PARTIE I

(Q1) a) Notons u la restriction de la fonction sin à $[0,\frac{\pi}{2}]$.

u est deux fois dérivable sur $[0,\frac{\pi}{2}]$ et $\forall x \in [0,\frac{\pi}{2}]$, $u''(x) = -\sin x \leq 0$.

Ainsi u est concave sur $[0,\frac{\pi}{2}]$. La courbe représentative de u est au-dessus de toutes ses cordes, en particulier de la corde qui joint les points de la courbe d'abscisses 0 et $\frac{\pi}{2}$; cette corde est portée par la droite d'équation $y = \frac{u(\pi/2)-u(0)}{\frac{\pi}{2}-0}(x-0)+u(0)$ ou d'équation $y = \frac{2}{\pi}x$.

Ainsi $\forall x \in [0,\frac{\pi}{2}]$, $\sin x = u(x) \geq \frac{2}{\pi}x$.

Ceci s'écrit encore : $\underline{\forall t \in [0,\frac{\pi}{2}],\ t \leq \frac{\pi}{2}\sin t}$.

<u>Remarque</u>.. ce résultat s'obtient également sans difficulté en étudiant $t \mapsto \frac{\pi}{2}\sin t - t$ sur $[0,\frac{\pi}{2}]$.

b) Soit $p \in \mathbb{N}$. $\forall t \in [0,\frac{\pi}{2}]$, $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}\sin t$.

Alors $\forall t \in [0,\frac{\pi}{2}]$, $0 \leq t^2 \leq \frac{\pi^2}{4}\sin^2 t$ et $\cos^{2p} t \geq 0$.

Ainsi $\forall t \in [0,\frac{\pi}{2}]$, $0 \leq t^2\cos^{2p} t \leq \frac{\pi^2}{4}\sin^2 t\,(\cos^{2p} t) = \frac{\pi^2}{4}(1-\cos^2 t)\cos^{2p} t = \frac{\pi^2}{4}(\cos^{2p} t - \cos^{2p+2} t)$.

En intégrant il vient : $0 \leq \int_0^{\pi/2} t^2\cos^{2p} t\,dt \leq \frac{\pi^2}{4}\left(\int_0^{\pi/2}\cos^{2p} t\,dt - \int_0^{\pi/2}\cos^{2p+2} t\,dt\right)$ car $\frac{\pi}{2} \geq 0$.

Alors $\underline{\forall p \in \mathbb{N},\ 0 \leq J_p \leq \frac{\pi^2}{4}(I_p - I_{p+1})}$.

c) Soit $p \in \mathbb{N}$. $I_{p+1} = \int_0^{\pi/2}\cos t\,\cos^{2p+1} t\,dt \underset{u'(t)=\cos t\ \ v(t)=\cos^{2p+1} t}{=} [\sin t\cos^{2p+1} t]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2}\sin t\,(2p+1)(-\sin t)\cos^{2p} t\,dt$

$I_{p+1} = 0 - 0 + \int_0^{\pi/2}(2p+1)\sin^2 t\cos^{2p} t\,dt = (2p+1)\int_0^{\pi/2}(1-\cos^2 t)\cos^{2p} t\,dt = (2p+1)\left(\int_0^{\pi/2}\cos^{2p} t\,dt - \int_0^{\pi/2}\cos^{2p+2} t\,dt\right)$

$I_{p+1} = (2p+1)(I_p - I_{p+1})$; $(2p+2)I_{p+1} = (2p+1)I_p$.

$\underline{\forall p \in \mathbb{N},\ I_{p+1} = \frac{2p+1}{2p+2}I_p}$.

d) Soit $p \in \mathbb{N}$. $t \mapsto \cos^{2p}(t)$ est positive, continue et non identiquement nulle sur $[0,\frac{\pi}{2}]$,

alors $\underline{I_p > 0}$. $0 \leq J_p \leq \frac{\pi^2}{4}(I_p - I_{p+1})$ donne alors : $0 \leq \frac{J_p}{I_p} \leq \frac{\pi^2}{4}\left(1 - \frac{I_{p+1}}{I_p}\right)$.

Comme $\frac{I_{p+1}}{I_p} = \frac{2p+1}{2p+2}$: $0 \leq \frac{J_p}{I_p} \leq \frac{\pi^2}{4}\left(1 - \frac{2p+1}{2p+2}\right) = \frac{\pi^2}{4} \times \frac{1}{2p+2}$.

Comme $\lim\limits_{p \to +\infty} \frac{1}{2p+1} = 0$; $\underline{\underline{\lim\limits_{p \to +\infty} \frac{J_p}{I_p} = 0}}$ (théorème d'encadrement).

Q2 a) Soit $p \in \mathbb{N}^*$. $I_p = \int_0^{\pi/2} \cos^{2p} t \, dt \underset{u'(t)=1 \text{ et } v(t)=\cos^{2p} t}{\overset{\text{IPP}}{=}} \left[t \cos^{2p} t\right]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} t(2p)(-\sin t)(\cos^{2p-1} t)\, dt$

$I_p = 0 - 0 + 2p \int_0^{\pi/2} t \sin t \cos^{2p-1} t \, dt \underset{u'(t)=t \text{ et } v(t)=\sin t \cos^{2p-1} t}{\overset{\text{IPP}}{=}} 2p\left[\frac{t^2}{2} \sin t \cos^{2p-1} t\right]_0^{\pi/2} - 2p \int_0^{\pi/2} \frac{t^2}{2}\left(\cos t \cos^{2p-1} t + \sin t (2p-1)(-\sin t)(\cos t)^{2p-2}\right) dt$

$I_p = 2p(0-0) - p \int_0^{\pi/2} t^2 \cos^{2p} t \, dt + p(2p-1) \int_0^{\pi/2} t^2 \sin^2 t \cos^{2p-2} t \, dt$

$I_p = -p J_p + p(2p-1) \int_0^{\pi/2} t^2 (1 - \cos^2 t) \cos^{2p-2} t \, dt = -p J_p + p(2p-1)(J_{p-1} - J_p)$.

$I_p = p(2p-1) J_{p-1} + (-p(2p-1) - p) J_p = p(2p-1) J_{p-1} - 2p^2 J_p$.

$\underline{\underline{\forall p \in \mathbb{N}^*, \ I_p = p\left((2p-1) J_{p-1} - 2p J_p\right).}}$

b) Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Signalons encore que I_p n'est pas nul.

Alors $1 = p\left((2p-1)\frac{J_{p-1}}{I_p} - 2p \frac{J_p}{I_p}\right)$; $\frac{1}{p} = (2p-1)\frac{J_{p-1}}{I_p} - 2p\frac{J_p}{I_p}$.

Ainsi $\frac{1}{2p^2} = \underbrace{\frac{2p-1}{2p} \frac{1}{I_p}}_{= \frac{1}{I_{p-1}} \text{ (d'après Q1 c)}} J_{p-1} - \frac{J_p}{I_p}$; alors $\frac{1}{2p^2} = \frac{J_{p-1}}{I_{p-1}} - \frac{J_p}{I_p}$.

$\underline{\underline{\forall p \in \mathbb{N}^*, \ \frac{J_{p-1}}{I_{p-1}} - \frac{J_p}{I_p} = \frac{1}{2p^2}.}}$

c) $J_0 = \int_0^{\pi/2} t^2 \, dt = \left[\frac{1}{3} t^3\right]_0^{\pi/2} = \frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{2}\right)^3$; $I_0 = \int_0^{\pi/2} dt = \frac{\pi}{2}$. $\underline{\underline{J_0 = \frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{2}\right)^3 \text{ et } I_0 = \frac{\pi}{2}.}}$

Soit $n\in\mathbb{N}^*$. $\quad \frac{1}{2}S_n = \sum_{p=1}^{n}\frac{1}{2p^2} = \sum_{p=1}^{n}\left(\frac{J_{p-1}}{I_{p-1}} - \frac{J_p}{I_p}\right) = \frac{J_0}{I_0} - \frac{J_n}{I_n}$.

Comme $\lim_{n\to+\infty}\frac{J_n}{I_n} = 0$: $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}S_n\right) = \frac{J_0}{I_0} = \frac{1}{3}\frac{(\pi/2)^3}{\pi/2} = \frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 = \frac{\pi^2}{12}$.

Alors $\lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{\pi^2}{6}$. $(S_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers $S = \frac{\pi^2}{6}$.

PARTIE II

⚠ Je ne distinguerai pas f_0 et f_k pour $k\geqslant 1$. C'est inutile. ok !

(Q1) Sommation de séries télescopiques.

a) • Soit $f\in E$. f est continue sur $]0,+\infty[$ donc $x\mapsto f(x+1)-f(x)$ est continue sur $]0,+\infty[$.
De plus $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$ donc $\lim_{x\to+\infty}(f(x+1)-f(x))=0$. Ainsi $\Delta(f)\in E$.

Δ est une application de E dans E.

• Soit $(f,g)\in E^2$ et soit $\lambda\in\mathbb{R}$.

$\forall x\in]0,+\infty[$, $(\Delta(\lambda f+g))(x) = (\lambda f+g)(x+1)-(\lambda f+g)(x) = \lambda(f(x+1)-f(x)) + g(x+1)-g(x)$.

$\forall x\in]0,+\infty[$, $(\Delta(\lambda f+g))(x) = \lambda(\Delta f)(x) + (\Delta g)(x) = (\lambda(\Delta f)+(\Delta g))(x)$.

$(\Delta(\lambda f+g)) = \lambda(\Delta f) + (\Delta g)$.

Ainsi Δ est linéaire.

Δ est un endomorphisme de E.

b) Soit $r\in\mathbb{N}^*$. $\quad \sum_{p=1}^{r}(\Delta f)(p) = \sum_{p=1}^{r}(f(p+1)-f(p)) = f(r+1)-f(1)$.

$\lim_{r\to+\infty}\left(\sum_{p=1}^{r}(\Delta f)(p)\right) = \lim_{r\to+\infty}(f(r+1)-f(1)) \overset{(*)}{=} 0 - f(1) = -f(1)$.

(*) $f\in E$ donc $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$

La série de terme général $(\Delta f)(p)$ converge et $\sum_{p=1}^{+\infty}(\Delta f)(p) = -f(1)$.

Soit $n\in\mathbb{N}$. $\forall r\in [\![n+1,+\infty[\![$, $\sum_{p=n+1}^{r}(\Delta f)(p)=\sum_{p=n+1}^{r}(f(p+1)-f(p))=f(r+1)-f(n+1)$.

$\lim_{r\mapsto+\infty}\left(\sum_{p=n+1}^{r}(\Delta f)(p)\right)=\lim_{r\mapsto+\infty}(f(r+1)-f(n+1))=0-f(n+1)=-f(n+1)$.

$$\forall n\in\mathbb{N},\ \sum_{p=n+1}^{+\infty}(\Delta f)(p)=-f(n+1).$$

c) Observons que : $\forall k\in\underline{\mathbb{N}}$, $\forall x\in]0,+\infty[$, $f_k(x)=\prod_{i=0}^{k}\frac{1}{x+i}$ ... d'où le Δ du début !

Il n'est pas difficile non plus de se convaincre que, pour tout k dans $\mathbb{N}$, $f_k\in E$.

$\forall k\in\mathbb{N}^*$, $\forall x\in]0,+\infty[$, $(\Delta f_{k-1})(x)=f_{k-1}(x+1)-f_{k-1}(x)=\prod_{i=0}^{k-1}\frac{1}{x+1+i}-\prod_{i=0}^{k-1}\frac{1}{x+i}=\prod_{i=1}^{k}\frac{1}{x+i}-\prod_{i=0}^{k-1}\frac{1}{x+i}$

$\forall k\in\mathbb{N}^*$, $\forall x\in]0,+\infty[$, $(\Delta f_{k-1})(x)=\left(\prod_{i=0}^{k}\frac{1}{x+i}\right)\left(x-(x+k)\right)=-k\,f_k(x)$.

$$\forall k\in\mathbb{N}^*,\ (\Delta f_{k-1})=-k\,f_k.$$

d) Soit $k\in\mathbb{N}^*$. $\forall r\in\mathbb{N}^*$, $\sum_{p=1}^{r}f_k(p)=-\frac{1}{k}\sum_{p=1}^{r}(\Delta f_{k-1})(p)$.

Ainsi $\lim_{r\mapsto+\infty}\left(\sum_{p=1}^{r}f_k(p)\right)=-\frac{1}{k}\lim_{r\mapsto+\infty}\sum_{p=1}^{r}(\Delta f_{k-1})(p)\overset{b)}{=}-\frac{1}{k}\left(-f_{k-1}(1)\right)=\frac{1}{k}f_{k-1}(1)\overset{ok?}{=}\frac{1}{k\,k!}$

Pour tout k dans $\mathbb{N}^*$ la série de terme général $f_k(p)$ converge et $\sum_{p=1}^{+\infty}f_k(p)=\frac{1}{k\,k!}$.

Soit $k\in\mathbb{N}^*$. Soit $n\in\mathbb{N}$. Soit $r\in[\![n+1,+\infty[\![$.

$\sum_{p=n+1}^{r}f_k(p)=-\frac{1}{k}\sum_{p=n+1}^{r}(\Delta f_{k-1})(p)$;

$\lim_{r\mapsto+\infty}\left(\sum_{p=n+1}^{r}f_k(p)\right)=-\frac{1}{k}\lim_{r\mapsto+\infty}\sum_{p=n+1}^{r}(\Delta f_{k-1})(p)\overset{b)}{=}-\frac{1}{k}\left(-f_{k-1}(n+1)\right)=\frac{1}{k}f_{k-1}(n+1)$.

Observons que $\frac{1}{k}f_{k-1}(n+1)=\frac{1}{k}\,\frac{1}{(n+1)(n+2)\cdots(n+1+k-1)}=\frac{1}{k}\,\frac{1}{(n+1)(n+2)\cdots(n+k)}$.

Alors $\sum_{p=n+1}^{+\infty}f_k(p)=\frac{1}{k(n+1)(n+2)\cdots(n+k)}$ et ceci pour tout $k\in\mathbb{N}^*$.

Q2 Accélération de la convergence de (S_n).

a) $p \in \mathbb{N}^*$. Montrons, par récurrence, que $\forall q \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{p^2} - \sum_{\ell=1}^{q} (\ell-1)!\, f_\ell(p) = \frac{q!}{p} f_q(p)$.

. $\frac{1}{p^2} - \sum_{\ell=1}^{1} (\ell-1)!\, f_\ell(p) = \frac{1}{p^2} - f_1(p) = \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p(p+1)} = \frac{p+1-p}{p^2(p+1)} = \frac{1}{p(p(p+1))} = \frac{1}{p} f_1(p) = \frac{1!}{p} f_1(p)$.

l'égalité vaut alors pour $q=1$.

. Supposons la propriété vraie pour $q \in \mathbb{N}^*$ et montrons la pour $q+1$.

$$\frac{1}{p^2} - \sum_{\ell=1}^{q+1} (\ell-1)!\, f_\ell(p) = \frac{1}{p^2} - \sum_{\ell=1}^{q} (\ell-1)!\, f_\ell(p) - q!\, f_{q+1}(p) \underset{H.R.}{=} q!\,\frac{1}{p}\, f_q(p) - q!\, f_{q+1}(p).$$

$$\frac{1}{p^2} - \sum_{\ell=1}^{q+1} (\ell-1)!\, f_\ell(p) = \frac{q!}{p}\left[\frac{1}{p(p+1)\cdots(p+q)} - \frac{p}{p(p+1)\cdots(p+q+1)}\right]$$

$$\frac{1}{p^2} - \sum_{\ell=1}^{q+1} (\ell-1)!\, f_\ell(p) = \frac{q!}{p}\,\frac{1}{p(p+1)\cdots(p+q+1)}\left[p+q+1-p\right] = \frac{q!\,(q+1)}{p}\, f_{q+1}(p) = \frac{(q+1)!}{p}\, f_{q+1}(p).$$

ceci achève la récurrence.

$$\forall p \in \mathbb{N}^*,\ \forall q \in \mathbb{N}^*,\quad \frac{1}{p^2} - \sum_{\ell=1}^{q} (\ell-1)!\, f_\ell(p) = \frac{q!}{p} f_q(p).$$

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $q \in \mathbb{N}^*$.

$\forall p \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq \frac{q!}{p} f_q(p)$; $\forall p \in [\![n+1, +\infty [\![$, $0 \leq \frac{q!}{p} f_q(p) \leq \frac{q!}{n+1} f_q(p)$.

Alors $\forall p \in [\![n+1, +\infty [\![$, $0 \leq \frac{1}{p^2} - \sum_{\ell=1}^{q} (\ell-1)!\, f_\ell(p) \leq \frac{q!}{n+1} f_q(p)$.

Soit $r \in [\![n+1, +\infty [\![$.

$$0 \leq \sum_{p=n+1}^{r} \frac{1}{p^2} - \sum_{p=n+1}^{r} \sum_{\ell=1}^{q} (\ell-1)!\, f_\ell(p) \leq \frac{q!}{n+1} \sum_{p=n+1}^{r} f_q(p)$$

$$0 \leq \sum_{p=n+1}^{r} \frac{1}{p^2} - \sum_{\ell=1}^{q} (\ell-1)! \sum_{p=n+1}^{r} f_\ell(p) \leq \frac{q!}{n+1} \sum_{p=n+1}^{r} f_q(p).$$

Les séries de termes généraux $\frac{1}{p^2}$ et $f_\ell(p)$ (pour tout $\ell \in \mathbb{N}^*$) étant convergentes, en faisant tendre r vers $+\infty$ on obtient :

$$0 \leq \sum_{p=n+1}^{+\infty} \frac{1}{p^2} - \sum_{\ell=1}^{q} (\ell-1)! \sum_{p=n+1}^{+\infty} f_\ell(p) \leq \frac{q!}{n+1} \sum_{p=n+1}^{+\infty} f_q(p).$$ En utilisant

Q2 a) il vient alors :

$$0 \leq \sum_{p=n+1}^{+\infty} \frac{1}{p^2} - \sum_{\ell=1}^{q} \frac{(\ell-1)!}{\ell(n+1)\cdots(n+\ell)} \leq \frac{q!}{n+1} \times \frac{1}{q(n+1)\cdots(n+q)}.$$

Ainsi : $\forall p \in \mathbb{N}^*, \forall q \in \mathbb{N}^*, \ 0 \leq \sum_{p=n+1}^{+\infty} \frac{1}{p^2} - \sum_{\ell=1}^{q} \frac{(\ell-1)!}{\ell(n+1)\cdots(n+\ell)} \leq \frac{(q-1)!}{(n+1)^2(n+2)\cdots(n+q)}.$

c) Soit $q \in \mathbb{N}^*$. Posons $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $S'_n = S_n + \sum_{\ell=1}^{q} \frac{(\ell-1)!}{\ell(n+1)\cdots(n+\ell)}$.

Rappelons que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{p=n+1}^{+\infty} \frac{1}{p^2} = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^2} - \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p^2} = \frac{\pi^2}{6} - S_n$.

Alors $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq \frac{\pi^2}{6} - S_n - \sum_{\ell=1}^{q} \frac{(\ell-1)!}{\ell(n+1)\cdots(n+\ell)} \leq \frac{(q-1)!}{(n+1)^2(n+2)\cdots(n+q)}.$

Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq \frac{\pi^2}{6} - S'_n \leq \frac{(q-1)!}{(n+1)^2(n+2)\cdots(n+q)}.$

De plus $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $S'_n = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p^2} + \sum_{\ell=1}^{q} \frac{(\ell-1)!}{\ell(n+1)\cdots(n+\ell)}$; donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, S'_n est un rationnel comme somme de rationnels.

En posant $\forall n \in \mathbb{N}^*, S'_n = S_n + \sum_{\ell=1}^{q} \frac{(\ell-1)!}{\ell(n+1)\cdots(n+\ell)}$ on a :

1) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $S'_n \in \mathbb{Q}$

2) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq \frac{\pi^2}{6} - S'_n \leq \frac{(q-1)!}{(n+1)^2(n+2)\cdots(n+q)}$

Si $q = 2$: $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $S'_n = S_n + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2(n+1)(n+2)}$.

Si $q = 2$: $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq \frac{\pi^2}{6} - S'_n \leq \frac{1}{(n+1)^2(n+2)}$.

d) La version demandée ne pose aucun problème. Il est plus intéressant de traiter le cas général (q quelconque).
C'est très simple. Car $\forall \ell \in \mathbb{N}^*$, $\alpha_\ell = \dfrac{(\ell-1)!}{\ell(n+1)\cdots(n+\ell)}$

Alors $\displaystyle\sum_{\ell=1}^{q} \frac{(\ell-1)!}{\ell(n+1)\cdots(n+\ell)} = \sum_{\ell=1}^{q} \alpha_\ell$.

On remarque alors que $\alpha_1 = \dfrac{1}{n+1}$ et que $\forall \ell \in [2,+\infty[$, $\alpha_\ell = \dfrac{(\ell-1)^2}{\ell(n+\ell)}\alpha_{\ell-1}$.

Tout est alors clair !

ce qui est demandé →

```
Program essec01;

var n,p:integer;s:real;

begin
write('Donnez n. n=');readln(n);
s:=0;
for p:=1 to n do s:=s+1/sqr(p);

s:=s+1/(n+1)+1/(2*(n+1)*(n+2));

writeln('S''(',n,') vaut sensiblement : ',s)

end.
```

ce que l'on pouvait demander ↓

```
Program essec01;

var n,p,q:integer;s,u:real;

begin
write('Donnez n. n=');readln(n);
write('Donnez q. q=');readln(q);
s:=0;
for p:=1 to n do s:=s+1/sqr(p);

u:=1/(n+1);s:=s+u;
for p:=2 to q do
    begin
    u:=sqr(p-1)*u/p/(n+p);s:=s+u;
    end;


writeln('S''(',n,') vaut sensiblement : ',s);

end.
```

Ce que l'on devait demander →

Ici on fixe n et on obtient en jouant sur q une valeur approchée de $\frac{\pi^2}{6}$ à la précision voulue

```
Program essec01;

const epsilon=1e-6;

var n,p,k:integer;s,u:real;

begin
write('Donnez n. n=');readln(n);

s:=0;
for p:=1 to n do s:=s+1/sqr(p);

u:=1/(n+1);s:=s+u;k:=1;
while k*u/(n+1)>epsilon do
      begin
      k:=k+1;
      u:=sqr(k-1)*u/k/(n+k);s:=s+u;
      end;

writeln('S''(',n,') vaut sensiblement : ',s);
writeln('La valeur de q est : ',k);

end.
```

PARTIE III

Q1 Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite de réels.

$u_0=1$ et $\forall n\in [\![2,+\infty[\![$, $\sum_{p=1}^{n} \frac{u_{n-p}}{p!}=0$

$\Updownarrow$

$u_0=1$ et $\forall n\in [\![2,+\infty[\![$, $\sum_{\ell=0}^{n-1} \frac{u_\ell}{(n-\ell)!}=0$

$\Updownarrow$

$u_0=1$ et $\forall n\in [\![2,+\infty[\![$, $u_{n-1}=-\sum_{\ell=0}^{n-2} \frac{u_\ell}{(n-\ell)!}$.

$\Updownarrow$

$u_0=1$ et $\forall n\in \mathbb{N}$, $u_{n+1}=-\sum_{\ell=0}^{n} \frac{u_\ell}{(n+2-\ell)!}$ (1)

Le principe de récurrence "faible" montre qu'il existe une suite $(u_n)_{n\geq0}$ de réels et une seule qui vérifie (1). Ainsi :

il existe une suite de réels $(u_n)_{n\geq0}$ et une seule telle que : $\begin{cases} u_0=1 \\ \text{et} \\ \forall n\in [\![2,+\infty[\![, \sum_{p=1}^{n} \frac{u_{n-p}}{p!}=0 \end{cases}$

Montrons, précisément à l'aide d'une récurrence faible, que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n\in\mathbb{Q}$.

- C'est clair pour $n=0$ car $u_0=1$.
- Supposons la propriété vraie jusqu'à n et montrons-la pour $n+1$.

  $\forall \ell\in[\![0,n]\!]$, $u_\ell\in\mathbb{Q}$ donc $\forall \ell\in[\![0,n]\!]$, $\frac{u_\ell}{(n+2-\ell)!}\in\mathbb{Q}$, ainsi $u_{n+1}=-\sum_{\ell=0}^{n}\frac{u_\ell}{(n+2-\ell)!}\in\mathbb{Q}$

  Ainsi s'achève la récurrence.

$\forall n\in\mathbb{N}$, $u_n\in\mathbb{Q}$.

(1) s'écrit encore $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $u_n=-\sum_{\ell=0}^{n-1}\frac{u_\ell}{(n+1-\ell)!}$. Alors :

$u_1=-\frac{u_0}{(2-0)!}=-\frac{1}{2}$; $u_2=-\frac{u_0}{3!}-\frac{u_1}{2!}=-\frac{1}{6}+\frac{1}{4}=\frac{1}{12}$; $u_3=-\frac{u_0}{4!}-\frac{u_1}{3!}-\frac{u_2}{2!}$ ou

$u_3=-\frac{1}{24}+\frac{1}{12}-\frac{1}{24}=0$; $u_4=-\frac{u_0}{5!}-\frac{u_1}{4!}-\frac{u_2}{3!}+\frac{u_3}{2!}=-\frac{1}{120}+\frac{1}{48}-\frac{1}{72}=-\frac{1}{720}$.

$u_0=1$, $u_1=-\frac{1}{2}$, $u_2=\frac{1}{12}$, $u_3=0$ et $u_4=-\frac{1}{720}$.

R1 Dans la suite j'utiliserai l'écriture de polynôme plutôt que de fonction polynôme
R2 La relation qui définit U_n pour $n \geq 1$ vaut pour $n=0$ non ?

(Q2) Etude des polynômes de Bernoulli.

a) • $U_1 = u_1 + u_0 X = X - \frac{1}{2}$. $\quad U_1 = X - \frac{1}{2}$.

$U_2 = u_2 + \frac{u_1}{1!} X + \frac{u_0}{2!} X^2 = \frac{1}{2}X^2 - \frac{1}{2}X + \frac{1}{12}$. $\quad U_2 = \frac{1}{2}X^2 - \frac{1}{2}X + \frac{1}{12}$.

$U_3 = u_3 + \frac{u_2}{1!} X + \frac{u_1}{2!} X^2 + \frac{u_0}{3!} X^3 = \frac{1}{6}X^3 - \frac{1}{4}X^2 + \frac{1}{12}X$; $U_3 = \frac{1}{6}X^3 - \frac{1}{4}X^2 + \frac{1}{12}X$.

$U_4 = u_4 + \frac{u_3}{1!} X + \frac{u_2}{2!} X^2 + \frac{u_1}{3!} X^3 + \frac{u_0}{4!} X^4 = \frac{1}{24}X^4 - \frac{1}{12}X^3 + \frac{1}{24}X^2 - \frac{1}{720}$; $U_4 = \frac{1}{24}X^4 - \frac{1}{12}X^3 + \frac{1}{24}X^2 - \frac{1}{720}$.

• Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $U_n = \sum_{p=0}^{n} \frac{u_{n-p}}{p!} X^p$ donc $U_n' = \sum_{p=1}^{n} \frac{u_{n-p}}{p!} p X^{p-1} = \sum_{p=1}^{n} \frac{u_{n-p}}{(p-1)!} X^{p-1} \underset{\ell = p-1}{=} \underbrace{\sum_{\ell=0}^{n-1} \frac{u_{n-1-\ell}}{\ell!} X^{\ell}}_{= U_{n-1}}$.

Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $U_n' = U_{n-1}$.

Soit $n \in [\![2, +\infty[\![$. $U_n(1) = \sum_{p=0}^{n} \frac{u_{n-p}}{p!} = \sum_{p=1}^{n} \frac{u_{n-p}}{p!} + u_n \overset{Q1!}{=} u_n = U_n(0)$.

Alors $\forall n \in [\![2, +\infty[\![$, $U_n(0) = U_n(1)$.

b) • Fixons n dans $\mathbb{N}$ et montrons par récurrence que : $\forall p \in [\![0, n]\!]$, $U_n^{(p)} = U_{n-p}$
→ C'est clair pour $p = 0$.
→ Supposons la propriété vraie pour p élément de $[\![0, n-1]\!]$ et montrons la pour $p+1$.
$U_n^{(p+1)} = (U_n^{(p)})' \underset{HR}{=} (U_{n-p})' \underset{(n-p \geq 1)}{=} U_{n-p-1} = U_{n-(p+1)}$. Ceci achève la récurrence.

Alors $\forall n \in \mathbb{N}, \forall p \in [\![0, n]\!]$, $U_n^{(p)} = U_{n-p}$; en particulier $\forall n \in \mathbb{N}, \forall p \in [\![0, n]\!]$, $U_n^{(p)}(0) = U_{n-p}(0)$.

Montrons par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, U_n est un polynôme à coefficients réels de degré n.
→ C'est clair pour $n = 0$.
→ Supposons la propriété vraie pour $n-1$ ($n \in \mathbb{N}^*$) et montrons la pour n.
$U_n' = U_{n-1}$; U_n est donc une primitive d'un polynôme à coefficients réels de degré $n-1$; ainsi U_n est un polynôme à coefficients réels de degré n ; ainsi s'achève la récurrence.

Pour tout $n\in\mathbb{N}$, V_n est un polynôme à coefficients réels de degré n.

En particulier $\forall n\in\mathbb{N}$, $V_n\in\mathbb{R}_n[X]$.
La formule de Taylor (pour les polynômes ... ou pas !) donne alors :

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad V_n=\sum_{p=0}^{n}\frac{V_n^{(p)}(0)}{p!}X^p=\sum_{p=0}^{n}\frac{V_{n-p}(0)}{p!}X^p.$$

- Soit $n\in[\![2,+\infty[\![$. $V_n(0)=\dfrac{V_0(0)}{0!}=1$ et $V_n(1)=\displaystyle\sum_{p=0}^{n}\frac{V_{n-p}(0)}{p!}$ d'après ce qui précède.
Comme $V_n(0)=V_n(1)$: $1=\displaystyle\sum_{p=0}^{n}\frac{V_{n-p}(0)}{p!}=1+\sum_{p=1}^{n}\frac{V_{n-p}(0)}{p!}$; $\displaystyle\sum_{p=1}^{n}\frac{V_{n-p}(0)}{p!}=0$.
$\forall n\in[\![2,+\infty[\![$, $\displaystyle\sum_{p=1}^{n}\frac{V_{n-p}(0)}{p!}=0$.

- $V_0(0)=1$ et $\forall n\in[\![2,+\infty[\![$, $\displaystyle\sum_{p=1}^{n}\frac{V_{n-p}(0)}{p!}=0$; de l'unicité de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$, établie au Q1, il résulte que : $\forall n\in\mathbb{N}$, $V_n(0)=u_n$.
Alors $\forall n\in\mathbb{N}^{(*)}$, $V_n=\displaystyle\sum_{p=0}^{n}\frac{V_{n-p}(0)}{p!}X^p=\sum_{p=0}^{n}\frac{u_{n-p}}{p!}X^p=U_n$ (et $V_0=1=U_0$).

Ainsi $\forall n\in\mathbb{N}$, $V_n=U_n$.

c) Pour montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}$, $U_n=(-1)^nU_n(1-X)$ il suffit de prouver que la suite de polynômes $((-1)^nU_n(1-X))_{n\geq 0}$ a les mêmes qualités que la suite $(V_n)_{n\geq 0}$. Posons $\forall n\in\mathbb{N}$, $W_n=(-1)^nU_n(1-X)$ et montrons que :
→ $W_0=1$ → $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $W_n'=W_{n-1}$ → $\forall n\in[\![2,+\infty[\![$, $W_n(0)=W_n(1)$.

† $W_0=(-1)^0U_0(1-X)=1$ car $U_0=1$.
† $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $W_n'=(-1)^n\underline{(-1)}U_n'(1-X)\overset{U_n'=U_{n-1}}{=}(-1)^2(-1)^{n-1}U_{n-1}(1-X)=W_{n-1}$.
† $\forall n\in[\![2,+\infty[\![$, $W_n(0)=(-1)^nU_n(1)=(-1)^nU_n(0)=(-1)^nU_n(1-1)=W_n(1)$.

Ainsi $\forall n\in\mathbb{N}$, $W_n=U_n$.

Alors $\forall n \in \mathbb{N},\ U_n = (-1)^n U_n(1-X)$.

Soit $p \in \mathbb{N}^*$. $2p+1 \geqslant 3$. $U_{2p+1}(0) = U_{2p+1}(1) = (-1)^{2p+1} U_{2p+1}(0) = -U_{2p+1}(0)$.

Alors $2U_{2p+1}(0) = 0$, $U_{2p+1}(0) = 0$.

Comme $U_{2p+1} = \sum_{k=0}^{2p+1} \frac{u_{2p+1-k}}{k!} X^k$: $U_{2p+1}(0) = \frac{u_{2p+1}}{0!}$; alors $u_{2p+1} = 0$.

$\forall p \in \mathbb{N}^*,\ u_{2p+1} = 0.$ (cela confirme le $u_3 = 0$).

Q3 Accélération de la convergence de (S_n).

a) Soyons lucide pour s'éviter du travail. Fixons p dans $\mathbb{N}$ et posons :

$\forall n \in \mathbb{N},\ K_n = (n+1)! \int_0^1 \frac{U_n(x)}{(x+p)^{n+2}}\, dx.$

Soit $n \in \mathbb{N}$. $K_n \underset{U'_{n+1} = U_n}{=} (n+1)! \int_0^1 \frac{U'_{n+1}(x)}{(x+p)^{n+2}}\, dx \underset{IPP}{=} (n+1)! \left(\left[U_{n+1}(x) \frac{1}{(x+p)^{n+2}} \right]_0^1 - \int_0^1 U_{n+1}(x) \left(-\frac{n+2}{(x+p)^{n+3}} \right) dx \right)$

$K_n = (n+1)! \left[\frac{U_{n+1}(1)}{(p+1)^{n+2}} - \frac{U_{n+1}(0)}{p^{n+2}} \right] + (n+2)! \int_0^1 \frac{U_{n+1}(x)}{(x+p)^{n+3}}\, dx$

Ainsi $\forall n \in \mathbb{N},\ K_n = (n+1)! \left[\frac{U_{n+1}(1)}{(p+1)^{n+2}} - \frac{U_{n+1}(0)}{p^{n+2}} \right] + K_{n+1}$.

En particulier $K_0 = \left[\frac{U_1(1)}{(p+1)^2} - \frac{U_1(0)}{p^2} \right] + K_1 \underset{U_1 = X - \frac{1}{2}}{=} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{(p+1)^2} + \frac{1}{p^2} \right) + K_1$.

Alors $K_1 = K_0 - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{(p+1)^2} + \frac{1}{p^2} \right) = \int_0^1 \frac{U_0(x)}{(x+p)^2}\, dx - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{(p+1)^2} + \frac{1}{p^2} \right) \underset{U_0 = 1}{=} \int_0^1 \frac{dx}{(x+p)^2} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{(p+1)^2} + \frac{1}{p^2} \right)$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $U_{n+1}(1) \underset{n+1 \geqslant 2}{=} U_{n+1}(0)$ donc $K_n = (n+1)!\, U_{n+1}(0) \left[\frac{1}{(p+1)^{n+2}} - \frac{1}{p^{n+2}} \right] + K_{n+1}$

Ainsi $K_n = (n+1)!\, U_{n+1}(0) \left[\frac{1}{(p+1)^{n+2}} - \frac{1}{p^{n+2}} \right] + (n+2)!\, U_{n+2}(0) \left[\frac{1}{(p+1)^{n+3}} - \frac{1}{p^{n+3}} \right] + K_{n+2}$ et

ceci pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Fixons k dans $\mathbb{N}^*$ et appliquons la formule précédente pour $n = 2k-1$.

Il vient : $K_{2k-1} = (2k)!\, U_{2k}(0)\left[\frac{1}{(p+1)^{2k+1}} - \frac{1}{p^{2k+1}}\right] + (2k+1)!\, U_{2k+1}(0)\left[\frac{1}{(p+1)^{2k+2}} - \frac{1}{p^{2k+2}}\right] + K_{2k+1}$

Notons que $U_{2k}(0) = u_{2k}$ et $U_{2k+1}(0) = 0$ ($k \in \mathbb{N}^*$).

Alors $K_{2k-1} - K_{2k+1} = (2k)!\, u_{2k}\left[\frac{1}{(p+1)^{2k+1}} - \frac{1}{p^{2k+1}}\right]$ ... et ceci pour tout k dans $\mathbb{N}^*$.

Fixons q dans $\mathbb{N}^*$ et sommons ce qui précède de 1 à q.

Il vient sans difficulté $K_1 - K_{2q+1} = \sum_{k=1}^{q} (2k)!\, u_{2k}\left[\frac{1}{(p+1)^{2k+1}} - \frac{1}{p^{2k+1}}\right]$.

Ainsi $K_1 + \sum_{k=1}^{q} (2k)!\, u_{2k}\left[\frac{1}{p^{2k+1}} - \frac{1}{(p+1)^{2k+1}}\right] = K_{2q+1} = (2q+2)!\int_0^1 \frac{U_{2q+1}(x)}{(x+p)^{2q+3}}\,dx$

En rappelant que $K_1 = \int_0^1 \frac{dx}{(x+p)^2} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{(p+1)^2} + \frac{1}{p^2}\right)$ on obtient :

$$\int_0^1 \frac{dx}{(x+p)^2} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p^2} + \frac{1}{(p+1)^2}\right) + \sum_{k=1}^{q} (2k)!\, u_{2k}\left(\frac{1}{p^{2k+1}} - \frac{1}{(p+1)^{2k+1}}\right) = (2q+2)!\int_0^1 \frac{U_{2q+1}(x)}{(x+p)^{2q+3}}\,dx$$

et ceci pour tout $q \in \mathbb{N}^*$

<u>Remarque</u> .. Notons que nous n'avons fait qu'une intégration par parties et 0 récurrence !

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Posons pour tout $p \in \mathbb{N}$, $A_p = \int_0^1 \frac{dx}{(x+p)^2} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p^2} + \frac{1}{(p+1)^2}\right) + \sum_{k=1}^{q} (2k)!\, u_{2k}\left(\frac{1}{p^{2k+1}} - \frac{1}{(p+1)^{2k+1}}\right)$

Soit $r \in [\![n, +\infty[\![$

$$\left|\sum_{p=n}^{r} A_p\right| \leq \sum_{p=n}^{r} |A_p| \overset{a)}{=} \sum_{p=n}^{r} \left|(2q+2)!\int_0^1 \frac{U_{2q+1}(x)}{(x+p)^{2q+3}}\,dx\right| \leq (2q+2)!\sum_{p=n}^{r}\int_0^1 \frac{|U_{2q+1}(x)|}{(x+p)^{2q+3}}\,dx.$$

Or : $\int_0^1 \frac{|U_{2q+1}(x)|}{(x+p)^{2q+3}}\,dx \leq M_{2q+1}\int_0^1 \frac{dx}{(x+p)^{2q+3}} = M_{2q+1}\left[\frac{(x+p)^{-2q-2}}{-2q-2}\right]_0^1 = \frac{M_{2q+1}}{2q+2}\left(\frac{1}{p^{2q+2}} - \frac{1}{(p+1)^{2q+2}}\right)$

Ainsi $(2q+2)!\sum_{p=n}^{r}\int_0^1 \frac{|U_{2q+1}(x)|}{(x+p)^{2q+3}}\,dx \leq \frac{M_{2q+1}}{2q+2}(2q+2)!\sum_{p=n}^{r}\left(\frac{1}{p^{2q+2}} - \frac{1}{(p+1)^{2q+2}}\right)$.

Alors $\left|\sum_{p=n}^{r} A_p\right| \leq M_{2q+1}(2q+1)! \sum_{p=n}^{r}\left(\frac{1}{p^{2q+2}}-\frac{1}{(p+1)^{2q+2}}\right) = M_{2q+1}(2q+1)!\left(\frac{1}{n^{2q+2}}-\frac{1}{(r+1)^{2q+2}}\right)$

Alors $\left|\sum_{p=n}^{r} A_p\right| \leq \frac{(2q+1)!\,M_{2q+1}}{n^{2q+2}}$, non ? Ne reste plus qu'à faire tendre r vers $+\infty$.

$$\sum_{p=n}^{r} A_p = \underbrace{\sum_{p=n}^{r}\int_0^1 \frac{du}{(x+p)^2}}_{x_r} - \underbrace{\frac{1}{2}\sum_{p=n}^{r}\left(\frac{1}{p^2}+\frac{1}{(p+1)^2}\right)}_{y_r} + \underbrace{\sum_{p=n}^{r}\sum_{l=1}^{q}(2l)!\,u_{2l}\left(\frac{1}{p^{2l+1}}-\frac{1}{(p+1)^{2l+1}}\right)}_{z_r}.$$

$x_r = \sum_{p=n}^{r}\left[-\frac{1}{x+p}\right]_0^1 = \sum_{p=n}^{r}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{p+1}\right) = \frac{1}{n}-\frac{1}{r+1}$; $\lim_{r\to+\infty} x_r = \frac{1}{n}$.

$y_r = \frac{1}{2}\sum_{p=n}^{r}\left(\frac{1}{p^2}+\frac{1}{(p+1)^2}\right) = \frac{1}{2}\frac{1}{n^2}+\frac{1}{2}\sum_{p=n+1}^{r}\frac{1}{p^2}+\frac{1}{2}\sum_{p=n+1}^{r+1}\frac{1}{p^2} = \frac{1}{2n^2}+\sum_{p=n+1}^{r}\frac{1}{p^2}+\frac{1}{2}\frac{1}{(r+1)^2}$.

Alors $\lim_{r\to+\infty} y_r = \frac{1}{2n^2}+\sum_{p=n+1}^{+\infty}\frac{1}{p^2}$.

$z_r \underset{\text{or ?}}{=} \sum_{l=1}^{q}(2l)!\,u_{2l}\left(\sum_{p=n}^{r}\left(\frac{1}{p^{2l+1}}-\frac{1}{(p+1)^{2l+1}}\right)\right) = \sum_{l=1}^{q}(2l)!\,u_{2l}\left(\frac{1}{n^{2l+1}}-\frac{1}{(r+1)^{2l+1}}\right)$

Alors $\lim_{r\to+\infty} z_r = \sum_{l=1}^{q}(2l)!\,u_{2l}\,\frac{1}{n^{2l+1}}$.

On a donc $\forall r\in[\![n,+\infty[\![$, $\left|\sum_{p=n}^{r} A_p\right| \leq \frac{(2q+1)!\,M_{2q+1}}{n^{2q+2}}$ et

$\lim_{r\to+\infty}\sum_{p=n}^{r} A_p = \frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}-\sum_{p=n+1}^{+\infty}\frac{1}{p^2}+\sum_{l=1}^{q}\frac{(2l)!\,u_{2l}}{n^{2l+1}}$.

Nous pouvons alors écrire $\left|\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}-\sum_{p=n+1}^{+\infty}\frac{1}{p^2}+\sum_{l=1}^{q}\frac{(2l)!\,u_{2l}}{n^{2l+1}}\right| \leq \frac{(2q+1)!\,M_{2q+1}}{n^{2q+2}}$.

Comme $\forall x\in\mathbb{R}$, $|x|=|-x|$ il vient :

$\left|\sum_{p=n+1}^{+\infty}\frac{1}{p^2}-\frac{1}{n}+\frac{1}{2n^2}-\sum_{l=1}^{q}\frac{(2l)!\,u_{2l}}{n^{2l+1}}\right| \leq \frac{(2q+1)!\,M_{2q+1}}{n^{2q+2}}$ pour tout q dans $\mathbb{N}^*$.

c) Soit $q \in \mathbb{N}^*$. Pour $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $S''_n = S_n + \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \sum_{\ell=1}^{q} \frac{(2\ell)!\, u_{2\ell}}{n^{2\ell+1}}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S''_n \in \mathbb{Q}$ car $(u_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $\mathbb{Q}$.

De plus $\left|\frac{\pi^2}{6} - S''_n\right| = \left|\sum_{p=n+1}^{+\infty} \frac{1}{p^2} - \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} - \sum_{\ell=1}^{q} \frac{(2\ell)!\, u_{2\ell}}{n^{2\ell+1}}\right| \leq \frac{(2q+1)!\, M_{2q+1}}{n^{2q+2}}$.

$\frac{\pi^2}{6} = S_n + \sum_{p=n+1}^{+\infty} \frac{1}{p^2}$

En posant $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $S''_n = S_n + \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \sum_{\ell=1}^{q} \frac{(2\ell)!\, u_{2\ell}}{n^{2\ell+1}}$ on a :

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $S''_n \in \mathbb{Q}$ et $\left|\frac{\pi^2}{6} - S''_n\right| \leq \frac{(2q+1)!\, M_{2q+1}}{n^{2q+2}}$.

Supposons que $q = 2$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{\ell=1}^{q} \frac{(2\ell)!\, u_{2\ell}}{n^{2\ell+1}} = \frac{2u_2}{n^3} + \frac{24u_4}{n^5} = \frac{1}{6n^3} - \frac{1}{30n^5}$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $S''_n = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p^2} + \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{6n^3} - \frac{1}{30n^5}$.

Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\left|\frac{\pi^2}{6} - \left(\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p^2} + \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{6n^3} - \frac{1}{30n^5}\right)\right| \leq \frac{120\, M_5}{n^6}$.

d)

```
Program essec01;

var n,p:integer;s:real;

begin
write('Donnez n. n=');readln(n);
s:=0;
for p:=1 to n do s:=s+1/sqr(p);
s:=s+1/n-1/2/n/n+1/6/n/n/n-1/30/n/n/n/n/n;

writeln('S''''(',n,') vaut sensiblement : ',s);

end.
```

Un petit comparatif ..

```
Donnez n. n=2
         S                      S'                      S''
   1.2500000000E+00      1.6250000000E+00      1.6447916667E+00
  -3.9493406684E-01     -1.9934066846E-02     -1.4240017845E-04

Donnez n. n=5
         S                      S'                      S''
   1.4636111111E+00      1.6421825397E+00      1.6449337778E+00
  -1.8132295574E-01     -2.7515271649E-03     -2.8907015803E-07

Donnez n. n=10
         S                      S'                      S''
   1.5497677312E+00      1.6444647009E+00      1.6449340645E+00
  -9.5166335684E-02     -4.6936599028E-04     -2.3519532988E-09

Donnez n. n=50
         S                      S'                      S''
   1.6251327336E+00      1.6449291137E+00      1.6449340668E+00
  -1.9801333263E-02     -4.9531736295E-06     -3.6379788071E-11

Donnez n. n=100
         S                      S'                      S''
   1.6349839001E+00      1.6449334245E+00      1.6449340668E+00
  -9.9501667428E-03     -6.4237974584E-07     -8.0035533756E-11
```

← $S'' \simeq \frac{\pi^2}{6}$!

Remarque - $0 \le \frac{\pi^2}{6} - S'_n \le \frac{(q-1)!}{(n+1)^2(n+2)\cdots(n+q)}$ et $\frac{(q-1)!}{(n+1)^2(n+2)\cdots(n+q)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{(q-1)!}{n^{q+1}}$.

$$\left|\frac{\pi^2}{6} - S''_n\right| \le \frac{(2q+1)!\,\pi_{2q+1}}{n^{2q+2}} .$$

Y a pas photo, non ?

De petits exercices.

1.. Calculer π_5.

2.. Donner un majorant de $\left|\frac{\pi^2}{6} - S_n\right|$

3.. Écrire un programme qui calcule S''_n pour n et q donnés.