \frac{(1-u)^n}{(1+u)^n}(1+u)^{x-1} \leq (1-u)^n \max_{t \in [0,1]} (1+t)^{x-1}$. $\qquad \frac{1}{(1+u)^n} \leq 1$

Alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq \int_0^1 \left(\frac{1-u}{1+u}\right)^n (1+u)^{x-1} du \leq \max_{t \in [0,1]} (1+t)^{x-1} \underbrace{\int_0^1 (1-u)^n du}_{\frac{1}{n+1}} \leq \frac{\max_{t \in [0,1]} (1+t)^{x-1}}{n+1}$.

Posons $L_x = \max_{t \in [0,1]} (1+t)^{x-1}$.

$\forall n \in \mathbb{N}$, $\left|2^x - \sum_{\ell=0}^{n} N_\ell(x)\right| \leq (n+1) |N_{n+1}(x)| \frac{L_x}{n+1} = |N_{n+1}(x)| L_x$. $\qquad (**)$

<u>1er cas.</u> $x \notin \mathbb{N}$. $\quad |N_{n+1}(x)| L_x \underset{n \to +\infty}{\sim} L_x \frac{C(x)}{(n+1)^{x+1}} \sim L_x \frac{C(x)}{n^{x+1}}$ et $x+1 > 0$.

Ainsi $\lim_{n \to +\infty} (|N_{n+1}(x)| L_x) = 0$

<u>2e cas.</u> $x \in \mathbb{N}$. Alors $\quad N_{n+1}(x) L_x = 0$ pour $n \geq x$

on a encore $\lim_{n \to +\infty} (|N_{n+1}(x)| L_x) = 0$.

$(**)$ donne alors : $\lim_{n \to +\infty} \sum_{\ell=0}^{n} N_\ell(x) = 2^x$.

Si $x > -1$ la série de terme général $N_n(x)$ converge et $\sum_{n=0}^{+\infty} N_n(x) = 2^x$.

<u>d) Ici $h = -1$.</u>

Dans toute la suite x est un réel. Nous ne le redirons pas... souvent.

i. <u>1er cas</u> $x \in \mathbb{N}$. Alors la suite $(|(-1)^n N_n(x)|)_{n \in \mathbb{N}}$ est nulle à partir du rang $x+1$. La série de terme général $|(-1)^n N_n(x)|$ converge.

Donc la série de terme général $(-1)^n N_n(x)$ est absolument convergente.

2ème cas.. $x \notin \mathbb{N}$. $|(-1)^n N_n(x)| = |N_n(x)| \sim \frac{C(x)}{n^{x+1}}$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{C(x)}{n^{x+1}} \geqslant 0$.

Alors la série de terme général $|(-1)^n N_n(x)|$ est de même nature que la série

de terme général $\frac{C(x)}{n^{x+1}}$. Cette série de

Or la série de terme général $\frac{C(x)}{n^{x+1}}$ converge si et seulement si $x+1>1$

Alors la série de terme général $|(-1)^n N_n(x)|$ converge si et seulement si $x>0$... dans le cas où $x \notin \mathbb{N}$.

Finalement la série de terme général $|(-1)^n N_n(x)|$ converge si et seulement si $x \in \mathbb{N}$ ou $(x \notin \mathbb{N}$ et $x>0)$ donc si et seulement si $x \geqslant 0$.

<u>La série de terme général $(-1)^n N_n(x)$ est absolument convergente si et seulement si $x \geqslant 0$.</u>

Si $x \geqslant 0$ la série de terme général $(-1)^n N_n(x)$ est absolument convergente donc convergente.

Supposons que $x<0$. Soit $n \in \mathbb{N}$... ou $n \in \mathbb{N}^*$

$(-1)^n N_n(x) = (-1)^n \frac{1}{n!}\prod_{k=0}^{n-1}(x-k) = \frac{(-1)^n}{n!}\prod_{k=0}^{n-1}(-|x|-k) = \frac{1}{n!}\prod_{k=0}^{n-1}(|x|+k) \geqslant 0$

Alors $(-1)^n N_n(x) = |(-1)^n N_n(x)|$. La série de terme général $(-1)^n N_n(x)$ est de même nature que la série de terme général $|(-1)^n N_n(x)|$; elle est donc divergente.

<u>Finalement la série de terme général $(-1)^n N_n(x)$ converge si et seulement si $x \geqslant 0$.</u>

ii) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $N_{k-1} = \Delta N_k$.

Alors $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $N_{k-1}(x-1) = N_k((x-1)+1) - N_k(x-1) = N_k(x) - N_k(x-1)$

$\forall k \in \mathbb{N}^*$, $(-1)^k N_k(x) = (-1)^k N_{k-1}(x-1) + (-1)^k N_k(x-1) = (-1)^k N_k(x-1) - (-1)^{k-1} N_{k-1}(x-1)$

Alors $\sum_{k=1}^{n}(-1)^k N_k(x) = \sum_{k=1}^{n}\left((-1)^k N_k(x-1) - (-1)^{k-1} N_{k-1}(x-1)\right) = (-1)^n N_n(x-1) - N_0(x-1)$

Ainsi $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k N_k(x) = (-1)^n N_n(x-1) - N_0(x-1) + N_0(x) \overset{N_0(x-1)=N_0(x)=1}{=} (-1)^n N_n(x-1)$.

<u>$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k N_k(x) = (-1)^n N_n(x-1)$.</u>

<u>Remarques</u> 1.. On peut aussi obtenir le résultat par récurrence.
2.. Le résultat vaut encore pour $n=0$.

iii. <u>1^er cas</u>. $x \notin \mathbb{N}$. Alors $x > 0$ et $x-1 \notin \mathbb{N}$.

Ainsi $|(-1)^n N_n(x-1)| = |N_n(x-1)| \sim \dfrac{C(x)}{n^{(x-1)+1}} = \dfrac{C(x)}{n^x}$.

Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} |(-1)^n N_n(x-1)| = 0$; $\lim\limits_{n \to +\infty} \left((-1)^n N_n(x-1)\right) = 0$

Alors $\lim\limits_{n \to +\infty} \overline{\sum\limits_{k=0}^{n}} (-1)^k N_k(x) = 0$. $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} (-1)^k N_k(x) = 0$.

<u>2^e cas</u>. $x = 0$ $N_0(x) = 1$ et $\forall i \in \mathbb{N}^*, N_i(x) = 0$. $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} (-1)^k N_k(x) = 1$

<u>3^ème cas</u>. $x \in \mathbb{N}^*$. $x-1 \in \mathbb{N}$. $\forall n \in \mathbb{N}$; $x \leq n \Rightarrow N_n(x-1) = 0$.

Alors $\forall n \in [\![x, +\infty[\![$, $\sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k N_k(x) = (-1)^n N_n(x-1) = 0$; $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} (-1)^k N_k(x) = 0$

Finalement : $\forall x \in [0, +\infty[$, $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} (-1)^n N_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ 0 & \text{si } x > 0 \end{cases}$.