# HEC Mathématiques II 2013

## PARTIE I Polynômes factoriels ascendants et lois binomiales négatives

(Q1) a] $X^{\langle 2\rangle} - X^{\langle 1\rangle} = (X+1-1)(X+2-1) - (X+1-1) = X(X+1) - X = X^2 + X - X = X^2$.

$X^{\langle 3\rangle} - 3X^{\langle 2\rangle} + X^{\langle 1\rangle} = (X+1-1)(X+2-1)(X+3-1) - 3(X+1-1)(X+2-1) + (X+1-1)$.

$X^{\langle 3\rangle} - 3X^{\langle 2\rangle} + X^{\langle 1\rangle} = X(X+1)(X+2) - 3X(X+1) + X = X[(X+1)(X+2) - 3(X+1) + 1]$

$X^{\langle 3\rangle} - 3X^{\langle 2\rangle} + X^{\langle 1\rangle} = X[X^2 + 2X + X + 2 - 3X - 3 + 1] = X X^2 = X^3$.

$\underline{\underline{X^{\langle 2\rangle} - X^{\langle 1\rangle} = X^2 \text{ \& } X^{\langle 3\rangle} - 3X^{\langle 2\rangle} + X^{\langle 1\rangle} = X^3.}}$

b]

$\boxed{V1}$ $X^{\langle 4\rangle} = X(X+1)(X+2)(X+3)$. Le coefficient de $X^3$ dans $X^{\langle 4\rangle}$ est $1+2+3$ donc 6, non ?
Le coefficient de $X^3$ dans $X^{\langle 3\rangle}$ est 1 et c'est 0 dans $X^{\langle 2\rangle}$ et $X^{\langle 1\rangle}$.
Calculons alors $X^{\langle 4\rangle} - 6X^{\langle 3\rangle}$.

$X^{\langle 4\rangle} - 6X^{\langle 3\rangle} = X(X+1)(X+2)(X+3) - 6X(X+1)(X+2) = X(X+1)(X+2)(X+3-6)$.

$X^{\langle 4\rangle} - 6X^{\langle 3\rangle} = X(X^2+3X+2)(X-3) = (X^2+3X+2)(X^2-3X) = (X^2+3X)(X^2-3X) + 2(X^2-3X)$.

$X^{\langle 4\rangle} - 6X^{\langle 3\rangle} = X^4 - 9X^2 + 2X^2 - 6X = X^4 - 7X^2 - 6X = X^4 - 7X(X+1) + 7X - 6X = X^4 - 7X^{\langle 2\rangle} + X^{\langle 1\rangle}$.

donc $\underline{\underline{X^4 = X^{\langle 4\rangle} - 6X^{\langle 3\rangle} + 7X^{\langle 2\rangle} - X^{\langle 1\rangle}.}}$

$\boxed{V2}$ $X^{\langle 4\rangle} = X(X+1)(X+2)(X+3) = (X^2+X)(X^2+5X+6) = X^4 + 5X^3 + 6X^2 + X^3 + 5X^2 + 6X$.

$X^{\langle 4\rangle} = X^4 + 6X^3 + 11X^2 + 6X \overset{a]}{=} X^4 + 6(X^{\langle 3\rangle} - 3X^{\langle 2\rangle} + X^{\langle 1\rangle}) + 11(X^{\langle 2\rangle} - X^{\langle 1\rangle}) + 6X^{\langle 1\rangle}$.

$X^{\langle 4\rangle} = X^4 + 6X^{\langle 3\rangle} + (-18+11)X^{\langle 2\rangle} + (6-11+6)X^{\langle 1\rangle} = X^4 + 6X^{\langle 3\rangle} - 7X^{\langle 2\rangle} + X^{\langle 1\rangle}$.

donc $X^4 = X^{\langle 4\rangle} - 6X^{\langle 3\rangle} + 7X^{\langle 2\rangle} - X^{\langle 1\rangle}$.

Voir la définition de $X^{\langle k\rangle}$.

c] Soit $n \in \mathbb{N}$. $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $\deg X^{\langle k\rangle} = k$. Alors $(X^{\langle 0\rangle}, X^{\langle 1\rangle}, \dots, X^{\langle n\rangle})$ est une famille d'éléments non nuls de $\mathbb{R}_n[X]$ de degrés échelonnés.

$(X^{\langle 0\rangle}, X^{\langle 1\rangle}, \dots, X^{\langle n\rangle})$ est une famille libre d'éléments de $\mathbb{R}_n[X]$ dont le cardinal $n+1$ coïncide avec la dimension de $\mathbb{R}_n[X]$.

Ainsi $(X^{\langle 0\rangle}, X^{\langle 1\rangle}, \dots, X^{\langle n\rangle})$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Alors $X^n$ est combinaison linéaire de $X^{\langle 0\rangle}, X^{\langle 1\rangle}, \dots, X^{\langle n\rangle}$ et ceci pour tout $n$ dans $\mathbb{N}$.

Les polynômes $X^n$ ($n \in \mathbb{N}$) de la base canonique de $\mathbb{R}[X]$ (!!!) sont tous des combinaisons linéaires de polynômes factoriels ascendants.

⚠ La notion de base d'un espace vectoriel est clairement hors-programme et sans aucun intérêt ici.

Q2 $(r,s)$ est un couple de réels et $n \in \mathbb{N}$.

a) $r^{\langle n+1\rangle} = \prod_{k=1}^{n+1}(r+k-1)$

1er cas. $n \geq 1$. $r^{\langle n+1\rangle} = \left(\prod_{k=1}^{n}(r+k-1)\right)(r+n+1-1) = r^{\langle n\rangle}(r+n)$.

2e cas. $n=0$. $r^{\langle n+1\rangle} = r+1-1 = r = 1\times(r+0) = r^{\langle 0\rangle}(r+0) = r^{\langle n\rangle}(r+n)$.

Dans les deux cas $r^{\langle n+1\rangle} = r^{\langle n\rangle}(r+n) = (r+n)\, r^{\langle n\rangle}$.

Remarque. Notons que ceci donne $X^{\langle n+1\rangle} = (X+n)\, X^{\langle n\rangle}$.

b) Soit $k \in [\![0,n]\!]$.

$$r^{\langle k+1\rangle} s^{\langle n-k\rangle} + r^{\langle k\rangle} s^{\langle n-k+1\rangle} \overset{Q2\,a)}{=} (r+k)\, r^{\langle k\rangle} s^{\langle n-k\rangle} + r^{\langle k\rangle}(s+n-k)\, s^{\langle n-k\rangle}.$$

$$r^{\langle k+1\rangle} s^{\langle n-k\rangle} + r^{\langle k\rangle} s^{\langle n-k+1\rangle} = (r+k+s+n-k)\, r^{\langle k\rangle} s^{\langle n-k\rangle} = (r+s+n)\, r^{\langle k\rangle} s^{\langle n-k\rangle}.$$

Ainsi $\forall k \in [\![0,n]\!],\ (r+s+n)\, r^{\langle k\rangle} s^{\langle n-k\rangle} = r^{\langle k+1\rangle} s^{\langle n-k\rangle} + r^{\langle k\rangle} s^{\langle n-k+1\rangle}$.

c) • $(r+s)^{\langle 0\rangle} = 1$ et $\sum_{k=0}^{0}\binom{0}{k} r^{\langle k\rangle} s^{\langle 0-k\rangle} = \binom{0}{0} r^{\langle 0\rangle} s^{\langle 0-0\rangle} = 1\times 1\times 1 = 1$.

donc $(r+s)^{\langle 0\rangle} = \sum_{k=0}^{0}\binom{0}{k} r^{\langle k\rangle} s^{\langle 0-k\rangle}$.

La propriété est vraie pour $n=0$.

• Supposons la propriété vraie pour un élément $n$ de $\mathbb{N}$ et montrons la pour $n+1$.

$$(r+s)^{\langle n+1\rangle} \overset{Q2a}{=} (r+s+n)(r+s)^{\langle n\rangle} \overset{\text{hypothèse de récurrence}}{=} (r+s+n)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} r^{\langle k\rangle} s^{\langle n-k\rangle}.$$

$$(r+s)^{\langle n+1\rangle} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(r+s+n)\, r^{\langle k\rangle} s^{\langle n-k\rangle} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left[r^{\langle k+1\rangle}s^{\langle n-k\rangle} + r^{\langle k\rangle}s^{\langle n-k+1\rangle}\right]$$

$$(r+s)^{\langle n+1\rangle} = \underbrace{\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} r^{\langle k+1\rangle}s^{\langle n-k\rangle}}_{k\leftarrow k-1} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} r^{\langle k\rangle}s^{\langle n+1-k\rangle}.$$

$$(r+s)^{\langle n+1\rangle} = \sum_{k=1}^{n+1}\binom{n}{k-1} r^{\langle k\rangle}s^{\langle n-(k-1)\rangle} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} r^{\langle k\rangle}s^{\langle n+1-k\rangle}.$$

$$(r+s)^{\langle n+1\rangle} \overset{*}{=} \binom{n}{n+1-1} r^{\langle n+1\rangle}s^{\langle n-n\rangle} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k-1} r^{\langle k\rangle}s^{\langle n+1-k\rangle} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k} r^{\langle k\rangle}s^{\langle n+1-k\rangle} + \binom{n}{0} r^{\langle 0\rangle}s^{\langle n+1-0\rangle}.$$

$$(r+s)^{\langle n+1\rangle} \overset{*}{=} 1\times r^{\langle n+1\rangle}s^{\langle 0\rangle} + \sum_{k=1}^{n}\left[\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k}\right] r^{\langle k\rangle}s^{\langle n+1-k\rangle} + 1\times r^{\langle 0\rangle}s^{\langle n+1\rangle}.$$

$$(r+s)^{\langle n+1\rangle} \overset{*}{=} \binom{n+1}{n+1} r^{\langle n+1\rangle}s^{\langle n+1-(n+1)\rangle} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n+1}{k} r^{\langle k\rangle}s^{\langle n+1-k\rangle} + \binom{n+1}{0} r^{\langle 0\rangle}s^{\langle n+1-0\rangle}.$$

$$(r+s)^{\langle n+1\rangle} = \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k} r^{\langle k\rangle}s^{\langle n+1-k\rangle}$$ . Ceci achève la récurrence.

<u>Remarque</u>.. (*) est vraie à un petit abus près... En toute rigueur il aurait fallu distinguer deux cas : $n=0$ et $n\geq 1$.

$$\forall (r,s)\in\mathbb{R}^2,\ \forall n\in\mathbb{N},\quad (r+s)^{\langle n\rangle} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} r^{\langle k\rangle}s^{\langle n-k\rangle}.$$

(Q3) $r$ est un réel strictement positif. $x$ est un réel appartenant à $]0,1[$.

a) $$\forall n\in\mathbb{N},\ \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{r^{\langle n+2\rangle}x^{n+2}}{(n+1)!\,(1-x)^{r+1}}\times\frac{n!\,(1-x)^{r+1}}{r^{\langle n+1\rangle}x^{n+1}} = \frac{r^{\langle n+2\rangle}}{r^{\langle n+1\rangle}}\times\frac{x}{n+1} = \frac{(r+n+1)\,r^{\langle n+1\rangle}}{r^{\langle n+1\rangle}}\times\frac{x}{n+1}$$

$$\forall n\in\mathbb{N},\ \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{r+n+1}{n+1}\times x\ ;\quad \frac{u_{n+1}}{u_n}\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{n}{n}\times x = x$$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = x.$$

**b)** $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = x$.

Alors $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists P_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq P_\varepsilon \Rightarrow \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} - x \right| < \varepsilon$

$\frac{1-x}{2} \in \mathbb{R}_+^*$ car $x \in ]0,1[$ donc $\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} - x \right| < \frac{1-x}{2}$.

Alors $\forall n \in [\![ N, +\infty [\![$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} - x \leq \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} - x \right| < \frac{1-x}{2}$.

$x \in ]0,1[$ et $r > 0$

$\forall n \in [\![ N, +\infty [\![$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} < x + \frac{1-x}{2} = \frac{1+x}{2}$ et $u_n = \frac{r^{\langle n+1 \rangle} x^{n+1}}{n!\,(1-x)^{r+1}} > 0$.

Donc $\forall n \in [\![ N, +\infty [\![$, $u_{n+1} < \frac{1+x}{2} u_n$.

Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{N+n} \leq u_N \left(\frac{1+x}{2}\right)^n$.

- La propriété est vraie pour $n=0$ car $\left(\frac{1+x}{2}\right)^0 = 1$.
- Supposons la propriété vraie pour un élément $n$ de $\mathbb{N}$ et montrons la pour $n+1$.

$N+n \geq N$ donc $u_{N+n+1} \leq \frac{1+x}{2} u_{N+n}$ et $u_{N+n} \leq u_N \left(\frac{1+x}{2}\right)^n$ par hypothèse de récurrence.

Comme $\frac{1+x}{2} \geq 0$ : $u_{N+n+1} \leq \frac{1+x}{2} u_{N+n} \leq \frac{1+x}{2} u_N \left(\frac{1+x}{2}\right)^n = u_N \left(\frac{1+x}{2}\right)^{n+1}$

Ceci achève la récurrence. Finalement :

$$\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, u_{N+n} \leq u_N \left(\frac{1+x}{2}\right)^n.$$

**c)** $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{N+n} \leq u_N \left(\frac{1+x}{2}\right)^n$.

Donc $\forall n \in [\![ N, +\infty [\![$, $u_n \leq u_N \left(\frac{1+x}{2}\right)^{n-N}$. Mieux

$\forall n \in [\![ N, +\infty [\![$, $0 \leq u_n \leq u_N \left(\frac{1+x}{2}\right)^{n-N}$ et $\left|\frac{1+x}{2}\right| < 1$ car $x \in ]0,1[$.

Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \left( u_N \left(\frac{1+x}{2}\right)^{n-N} \right) = u_N \times 0 = 0$. Ainsi par encadrement il vient : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Soit $n \in \mathbb{N}$

d] $r$ Posons : $\forall z \in ]-\infty, 1[,\ f_r(z) = (1-z)^{-r}$.

montrons par récurrence que pour tout $k$ dans $\mathbb{N}$ $f_r$ est $k$ fois dérivable sur $]-\infty, 1[$ et que $\forall z \in ]-\infty, 1[,\ f_r^{(k)}(z) = r^{\langle k \rangle}(1-z)^{-r-k}$.

- La propriété est vraie pour $k=0$ car $r^{\langle 0 \rangle} = 1$...
- Supposons la propriété vraie pour un élément $k$ de $\mathbb{N}$ et montrons la pour $k+1$.

Par hypothèse $f_r$ est $k$ fois dérivable sur $]-\infty, 1[$ et $\forall z \in ]-\infty, 1[, f_r^{(k)}(z) = r^{\langle k \rangle}(1-z)^{-r-k}$.

$\forall z \in ]-\infty, 1[,\ 1-z > 0$ donc $z \mapsto (1-z)^{-r-k}$ est dérivable sur $]-\infty, 1[$.

Alors $f_r^{(k)}$ est dérivable sur $]-\infty, 1[$ donc $f_r$ est $k+1$ fois dérivable sur $]-\infty, 1[$.

de plus $\forall z \in ]-\infty, 1[,\ f_r^{(k+1)}(z) = \left(f_r^{(k)}\right)'(z) = r^{\langle k \rangle}(-r-k)(-1)(1-z)^{-r-k-1}$.

$\forall z \in ]-\infty, 1[,\ f_r^{(k+1)}(z) = r^{\langle k \rangle}(r+k)(1-z)^{-r-(k+1)} \underset{\text{Q2 a]}}{\overset{\uparrow}{=}} r^{\langle k+1 \rangle}(1-z)^{-r-(k+1)}$

ceci achève la récurrence.

Pour tout $k$ dans $\mathbb{N}$, $f_r$ est $k$ fois dérivable sur $]-\infty, 1[$ donc $f_r$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-\infty, 1[$. Nous pouvons alors appliquer à $f_r$ la formule de Taylor avec reste intégral, à l'ordre $n$ "sur $[0, x]$" ($x \in ]0, 1[$).

Alors $f_r(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{f_r^{(k)}(0)}{k!}(x-0)^k + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f_r^{(n+1)}(t)\,dt$.

$$f_r(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{r^{\langle k \rangle}(1-0)^{-r-k}}{k!} x^k + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} r^{\langle n+1 \rangle}(1-t)^{-r-(n+1)}\,dt.$$

$$f_r(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{r^{\langle k \rangle}}{k!} x^k + \frac{r^{\langle n+1 \rangle}}{n!} \int_0^x \left(\frac{x-t}{1-t}\right)^n \frac{1}{(1-t)^{r+1}}\,dt.$$

Ainsi $(1-x)^{-r} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{r^{\langle k \rangle}}{k!} x^k + \frac{r^{\langle n+1 \rangle}}{n!} \int_0^x \left(\frac{x-t}{1-t}\right)^n \frac{1}{(1-t)^{r+1}}\,dt$.

donc $(1-x)^{-r} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{r^{\langle k \rangle}}{k!} x^k + R_n$ et ceci pour tout $n$ dans $\mathbb{N}$.

e) Soit $t \in [0,x]$. $x-t \geqslant 0$ et $\frac{1}{1-t} \geqslant 0$ donc $\frac{x-t}{1-t} \geqslant 0$.

$x - \frac{x-t}{1-t} = \frac{x-xt-x+t}{1-t} = \frac{t(1-x)}{1-t} \geqslant 0$. Donc $x - \frac{x-t}{1-t} \geqslant 0$, $\frac{x-t}{1-t} \leqslant x$.

$t \geqslant 0,\ 1-x \geqslant 0,\ \frac{1}{1-t} \geqslant 0$

$\forall t \in [0,x],\ 0 \leqslant \frac{x-t}{1-t} \leqslant x.$

Soit $n \in \mathbb{N}$. $\forall t \in [0,x]$, $0 \leqslant \frac{x-t}{1-t} \leqslant x$ donc $\forall t \in [0,x]$, $0 \leqslant \left(\frac{x-t}{1-t}\right)^n \leqslant x^n$.

$\forall t \in [0,x]$, $1-t \geqslant 1-x > 0$ et $r+1 > 0$.

$\forall t \in [0,x]$, $(1-t)^{r+1} \geqslant (1-x)^{r+1} > 0$. $\forall t \in [0,x]$, $0 \leqslant \frac{1}{(1-t)^{r+1}} \leqslant \frac{1}{(1-x)^{r+1}}$.

Alors $\forall t \in [0,x]$, $0 \leqslant \left(\frac{x-t}{1-t}\right)^n \frac{1}{(1-t)^{r+1}} \leqslant \frac{x^n}{(1-x)^{r+1}}$ et $x \geqslant 0$.

Donc $0 \leqslant \int_0^x \left(\frac{x-t}{1-t}\right)^n \frac{1}{(1-t)^{r+1}}\,dt \leqslant \int_0^x \frac{x^n}{(1-x)^{r+1}}\,dt = \frac{x^n}{(1-x)^{r+1}} \underbrace{\int_0^x 1\,dt}_{x} = \frac{x^{n+1}}{(1-x)^{r+1}}$.

De plus $\frac{r\langle n+1\rangle}{n!} \geqslant 0$ car $r > 0$.

Par conséquent $0 \leqslant \frac{r\langle n+1\rangle}{n!} \int_0^x \left(\frac{x-t}{1-t}\right)^n \frac{1}{(1-t)^{r+1}}\,dt \leqslant \frac{r\langle n+1\rangle\, x^{n+1}}{n!\,(1-x)^{r+1}}$.

Alors $0 \leqslant R_n \leqslant u_n$ et ceci pour tout $n$ dans $\mathbb{N}$.

f) $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant R_n \leqslant u_n$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$. Alors par encadrement il vient

$\lim\limits_{n\to+\infty} R_n = 0$.

Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \left( (1-x)^{-r} - \sum_{k=0}^{n} \frac{r\langle k\rangle}{k!} x^k \right) = 0$; $\lim\limits_{n\to+\infty} \left( \sum_{k=0}^{n} \frac{r\langle k\rangle}{k!} x^k \right) = (1-x)^{-r}$.

Alors 1) La série de terme général $\frac{r\langle n\rangle}{n!} x^n$ converge.

2) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{r\langle n\rangle}{n!} x^n = (1-x)^{-r} = \frac{1}{(1-x)^r}$ pour tout $r \in ]0,+\infty[$ et pour tout $x \in ]0,1[$.

<u>Remarque</u>.. La formule précédente vaut encore pour $r \in [0,+\infty[$ et $x \in [0,1[$

<u>Exercice</u>.. le démontrer.

(Q4) Soit $r$ et $p$ deux réels tels que $0<p<1$ et $r>0$. $1-p \in ]0,1[$. Alors :

$$\sum_{\ell=0}^{+\infty} \frac{r^{\langle \ell \rangle}}{\ell!}(1-p)^{\ell} = \frac{1}{(1-(1-p))^r} = \frac{1}{p^r}.$$

donc $\displaystyle\sum_{\ell=0}^{+\infty} \frac{r^{\langle \ell \rangle}}{\ell!} p^r (1-p)^{\ell} = 1.$

<u>Remarque</u>.. Posons $\forall \ell \in \mathbb{N}$, $L_{r,p}(\ell) = \dfrac{r^{\langle \ell \rangle}}{\ell!} p^r (1-p)^{\ell}$.

- $\mathbb{N}$ est dénombrable
- $\forall \ell \in \mathbb{N}$, $L_{r,p}(\ell) \geq 0$
- $\displaystyle\sum_{\ell=0}^{+\infty} L_{r,p}(\ell) = 1$.

Ceci suffit pour dire que $L_{r,p}$ est la loi de probabilité d'une variable aléatoire discrète.

(Q5) <u>a)</u> Posons $\forall t \in \mathbb{R}$, $P_n(t) = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} (t-k+1)$. $X_n = P_n \circ X$.

Le théorème de transfert indique que pour montrer que $X_n$ possède une espérance il suffit de montrer que la série de terme général $P_n(k)\, P(X=k)$ est absolument convergente. Soit $k \in \mathbb{N}$.

$P_n(k)\, P(X=k) = \displaystyle\prod_{i=1}^{n} (k-i+1)\, P(X=k)$. $\displaystyle\prod_{i=1}^{n} (k-i+1) = k(k-1)\cdots(k-n+1)$.

Si $k \in [\![0, n-1]\!]$, $k(k-1)\cdots(k-n+1) = 0$ car l'un des facteurs de ce produit est nul.

Supposons que $k \in [\![n, +\infty[\![$. $P_n(k) = k(k-1)\cdots(k-n+1) = \dfrac{k!}{(k-n)!}$.

donc $P_n(k)\, P(X=k) = \dfrac{k!}{(k-n)!} \times \dfrac{r^{\langle k \rangle}}{k!} p^r (1-p)^k = \dfrac{r^{\langle k \rangle}}{(k-n)!} p^r (1-p)^k.$

Ainsi $\forall k\in\mathbb{N},\ P_n(k)\,P(X=k)=\begin{cases}\dfrac{r^{\langle k\rangle}}{(k-n)!}\,p^r\,(1-p)^k & \text{si } k\in[\![n,+\infty[\![\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$.

Observons que $\forall \ell\in\mathbb{N},\ P_n(\ell)P(X=\ell)\geqslant 0$. Alors pour montrer l'existence de l'espérance de $X_n$ il ne reste plus qu'à montrer la convergence de la série de terme général $P_n(\ell)P(X=\ell)$.

Soit $k\in[\![n,+\infty[\![$, $r^{\langle k\rangle}=\prod_{i=1}^{k}(r+i-1)$.

Supposons que $k\geqslant n+1$.

$$r^{\langle k\rangle}=\left(\prod_{i=1}^{n}(r+i-1)\right)\left(\prod_{i=n+1}^{k}(r+i-1)\right)\underset{j=i-n}{=}r^{\langle n\rangle}\prod_{j=1}^{k-n}(r+j+n-1).$$

$$r^{\langle k\rangle}=r^{\langle n\rangle}\prod_{j=1}^{k-n}(r+n+j-1)=r^{\langle n\rangle}\,(r+n)^{\langle k-n\rangle}.$$

Si $k=n$ : $r^{\langle k\rangle}=r^{\langle n\rangle}=r^{\langle n\rangle}\times 1=r^{\langle n\rangle}(r+n)^{\langle 0\rangle}=r^{\langle n\rangle}\,(r+n)^{\langle k-n\rangle}$.

Donc $\forall k\in[\![n,+\infty[\![,\ r^{\langle k\rangle}=r^{\langle n\rangle}(r+n)^{\langle k-n\rangle}$.

Alors $\forall k\in[\![n,+\infty[\![,\ P_n(k)\,P(X=k)=\dfrac{r^{\langle n\rangle}(r+n)^{\langle k-n\rangle}}{(k-n)!}\,p^r\,(1-p)^k$.

$$\forall k\in[\![n,+\infty[\![,\ P_n(k)\,P(X=k)=r^{\langle n\rangle}\left(\frac{1-p}{p}\right)^n\times\frac{(r+n)^{\langle k-n\rangle}}{(k-n)!}\,p^{r+n}\,(1-p)^{k-n}.$$

$r+n>0$ et $p\in]0,1[$ donc la série de terme général $\dfrac{(r+n)^{\langle k\rangle}}{k!}\,p^{r+n}(1-p)^k$ converge et $\displaystyle\sum_{\ell=0}^{+\infty}\frac{(r+n)^{\langle \ell\rangle}}{\ell!}\,p^{r+n}(1-p)^\ell=1$ (Q4).

Alors la série de terme général $\dfrac{(r+n)^{\langle k-n\rangle}}{(k-n)!}\,p^{r+n}(1-p)^{k-n}$ converge et

$$\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{(r+n)^{\langle k-n\rangle}}{(k-n)!}\,p^{r+n}(1-p)^{k-n}=1.$$

Par conséquent la série de terme général $P_n(k)\,P(X=k)$ converge et $\sum_{k=n}^{+\infty} P_n(k)\,P(X=k) = r^{\langle n\rangle}\left(\frac{1-p}{p}\right)^n$

mieux encore:

i) la série de terme général $P_n(k)\,P(X=k)$ converge absolument (car nous avons vu que $\forall k\in\mathbb{N},\ P_n(k)\,P(X=k)\geq 0$).

ii) $\sum_{k=0}^{+\infty} P_n(k)\,P(X=k) = \sum_{k=n}^{+\infty} P_n(k)\,P(X=k) = r^{\langle n\rangle}\left(\frac{1-p}{p}\right)^n$.

<u>Le théorème de transfert montre alors que $X_n = P_n\circ X$ possède une espérance qui vaut $r^{\langle n\rangle}\left(\frac{1-p}{p}\right)^n$.</u>

<u>b)</u> Posons $P_0=1$ et reposons $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \forall t\in\mathbb{R},\ P_n(t)=\prod_{k=1}^{n}(t-k+1)$. Soit $n\in\mathbb{N}^*$

$(P_0,P_1,\dots,P_n)$ est une famille d'éléments non nuls de $\mathbb{R}_n[X]$ de degrés échelonnés.

$(P_0,P_1,\dots,P_n)$ est donc une famille libre de $\mathbb{R}_n[X]$ dont le cardinal coïncide avec la dimension de $\mathbb{R}_n[X]$. $(P_0,P_1,\dots,P_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Alors $\exists(\alpha_0,\alpha_1,\dots,\alpha_n)\in\mathbb{R}^{n+1},\ \forall t\in\mathbb{R},\ t^n=\sum_{k=0}^{n}\alpha_k P_k$.

$X^n=\sum_{k=0}^{n}\alpha_k P_k\circ X = \alpha_0+\sum_{k=1}^{n}\alpha_k X_k$. Pour tout $k$ dans $[\![1,n]\!]$, $X_k$ possède une espérance et la variable certaine égale à $\alpha_0$ possède également une espérance. Ainsi $X^n$ est combinaison linéaire de $n+1$ variables aléatoires qui possèdent une espérance. Donc $X^n$ possède une espérance. Cela suffit pour dire que $X$ possède un moment d'ordre $n$ et ceci pour tout $n$ dans $\mathbb{N}^*$ et même pour tout $n$ dans $\mathbb{N}$.

<u>$X$ admet des moments de tous ordres.</u>

Ainsi $X$ possède une espérance et une variance.

$X_1 = X-1+1 = X$. Alors $E(X)=E(X_1)=r^{\langle 1\rangle}\left(\frac{1-p}{p}\right)^1$. <u>$E(X)=r\,\frac{1-p}{p}$.</u>

$X_2=X(X-1)$. Alors $V(X)=E(X^2)-(E(X))^2=E(X(X-1)+X)-(E(X))^2=E(X_2)+E(X)-(E(X))^2$

$V(X)=r^{\langle 2\rangle}\left(\frac{1-p}{p}\right)^2+r\,\frac{1-p}{p}-\left(r\,\frac{1-p}{p}\right)^2=r(r+1)\left(\frac{1-p}{p}\right)^2+r\,\frac{1-p}{p}-\left(r\,\frac{1-p}{p}\right)^2=r\,\frac{1-p}{p}\left[(r+1)\frac{1-p}{p}+1-r\,\frac{1-p}{p}\right]$

$$V(X) = r\,\frac{1-p}{p}\left[r\,\frac{1-p}{p} + \frac{1-p}{p} + 1 - r\,\frac{1-p}{p}\right] = r\,\frac{1-p}{p} \times \frac{1}{p} = r\,\frac{1-p}{p^2}.\quad \underline{\underline{V(X) = r\,\frac{1-p}{p^2}}}.$$

**Q6** $Z(\Omega) = \mathbb{N}$. $(\{X=k\})_{k\in\mathbb{N}}$ est un système complet d'événements. Soit $n \in \mathbb{N}$.

La formule des probabilités totales donne : $P(Z=n) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(\{X+Y=n\} \cap \{X=k\})$.

$$P(Z=n) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(\{X=k\} \cap \{Y=n-k\}) \underset{\uparrow}{=} \sum_{k=0}^{+\infty} P(X=k)\,P(Y=n-k) \underset{\uparrow}{=} \sum_{k=0}^{n} P(X=k)\,P(Y=n-k).$$

X et Y sont indépendantes  $\qquad$  $Y(\Omega)=\mathbb{N}$

$$P(Z=n) \underset{\uparrow}{=} \sum_{k=0}^{n}\left[\left(\frac{r^{\langle k\rangle}}{k!}\,p^r(1-p)^k\right)\left(\frac{s^{\langle n-k\rangle}}{(n-k)!}\,p^s(1-p)^{n-k}\right)\right] = p^{r+s}(1-p)^n\,\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!\,(n-k)!}\,r^{\langle k\rangle}s^{\langle n-k\rangle}.$$

$\begin{cases} X \hookrightarrow BN(r,p) \\ Y \hookrightarrow BN(s,p)\end{cases}$

$$P(Z=n) = p^{r+s}(1-p)^n\,\frac{1}{n!}\underbrace{\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} r^{\langle k\rangle}s^{\langle n-k\rangle}}_{(r+s)^{\langle n\rangle} \text{ d'après Q2 c)}}$$

donc $\underline{\underline{Z(\Omega)=\mathbb{N} \text{ et } \forall n\in\mathbb{N},\ P(Z=n) = \frac{(r+s)^{\langle n\rangle}}{n!}\,p^{r+s}(1-p)^n}}$.

Ainsi $\underline{\underline{Z \text{ suit la loi } BN(r+s,p)}}$.

## PARTIE II Inégalités stochastiques

**Q7** Soit $x \in \mathbb{R}$. $\forall \omega \in \Omega$, $X(\omega) \geqslant x \Rightarrow Y(\omega) \geqslant x$ car $\forall \omega \in \Omega$, $X(\omega) \leqslant Y(\omega)$.

donc $\{X \geqslant x\} \subset \{Y \geqslant x\}$. La croissance de $P$ donne : $P(X \geqslant x) \leqslant P(Y \geqslant x)$.

Ainsi $\forall x \in \mathbb{R}$, $P(X \geqslant x) \leqslant P(Y \geqslant x)$. $X$ est stochastiquement inférieure à $Y$.

<u>Si $\forall \omega \in \Omega, X(\omega) \leqslant Y(\omega)$ (donc $X \leqslant Y$), $X$ est stochastiquement inférieure à $Y$.</u>

**Q8** $X \hookrightarrow \mathcal{N}(-1, 1^2)$, $Y \hookrightarrow \mathcal{N}(1, 1^2)$, $X$ et $Y$ sont indépendantes.

Nous notons $F_X$ (resp. $F_Y$) la fonction de répartition de $X$ (resp. $Y$).

<u>a)</u> Posons $\alpha = P(\{X \geqslant 0\} \cap \{Y < 0\})$.

Par indépendance : $\alpha = P(X \geqslant 0)P(Y<0) = (1 - P(X<0))P(Y<0) = (1-P(X \leqslant 0))P(Y \leqslant 0)$.

$\alpha = \left(1 - P\left(\frac{X-(-1)}{1} \leqslant \frac{0-(-1)}{1}\right)\right) P\left(\frac{Y-1}{1} \leqslant \frac{0-1}{1}\right)$. Or $\frac{X-(-1)}{1}$ et $\frac{Y-1}{1}$ suivent la loi normale centrée réduite.

donc $\alpha = \left(1 - \phi\left(\frac{0-(-1)}{1}\right)\right)\phi\left(\frac{0-1}{1}\right) = (1-\phi(1))\phi(-1) = (1-\phi(1))(1-\phi(1))$.

Finalement <u>$P(\{X \geqslant 0\} \cap \{Y<0\}) = (1-\phi(1))\phi(-1) = (1-\phi(1))^2$.</u>

<u>b)</u> Soit $x \in \mathbb{R}$. $P(X \geqslant x) = 1 - P(X < x) = 1 - P(X \leqslant x) = 1 - P\left(\frac{X-(-1)}{1} \leqslant \frac{x-(-1)}{1}\right)$.

$P(X \geqslant x) = 1 - \phi(x+1)$ car $\frac{X-(-1)}{1} \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$.

$P(Y \geqslant x) = 1 - P(Y<x) = 1 - P(Y \leqslant x) = 1 - P\left(\frac{Y-1}{1} \leqslant \frac{x-1}{1}\right) = 1 - \phi(x-1)$ car $\frac{Y-1}{1} \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$.

$\phi$ est croissante sur $\mathbb{R}$ et $x-1 \leqslant x+1$ donc $\phi(x-1) \leqslant \phi(x+1)$. $1-\phi(x-1) \geqslant 1-\phi(x+1)$.

Alors $P(Y \geqslant x) = 1 - \phi(x-1) \geqslant 1 - \phi(x+1) = P(X \geqslant x)$. $P(X \leqslant x) \leqslant P(Y \leqslant x)$.

<u>$\forall x \in \mathbb{R}$, $P(X \geqslant x) \leqslant P(Y \geqslant x)$. $X$ est stochastiquement inférieure à $Y$.</u>

<u>c)</u> $\boxed{V1}$ Supposons que $\forall \omega \in \Omega$, $X(\omega) \leqslant Y(\omega)$.

donc $\forall \omega \in \Omega$, $X(\omega) \geqslant 0 \Rightarrow Y(\omega) \geqslant 0$. $\{X \geqslant 0\} \subset \{Y \geqslant 0\}$.

Par conséquent $\{X \geq 0\} \cap \{Y < 0\} = \emptyset$ donc $P(\{X \geq 0\} \cap \{Y < 0\}) = 0$.

D'après c) $(1-\phi(1))^2 = 0$. $1-\phi(1) = 0$. $\phi(1) = 1$. Or $\forall x \in \mathbb{R}$, $\phi(x) \in ]0,1[$

donc on n'a pas $\forall \omega \in \Omega$, $X(\omega) \leq Y(\omega)$.

$\boxed{V2}$ Supposons que $\forall \omega \in \Omega$, $X(\omega) \leq Y(\omega)$. Alors $\forall \omega \in \Omega$, $X(\omega) - Y(\omega) \leq 0$.

donc $P(X - Y \leq 0) = 1$.

$X \hookrightarrow \mathcal{N}(-1, 1^2)$, $Y \hookrightarrow \mathcal{N}(1, 1^2)$, $X$ et $Y$ sont indépendantes.

donc $X \hookrightarrow \mathcal{N}(-1, 1^2)$, $-Y \hookrightarrow \mathcal{N}(-1, 1^2)$, $X$ et $-Y$ sont indépendantes. Le théorème de stabilité sur les lois normales montre que $X + (-Y) \hookrightarrow \mathcal{N}(-1+(-1), (\sqrt{1^2+1^2})^2)$.

$X - Y \hookrightarrow \mathcal{N}(-2, (\sqrt{2})^2)$. Alors $1 = P(X-Y \leq 0) = P\left(\frac{X-Y-(-2)}{\sqrt{2}} \leq \frac{0-(-2)}{\sqrt{2}}\right)$.

Or $\frac{X-Y-(-2)}{\sqrt{2}} \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$. donc $1 = \phi\left(\frac{0-(-2)}{\sqrt{2}}\right) = \phi(\sqrt{2})$.

Or $\forall x \in \mathbb{R}$, $\phi(x) \in ]0,1[$. Par conséquent on n'a pas $\forall \omega \in \Omega$, $X(\omega) \leq Y(\omega)$

(Q9) * Supposons que $X$ est stochastiquement inférieure à $Y$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $P(X \geq x) \leq P(Y \geq x)$. $X$ prend ses valeurs dans $\mathbb{N}$

Soit $k \in \mathbb{N}$. $P(X \leq k) = 1 - P(X > k) = 1 - P(X \geq k+1)$.

$P(X \leq k) = 1 - P(X \geq k+1)$ et de même $P(Y \leq k) = 1 - P(Y \geq k+1)$.

Or $P(X \geq k+1) \leq P(Y \geq k+1)$ donc $P(X \leq k) = 1 - P(X \geq k+1) \geq 1 - P(Y \geq k+1) = P(Y \leq k)$.

$\forall k \in \mathbb{N}$, $P(X \leq k) \geq P(Y \leq k)$

* Réciproquement supposons que $\forall k \in \mathbb{N}$, $P(X \leq k) \geq P(Y \leq k)$ et montrons que $X$ est stochastiquement inférieure à $Y$. Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrons que $P(X \geq x) \leq P(Y \geq x)$.

1^er^ cas : $x \in ]-\infty, 0]$. Comme $X$ et $Y$ prennent leurs valeurs dans $\mathbb{N}$ :

$P(X \geq x) = P(Y \geq x) = 1$. Alors $P(X \geq x) \leq P(Y \geq x)$ !

<u>2ème Cas</u>.. $x \in ]0,+\infty[$ et $x$ n'est pas entier. Posons $k_x = \mathrm{Ent}(x) = \lfloor x \rfloor$.

$P(X \geq x) = 1 - P(X < x) = 1 - P(X \leq k_x)$. de même $P(Y \geq x) = 1 - P(Y \leq k_x)$.

Or $k_x \in \mathbb{N}$ car $x > 0$ donc $P(X \leq k_x) \geq P(Y \leq k_x)$.

donc $P(X \geq x) = 1 - P(X \leq k_x) \leq 1 - P(Y \leq k_x) = P(Y \geq x)$. $P(X \geq x) \leq P(Y \geq x)$.

<u>3ème Cas</u>.. $x \in ]0,+\infty[$ et $x$ est entier. Alors $x \in \mathbb{N}^*$ donc $x - 1 \in \mathbb{N}$.

$P(X \geq x) = 1 - P(X < x) = 1 - P(X \leq x-1)$. de même $P(Y \geq x) = 1 - P(Y \leq x-1)$.

Or <u>$x-1 \in \mathbb{N}$</u> donc $P(X \leq x-1) \geq P(Y \leq x-1)$. Donc $P(X \geq x) = 1 - P(X \leq x-1) \leq 1 - P(Y \leq x-1) = P(Y \geq x)$.

Finalement $\forall x \in \mathbb{R}$, $P(X \geq x) \leq P(Y \geq x)$. $X$ est stochastiquement inférieure à $X$

<u>Si $X$ et $Y$ sont discrètes à valeurs dans $\mathbb{N}$, $X$ est stochastiquement inférieure à $Y$ si et seulement si $\forall k \in \mathbb{N}$, $P(X \leq k) \geq P(Y \leq k)$.</u>

(Q10) <u>a)</u> • $X$ et $Z$ sont indépendantes.

• $X$ suit la loi de Poisson de paramètre $\theta$ et $Z$ suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda - \theta$.

Le théorème de stabilité du cours sur les lois de Poisson montre que $X + Z$ suit la loi de Poisson de paramètre $\theta + (\lambda - \theta)$.

Ainsi <u>$X+Z$ suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda$.</u>

<u>b)</u> Notons que : 1) $X$ et $Y$ sont discrètes à valeurs dans $\mathbb{N}$

2) $Y$ a même loi que $X+Z$.

$\forall k \in \mathbb{N}$, $\{X + Z \leq k\} \subset \{X \leq k\}$ car $Z$ prend ses valeurs dans $\mathbb{N}$.

Par croissance de $P$ : $\forall k \in \mathbb{N}$, $P(Y \leq k) = P(X + Z \leq k) \leq P(X \leq k)$.

$\forall k \in \mathbb{N}$, $P(X \leq k) \geq P(Y \leq k)$. <u>a)</u> permet alors de dire que <u>$X$ est stochastiquement inférieure à $Y$.</u>

(Q11) <u>a)</u> Soit $k \in \mathbb{N}$ et soit $t \in \mathbb{R}_+^*$. Posons $\forall j \in \mathbb{N}$, $u_j = \dfrac{t^j}{j!}$ et $\forall i \in \mathbb{N}$, $S_i = \displaystyle\sum_{j=0}^{i} \frac{t^j}{j!}$.

Notons que : $u_0 = S_0 = 1$. $\forall j \in \mathbb{N}^*$, $u_j = \dfrac{t}{j} u_{j-1}$ et $\forall j \in \mathbb{N}^*$, $S_j = S_{j-1} + u_j$.

Notons pour finir que $F(t,k) = S_k e^{-t}$. Il n'y a alors plus de difficulté pour écrire la fonction suite.

```
function suite(k:integer; t:real):real;
var j:integer; u,s:real;
begin
u:=1; s:=1;
for j:=1 to k do
      begin
      u:=u*t/j; s:=s+u;
      end;
suite:=s*exp(-t);
end;
```

b) Soit $k \in \mathbb{N}$. Posons $\forall t \in ]0,+\infty[$, $\psi_k(t) = \sum_{j=0}^{k} \frac{t^j}{j!} e^{-t}$.

$t \mapsto \sum_{j=0}^{k} \frac{t^j}{j!}$ et $t \mapsto e^{-t}$ sont dérivables sur $]0,+\infty[$. Alors par produit $\psi_k$ est dérivable sur $]0,+\infty[$.

1er cas. $k \geqslant 1$. $\forall t \in ]0,+\infty[$, $\psi'_k(t) = \sum_{j=0}^{k} j \frac{t^{j-1}}{j!} e^{-t} + \sum_{j=0}^{k} \frac{t^j}{j!}(-e^{-t})$. $i = j+1$

$\forall t \in ]0,+\infty[$, $\psi'_k(t) = \sum_{j=1}^{k} \frac{t^{j-1}}{(j-1)!} e^{-t} + \sum_{i=1}^{k+1} \frac{t^{i-1}}{(i-1)!}(-e^{-t}) = -\frac{t^k}{k!} e^{-t}$.

2ème cas. $k=0$ $\forall t \in ]0,+\infty[$, $\psi_k(t) = e^{-t}$; $\forall t \in ]0,+\infty[$, $\psi'_k(t) = -e^{-t} = -\frac{t^0}{0!} e^{-t} = -\frac{t^k}{k!} e^{-t}$.

Dans les deux cas $\forall t \in ]0,+\infty[$, $\psi'_k(t) = -\frac{t^k}{k!} e^{-t} < 0$. $\psi_k$ est strictement décroissante sur $]0,+\infty[$.

$\psi_k$ est continue sur $]0,+\infty[$ car $\psi_k$ est dérivable sur $]0,+\infty[$.

$\lim_{t \mapsto 0^+} \psi_k(t) = \lim_{t \mapsto 0^+} \left( \sum_{j=0}^{k} \frac{t^j}{j!} e^{-t} \right) = 1$ et, par croissance comparée $\lim_{t \mapsto +\infty} \psi_k(t) = 0$.

Le théorème de la bijection permet de dire que $\psi_k$ est une bijection de $]0,+\infty[$ sur $]0,1[$.

Alors $\forall \beta \in ]0,1[$, $\exists !\ n(\beta,k) \in ]0,+\infty[$, $\varphi_k(n(\beta,k)) = \beta$.

Pour tout $k$ dans $\mathbb{N}$ et pour tout réel $\beta$ appartenant à $]0,1[$, il existe un unique réel $n(\beta,k)$ strictement positif tel que $F(n(\beta,k),k) = \beta$.

(Q12) dans a), b), c) $\alpha$ est un réel vérifiant $0<\alpha<1$ ... sauf mention du contraire.

a) Supposons que $\{k\in\mathbb{N} \mid G(k)\geqslant\alpha\}$ soit vide.

Alors $\forall k\in\mathbb{N}$, $G(k)<\alpha$. G est une fonction de répartition donc $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} G(x) = 1$.

Ainsi $\lim\limits_{k\mapsto+\infty} G(k) = 1$. Alors $1 = \lim\limits_{k\mapsto+\infty} G(k) \leqslant \alpha$ ; $\alpha \geqslant 1$ !!

Par conséquent $\{k\in\mathbb{N} \mid G(k)\geqslant\alpha\}$ est une partie non vide de $\mathbb{N}$. Donc cette partie possède un minimum que nous notons $L_\alpha$. $L_\alpha = \min\{k\in\mathbb{N} \mid G(k)\geqslant\alpha\}$ existe.

$L_\alpha \in \min\{k\in\mathbb{N} \mid G(k)\geqslant\alpha\}$ donc $G(L_\alpha)\geqslant\alpha$.

1er cas.. $L_\alpha \geqslant 1$. Alors $L_\alpha - 1 \in\mathbb{N}$, $L_\alpha - 1 < L_\alpha = \min\{k\in\mathbb{N} \mid G(k)\geqslant\alpha\}$.

Ainsi $G(L_\alpha - 1) < \alpha$.

2e cas.. $L_\alpha = 0$. G est la fonction de répartition de X qui prend ses valeurs dans $\mathbb{N}$.

donc $G(L_\alpha - 1) = G(-1) = P(X\leqslant -1) = 0 < \alpha$. Là encore $G(L_\alpha - 1) < \alpha$.

Finalement $G(L_\alpha - 1) < \alpha \leqslant G(L_\alpha)$.

b) Remarque.. $\forall k \in\mathbb{N}$, $k\leqslant L_\alpha - 1 \Rightarrow G(k)\leqslant G(L_\alpha - 1) < \alpha$. (1) G croissante

$\forall k\in\mathbb{N}$, $k\geqslant L_\alpha \Rightarrow G(k)\geqslant G(L_\alpha)\geqslant\alpha$. (2)

- Soit $\omega\in\Omega$. $W(\omega)<\alpha \Leftrightarrow G(X(\omega))<\alpha \Leftrightarrow \exists k\in\mathbb{N}$, $X(\omega)=k$ et $G(k)<\alpha$.

$W(\omega)<\alpha \Leftrightarrow \exists k\in\mathbb{N}$, $X(\omega)=k$ et $k\leqslant L_\alpha - 1$ ← (1) et (2)

Si $L_\alpha = 0$ alors $L_\alpha - 1 = -1$ donc $\{\omega\in\Omega \mid W(\omega)<\alpha\} = \emptyset \in \mathcal{B}$.

Supposons $L_\alpha\geqslant 1$. $\forall\omega\in\Omega$, $W(\omega)<\alpha \Leftrightarrow \exists k\in [\![0, L_\alpha - 1]\!]$, $X(\omega)=k$.

$$\{\omega\in\Omega \mid W(\omega)<\alpha\} = \bigcup_{k=0}^{L_\alpha-1}\{\omega\in\Omega \mid X(\omega)=k\} = \bigcup_{k=0}^{L_\alpha-1}\left(X^{-1}(\{k\})\right).$$

$X$ est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ donc $\forall k \in \mathbb{N}$, $X^{-1}(\{k\}) \in \mathcal{B}$.

comme $\mathcal{B}$ est stable par réunion : $\{\omega \in \Omega \mid W(\omega) < \alpha\} \in \mathcal{B}$.

Dans les deux cas $\underline{\underline{\{\omega \in \Omega \mid W(\omega) < \alpha\} \in \mathcal{B}}}$. $\underline{\underline{\{W < \alpha\} \text{ est un événement.}}}$

<u>Remarque.</u>- Dans les deux cas $\underline{\{W < \alpha\} = \{X \leq L_\alpha - 1\}}$. Ce résultat est à mémoriser.

- Soit $\omega \in \Omega$.

$V(\omega) \geq \alpha \iff G(X(\omega)-1) \geq \alpha \iff \exists \ell \in \mathbb{N}, X(\omega) = \ell$ et $G(\ell - 1) \geq \alpha$.

$G(-1) = P(X \leq -1) = 0$.

Donc $V(\omega) \geq \alpha \iff \exists \ell \in \mathbb{N}^*, X(\omega) = \ell$ et $G(\ell-1) \geq \alpha \overset{(1)\text{ et }(2)}{\iff} \exists \ell \in \mathbb{N}^*, X(\omega) = \ell$ et $\ell - 1 \geq L_\alpha$

$V(\omega) \geq \alpha \iff \exists \ell \in [\![ L_\alpha + 1, +\infty [\![, X(\omega) = \ell \iff X(\omega) \geq L_\alpha + 1$.

$\{\omega \in \Omega \mid V(\omega) \geq \alpha\} = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \geq L_\alpha + 1\} = X^{-1}([L_\alpha + 1, +\infty[) \in \mathcal{B}$

$X$ est une variable aléatoire.

$\underline{\underline{\{\omega \in \Omega \mid V(\omega) \geq \alpha\} \in \mathcal{B}.\ \{V \geq \alpha\} \text{ est un événement.}}}$

Nous venons de voir que : $\forall \alpha \in ]0,1[$, $\{W < \alpha\} \in \mathcal{B}$ et $\{V \geq \alpha\} \in \mathcal{B}$. Examinons les cas $\alpha \leq 0$ et $\alpha \geq 1$.

▲ Soit $\alpha \in ]-\infty, 0]$.

$\{\omega \in \Omega \mid W(\omega) < \alpha\} = \{\omega \in \Omega \mid G(X(\omega)) < \alpha\} = \emptyset$ car $G(\mathbb{R}) \subset [0,1]$ et $\alpha \leq 0$.

$\{\omega \in \Omega \mid V(\omega) \geq \alpha\} = \{\omega \in \Omega \mid G(X(\omega)-1) \geq \alpha\} = \Omega$ car $G(\mathbb{R}) \subset [0,1]$ et $\alpha \leq 0$.

Donc $\{\omega \in \Omega \mid W(\omega) < \alpha\} \in \mathcal{B}$ et $\{\omega \in \Omega \mid V(\omega) \geq \alpha\} \in \mathcal{B}$. $\{W < \alpha\}$ et $\{V \geq \alpha\}$ sont encore des événements.

▲ Soit $\alpha \in [1, +\infty[$.

$\{\omega \in \Omega \mid W(\omega) < \alpha\} = \{\omega \in \Omega \mid G(X(\omega)) < \alpha\}$ et $\{\omega \in \Omega \mid V(\omega) \geq \alpha\} = \{\omega \in \Omega \mid G(X(\omega)-1) \geq \alpha\}$.

<u>1^er cas..</u> $\alpha > 1$.

$\{\omega \in \Omega \mid W(\omega) < \alpha\} = \{\omega \in \Omega \mid G(X(\omega)) < \alpha\} \overset{G(\mathbb{R}) \subset [0,1]}{=} \Omega \in \mathcal{B}$. $\{W < \alpha\}$ est un événement.

$\{\omega \in \Omega \mid V(\omega) \geq \alpha\} = \{\omega \in \Omega \mid G(X(\omega)-1) \geq \alpha\} \underset{G(\mathbb{R}) \subset [0,1]}{=} \emptyset \in \mathcal{B}$. $\{V \geq \alpha\}$ est un événement.

<u>2^ème cas..</u> $\alpha = 1$.

$\{\omega \in \Omega \mid W(\omega) < \alpha\} = \{\omega \in \Omega \mid W(\omega) < 1\} = \{\omega \in \Omega \mid G(X(\omega)) < 1\}$.

$\{\omega \in \Omega \mid V(\omega) \geq \alpha\} = \{\omega \in \Omega \mid G(X(\omega)-1) \geq \alpha\} = \{\omega \in \Omega \mid G(X(\omega)-1) \geq 1\}$.

Envisageons encore deux cas !

a) $\forall x \in \mathbb{R},\ G(x) < 1$.

Alors $\{\omega \in \Omega \mid W(\omega) < \alpha\} = \{\omega \in \Omega \mid G(X(\omega)) < 1\} = \Omega \in \mathcal{B}$. $\{W<\alpha\}$ est un événement.

$\{\omega \in \Omega \mid V(\omega) \geqslant \alpha\} = \{\omega \in \Omega \mid G(X(\omega)-1) \geqslant 1\} = \emptyset \in \mathcal{B}$. $\{V \geqslant \alpha\}$ est un événement.

b) $\exists x_0 \in \mathbb{R},\ G(x_0) = 1$. $X$ prend ses valeurs dans $\mathbb{N}$ donc $\forall x \in ]-\infty, 0[,\ G(x) = P(X \leqslant x) = 0$.

Alors $x_0 \in [0, +\infty[$. Posons $\ell_0 = \text{Ent}(x_0)+1$. $1 = G(x_0) \leqslant G(\ell_0) \leqslant 1$. $G(\ell_0) = 1$.

Alors $\{\ell \in \mathbb{N} \mid G(\ell) = 1\}$ est une partie non vide de $\mathbb{N}$. Elle possède un plus petit élément que nous notons $\ell_1$. Nécessairement $G(\ell_1 - 1) < 1$.

Par croissance de $G$ : $\forall \ell \in [\![\ell_1, +\infty[\![,\ G(\ell) = 1$ et $\forall \ell \in \mathbb{N} \cap ]\!]-\infty, \ell_1 - 1]\!],\ G(\ell) < 1$.

$\{\omega \in \Omega \mid W(\omega) < \alpha\} = \{\omega \in \Omega \mid G(X(\omega)) < \alpha\} = \{\omega \in \Omega \mid G(X(\omega)) < 1\} = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leqslant \ell_1 - 1\} \in \mathcal{B}$.

$\{\omega \in \Omega \mid V(\omega) \geqslant \alpha\} = \{\omega \in \Omega \mid G(X(\omega)-1) \geqslant \alpha\} = \{\omega \in \Omega \mid G(X(\omega)-1) \geqslant 1\}$. Donc $\{W<\alpha\}$ est un événement.

$\{\omega \in \Omega \mid V(\omega) \geqslant \alpha\} = \{\omega \in \Omega \mid G(X(\omega)-1) = 1\} = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) - 1 \geqslant \ell_1\}$

$\{\omega \in \Omega \mid V(\omega) \geqslant \alpha\} = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \geqslant \ell_1 + 1\} \in \mathcal{B}$. $\{V \geqslant \alpha\}$ est un événement.

Ceci achève de montrer (péniblement) que $\underline{\underline{\forall \alpha \in \mathbb{R},\ \{\omega \in \Omega \mid W(\omega) < \alpha\} \in \mathcal{B}}}$ $\underline{\underline{\text{et } \{\omega \in \Omega \mid V(\omega) \geqslant \alpha\} \in \mathcal{B}}}$ ou que $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $\{W<\alpha\}$ et $\{V \geqslant \alpha\}$ sont des événements.

Il va falloir encore ruser pour retomber sur la définition d'une variable aléatoire proposée par notre cours... Posons $V' = -V$ et $W' = -W$.

$\forall \alpha \in \mathbb{R},\ \{W' \leqslant \alpha\} = \{-W \leqslant \alpha\} = \{W \geqslant -\alpha\} = \overline{\{W < -\alpha\}} \in \mathcal{B}$ ($\{W < \alpha\} \in \mathcal{B}$ et $\mathcal{B}$ est stable par passage au complémentaire).

$\forall \alpha \in \mathbb{R},\ \{W' \leqslant \alpha\} \in \mathcal{B}$. Alors $W'$ est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ donc $W = -W'$ est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ !

$\forall \alpha \in \mathbb{R},\ \{V' \leqslant \alpha\} = \{-V \leqslant \alpha\} = \{V \geqslant -\alpha\} \in \mathcal{B}$. Donc $V'$ est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{B}, P)$. Alors $V = -V'$ est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ !

Finalement $W$ et $V$ sont deux variables aléatoires sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

c) On reprend $\alpha$ dans $]0,1[$. Nous avons vu plus haut que :

- si $L_\alpha \geq 1$ : $\{W<\alpha\} = \bigcup_{\ell=0}^{L_\alpha-1} \{X=\ell\} = \{X \leq L_\alpha - 1\}$.
- si $L_\alpha = 0$ $\{W<\alpha\} = \emptyset = \{X \leq L_\alpha - 1\}$ car $L_\alpha - 1 = -1$ et $X$ prend ses valeurs dans $\mathbb{N}$.

donc dans les deux cas $P(W<\alpha) = P(X \leq L_\alpha - 1) = G(L_\alpha - 1)$.

- $\{\omega \in \Omega \mid V(\omega) \geq \alpha\} = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \geq L_\alpha + 1\}$.

$P(V \geq \alpha) = P(X \geq L_\alpha + 1) = 1 - P(X < L_\alpha + 1) \underset{\uparrow}{=} 1 - P(X \leq L_\alpha) = 1 - G(L_\alpha)$.

$X$ prend ses valeurs dans $\mathbb{N}$

$\forall \alpha \in ]0,1[, \ P(W<\alpha) = G(L_\alpha - 1)$ et $P(V \geq \alpha) = 1 - G(L_\alpha)$.

d) Notons que a) et c) permettent d'écrire :

$G(L_\alpha) \geq \alpha$

- $\forall \alpha \in ]0,1[, \ P(W<\alpha) = G(L_\alpha - 1) < \alpha$ et $P(V \geq \alpha) = 1 - G(L_\alpha) \leq 1 - \alpha$. ⚠

donc $\forall \alpha \in ]0,1[, \ P(W \geq \alpha) = 1 - P(W<\alpha) \geq 1 - \alpha = 1 - P(U \leq \alpha) = P(U > \alpha) = P(U \geq \alpha)$.

$\forall \alpha \in ]0,1[, \ P(V \geq \alpha) \leq 1 - \alpha = 1 - P(U \leq \alpha) = P(U > \alpha) = P(U \geq \alpha)$.

A mémoriser pour Q13b

$\forall \alpha \in ]0,1[, \ P(V \geq \alpha) \leq P(U \geq \alpha) \leq P(W \geq \alpha)$.

- $\alpha \in ]-\infty, 0]$. $P(V \geq \alpha) = P(G(X-1) \geq \alpha) \underset{\uparrow}{=} 1$. $P(U \geq \alpha) \underset{\uparrow}{=} 1$.

$G(\mathbb{R}) \subset [0,1]$ $\quad U(\Omega) \subset [0,1]$

$P(W \geq \alpha) = P(G(X) \geq \alpha) = 1$ car $G(\mathbb{R}) \subset [0,1]$

Ainsi $P(V \geq \alpha) = P(U \geq \alpha) = P(W \geq \alpha) = 1$ ; $P(V \geq \alpha) \leq P(U \geq \alpha) \leq P(W \geq \alpha)$.

- $\alpha \in ]1, +\infty[$. $P(V \geq \alpha) = P(G(X-1) \geq \alpha) = 0$ car $G(\mathbb{R}) \subset [0,1]$.

$P(U \geq \alpha) = 0$ car $U(\Omega) \subset [0,1]$

$P(W \geq \alpha) = P(G(X) \geq \alpha) = 0$ car $G(\mathbb{R}) \subset [0,1]$.

Alors $P(V\geq \alpha) = P(U\geq \alpha) = P(W\geq \alpha) = 0$. Donc $P(V\geq \alpha)\leq P(U\geq \alpha)\leq P(W\geq \alpha)$.

- Supposons que $\alpha = 1$.

$P(U\geq \alpha) = P(U\geq 1) = 1 - P(U<1) = 1 - P(U\leq 1) = 1-1 = 0$.

Donc $P(U\geq \alpha) = 0$. On a donc $P(U\geq \alpha) = 0 \leq P(W\geq \alpha)$.

Ne reste plus qu'à montrer que $P(V\geq \alpha)\leq P(U\geq \alpha) = 0$. Cela revient donc à

montrer que $P(V\geq \alpha) = 0$ ou que $P(V\geq 1) = 0$.

$P(V\geq 1) = P(G(X-1)\geq 1) \underset{\substack{\uparrow \\ G \text{ prend ses valeurs dans } [0,1]}}{=} P(G(X-1) = 1) = P(\{\omega\in\Omega \mid G(X(\omega)-1) = 1\})$.

Posons $I = \{k\in\mathbb{N} \mid G(k-1) = 1\}$.

Si $I = \emptyset$ : $\{\omega\in\Omega \mid G(X(\omega)-1) = 1\} = \emptyset$ et $P(V\geq 1) = 0$.

Supposons $I\neq\emptyset$. Soit $k\in I$. $G(k-1) = 1$. Alors $1 = G(k-1) \underset{\substack{\text{croissante} \\ \downarrow}}{\leq} G(k)\leq 1$.

Donc $G(k) = G(k-1) = 1$. $P(X=k) = P(X\leq k) - P(X\leq k-1) = G(k) - G(k-1) = 0$.

Ainsi $\forall k\in I$, $P(X=k) = 0$.

$P(V\geq 1) = P(\{\omega\in\Omega ; G(X(\omega)-1) = 1\}) = \sum_{k\in I} P(X=k) = 0$.

Dans les deux cas $P(V\geq 1) = 0$.

Alors $P(V\geq 1) = 0$, $P(U\geq 1) = 0$ et $P(W\geq 1)\geq 0$.

Donc $P(V\geq 1)\leq P(U\geq 1)\leq P(W\geq 1)$.

Ceci achève de montrer que $\forall \alpha\in\mathbb{R}$, $P(V\geq \alpha)\leq P(U\geq \alpha)\leq P(W\geq \alpha)$.

Alors <u>V est stochastiquement inférieure à U et U est stochastiquement inférieure à W.</u>

(Q13) a) $\forall k\in\mathbb{N}^*$, $E(X_k)$ existe et vaut $\theta$.

$\forall n\in [\![2,+\infty[\![$, $E(S_n)$ existe et vaut $\sum_{k=1}^{n} E(X_k)$ donc $n\theta$.

Alors $\forall n\in [\![2,+\infty[\![$, $E(\frac{1}{n}S_n)$ existe et vaut $\theta$.

<u>Pour tout $n$ dans $[\![2,+\infty[\![$, $\frac{1}{n}S_n$ est un estimateur sans biais de $\theta$.</u>

<u>Remarque</u>.. La loi faible des grands nombres montre que $(\frac{1}{n}S_n)_{n\geq 2}$ est une suite convergente d'estimateurs sans biais de $\theta$.

b) Rappelons d'abord un résultat important obtenu dans § 12. Soit $X$ une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ à valeur dans $\mathbb{N}$ de fonction de répartition $G$.
Posons $\forall \omega \in \Omega$, $V(\omega) = G(X(\omega)-1)$ et $W(\omega) = G(X(\omega))$.
Alors $V$ et $W$ sont des variables aléatoires sur $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ et $\forall \alpha \in ]0,1[$, $P(W<\alpha) < \alpha$ et $P(V \geqslant \alpha) \leqslant 1-\alpha$.
Fixons $\alpha$ dans $]0,1[$ et soit $n$ un élément de $[\![1, +\infty[\![$.
$X_1, X_2, \dots, X_n$ sont indépendantes et pour tout $k$ dans $[\![1, n]\!]$, $X_k$ suit la loi de Poisson de paramètre $\theta$. Alors le cours indique que $S_n$ suit la loi de Poisson de paramètre $n\theta$.
Notons $F_{S_n}$ sa fonction de répartition. $S_n$ est une variable aléatoire qui prend ses valeurs dans $\mathbb{N}$. Le rappel que nous venons de faire nous permet de dire que :

$$P\left(G_{S_n}(S_n) < \frac{\alpha}{2}\right) < \frac{\alpha}{2} \text{ et } P\left(G_{S_n}(S_n-1) \geqslant 1-\frac{\alpha}{2}\right) \leqslant 1-\left(1-\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\alpha}{2} \text{ car}$$

$\frac{\alpha}{2} \in ]0,1[$ et $1-\frac{\alpha}{2} \in ]0,1[$.

Or $\forall \omega \in \Omega$, $G_{S_n}(S_n(\omega)) = \sum_{k=0}^{S_n(\omega)} P(S_n = k) = \sum_{k=0}^{S_n(\omega)} \frac{(n\theta)^k}{k!} e^{-n\theta} = F(n\theta, S_n(\omega))$.

Donc $G_{S_n}(S_n) = F(n\theta, S_n)$.
Alors $P\left(F(n\theta, S_n) < \frac{\alpha}{2}\right) = P\left(G_{S_n}(S_n) < \frac{\alpha}{2}\right) < \frac{\alpha}{2}$. $P\left(F(n\theta, S_n) < \frac{\alpha}{2}\right) < \frac{\alpha}{2}$

ce qui donne également $\underline{\underline{P\left(F(n\theta, S_n) < \frac{\alpha}{2}\right) \leqslant \frac{\alpha}{2}}}$.

Le second point est un peu plus problématique ... Notons que si $\omega \in \Omega$ et si $S_n(\omega) = 0$ : $F(n\theta, S_n(\omega)-1)$ n'a pas de sens car $F(t,k)$ n'a été défini que pour $t \in ]0,+\infty[$ et $k$ dans $\mathbb{N}$.
Pour obtenir le résultat demandé <u>nous nous autoriserons à poser</u>

$\underline{\underline{\forall t \in ]0,+\infty[,\ F(t,-1) = 0\ !}}$

Soit $\omega \in \Omega$. <u>1er cas</u>.- Supposons que $S_n(\omega) \geqslant 1$.

$$G_{S_n}(S_n(\omega)-1) = \sum_{\ell=0}^{S_n(\omega)-1} P(S_n=\ell) = \sum_{\ell=0}^{S_n(\omega)-1} \frac{(n\theta)^\ell}{\ell!} e^{-n\theta} = F(n\theta, S_n(\omega)-1).$$

2ème cas.. $S_n(\omega)=0$.

$$G_{S_n}(S_n(\omega)-1) = G_{S_n}(-1) \overset{\substack{S_n \text{ prend ses valeurs dans } \mathbb{N}\\ \downarrow}}{=} 0 \underset{\substack{\uparrow\\ \text{avec la convention proposée.}}}{=} F(n\theta,-1) = F(n\theta, S_n(\omega)-1).$$

Donc $G_{S_n}(S_n-1) = F(n\theta, S_n-1)$.

Alors $P(F(n\theta, S_n-1) \geq 1-\frac{\alpha}{2}) = P(G_{S_n}(S_n-1) \geq 1-\frac{\alpha}{2}) \leq \frac{\alpha}{2}$.

$P\left(F(n\theta, S_n-1) \geq 1-\frac{\alpha}{2}\right) \leq \frac{\alpha}{2}$ ... avec la convention proposée.

Remarque.. Retenons que le résultat proposé peut s'énoncer sans ambiguïté de la manière suivante. Soit $G_{S_n}$ la fonction de répartition de $S_n$.

$P(G_{S_n}(S_n) < \frac{\alpha}{2}) \leq \frac{\alpha}{2}$ et $P(G_{S_n}(S_n-1) \geq 1-\frac{\alpha}{2}) \leq \frac{\alpha}{2}$ ou

$P(G_{S_n} \circ S_n < \frac{\alpha}{2}) \leq \frac{\alpha}{2}$ et $P(G_{S_n} \circ (S_n-1) \geq 1-\frac{\alpha}{2}) \leq \frac{\alpha}{2}$.

c) Rappel. Soit $k \in \mathbb{N}$. Soit $\beta \in ]0,1[$. $t \mapsto F(t,k)$ est strictement décroissante sur $]0,+\infty[$ et $\exists !\, \Pi(\beta,k) \in ]0,+\infty[$, $F(\Pi(\beta,k),k) = \beta$.

Alors $\forall t \in ]0,+\infty[$, $t < \Pi(\beta,k) \Leftrightarrow F(t,k) > F(\Pi(\beta,k),k) = \beta$ et

$\forall t \in ]0,+\infty[$, $t > \Pi(\beta,k) \Leftrightarrow F(t,k) < F(\Pi(\beta,k),k) = \beta$.

Il convient de montrer que :

1) $\forall \omega \in \Omega$, $I(X_1(\omega), X_2(\omega), \dots, X_n(\omega)) \leq J(X_1(\omega), X_2(\omega), \dots, X_n(\omega))$.

2) $P(\theta \notin [I(X_1, X_2, \dots, X_n), J(X_1, X_2, \dots, X_n)]) \leq \alpha$. Ou que

$P(\theta < I(X_1, X_2, \dots, X_n)) + P(\theta > J(X_1, X_2, \dots, X_n)) \leq \alpha$.

1°/ Soit $\omega \in \Omega$.

* Supposons $S_n(\omega) = 0$. Alors $J(X_1(\omega), X_2(\omega), \ldots, X_n(\omega)) = \frac{1}{n}\Pi(\frac{\alpha}{2}, S_n(\omega)) > 0$

et $I(X_1(\omega), X_2(\omega), \ldots, X_n(\omega)) = 0$.

Ainsi $I(X_1(\omega), X_2(\omega), \ldots, X_n(\omega)) \leq J(X_1(\omega), X_2(\omega), \ldots, X_n(\omega))$.

* Supposons $S_n(\omega) \in \mathbb{N}^*$.

$\alpha \in ]0,1[$

$F(\Pi(\frac{\alpha}{2}, S_n(\omega)), S_n(\omega)) = \frac{\alpha}{2} < 1 - \frac{\alpha}{2} = F(\Pi(1-\frac{\alpha}{2}, S_n(\omega)-1), S_n(\omega)-1)$.

par définition de $\Pi(\frac{\alpha}{2}, S_n(\omega))$ — Par définition de $\Pi(1-\frac{\alpha}{2}, S_n(\omega)-1)$

Or $F(\Pi(1-\frac{\alpha}{2}, S_n(\omega)-1), S_n(\omega)-1) < F(\Pi(1-\frac{\alpha}{2}, S_n(\omega)-1), S_n(\omega))$

résulte de la définition de F

Donc $F(\Pi(\frac{\alpha}{2}, S_n(\omega)), S_n(\omega)) < F(\Pi(1-\frac{\alpha}{2}, S_n(\omega)-1), S_n(\omega))$

La décroissance stricte obtenue en 11.b. donne alors : $\Pi(\frac{\alpha}{2}, S_n(\omega)) > \Pi(1-\frac{\alpha}{2}, S_n(\omega)-1)$.

En multipliant par $\frac{1}{n}$ il vient $J(X_1(\omega), X_2(\omega), \ldots, X_n(\omega)) > I(X_1(\omega), X_2(\omega), \ldots, X_n(\omega))$.

Finalement pour tout $\omega$ dans $\Omega$, $I(X_1(\omega), X_2(\omega), \ldots, X_n(\omega)) \leq J(X_1(\omega), X_2(\omega), \ldots, X_n(\omega))$.

Donc $\underline{\underline{I(X_1, X_2, \ldots, X_n) \leq J(X_1, X_2, \ldots, X_n)}}$.

2°/ Notons que $P(\theta \notin [I(X_1, X_2, \ldots, X_n), J(X_1, X_2, \ldots, X_n)]) \leq \alpha$ ou que :

$P(\theta < I(X_1, X_2, \ldots, X_n)) + P(\theta > J(X_1, X_2, \ldots, X_n)) \leq \alpha$

En fait nous allons montrer que :

$\rightarrow$ $P(\theta < I(X_1, X_2, \ldots, X_n)) \leq \frac{\alpha}{2}$

et $\rightarrow$ $P(\theta > J(X_1, X_2, \ldots, X_n)) \leq \frac{\alpha}{2}$.

Commençons par le second point.

$P(\theta > J(X_1, X_2, \dots, X_n)) = P(\theta > \frac{1}{n}\pi(\frac{\alpha}{2}, S_n)) = P(n\theta > \pi(\frac{\alpha}{2}, S_n))$.

$P(\theta > J(X_1, X_2, \dots, X_n)) = P(\{\omega \in \Omega \mid n\theta > \pi(\frac{\alpha}{2}, S_n(\omega))\}) \underset{\uparrow}{=} P(\{\omega \in \Omega \mid F(n\theta, S_n(\omega)) < \frac{\alpha}{2}\})$

rappel initial ($n\theta > 0$, $S_n(\omega) \in \mathbb{N}$ et $\frac{\alpha}{2} \in ]0,1[$)

$P(\theta > J(X_1, X_2, \dots, X_n)) = P(F(n\theta, S_n) < \frac{\alpha}{2}) \leq \frac{\alpha}{2}$ d'après $\beta$

$P(\theta > J(X_1, X_2, \dots, X_n)) \leq \frac{\alpha}{2}$.

Pour alléger l'écriture posons $I_n = I(X_1, X_2, \dots, X_n)$.

$(\{S_n = 0\}, \{S_n \geq 1\})$ est un système complet d'événements.

Alors $P(\theta < I(X_1, X_2, \dots, X_n)) = P(\theta < I_n) = P(\{\theta < I_n\} \cap \{S_n = 0\}) + P(\{\theta < I_n\} \cap \{S_n \geq 1\})$

Or $P(\{\theta < I_n\} \cap \{S_n = 0\}) = P(\{\theta < 0\} \cap \{S_n = 0\}) = 0$ car $\theta > 0$.

donc $P(\theta < I_n) = P(\{S_n \geq 1\} \cap \{\theta < \frac{1}{n}\pi(1 - \frac{\alpha}{2}, S_n - 1)\})$

$P(\theta < I_n) = P(\{\omega \in \Omega \mid S_n(\omega) \geq 1$ et $n\theta < \pi(1 - \frac{\alpha}{2}, S_n(\omega) - 1)\})$

$P(\theta < I_n) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{rappel}}}{=} P(\{\omega \in \Omega \mid S_n(\omega) \geq 1$ et $F(n\theta, S_n(\omega) - 1) > 1 - \frac{\alpha}{2}\})$

$P(\theta < I_n) = P(\{\omega \in \Omega \mid S_n(\omega) \geq 1$ et $F_{S_n}(S_n(\omega) - 1) > 1 - \frac{\alpha}{2}\})$

Or $\{\omega \in \Omega \mid S_n(\omega) \geq 1$ et $F_{S_n}(S_n(\omega) - 1) > 1 - \frac{\alpha}{2}\} \subset \{\omega \in \Omega \mid F_{S_n}(S_n(\omega) - 1) > 1 - \frac{\alpha}{2}\}$

mieux $\{\omega \in \Omega \mid S_n(\omega) \geq 1$ et $F_{S_n}(S_n(\omega) - 1) > 1 - \frac{\alpha}{2}\} \subset \{\omega \in \Omega \mid F_{S_n}(S_n(\omega) - 1) \geq 1 - \frac{\alpha}{2}\}$.

Alors $P(\theta < I_n) \leq P(\{\omega \in \Omega \mid F_{S_n}(S_n(\omega) - 1) \geq 1 - \frac{\alpha}{2}\}) \leq \frac{\alpha}{2}$

↑ d'après Q 13 b)

Ainsi $P(\theta < I_n) \leq \frac{\alpha}{2}$. $P(\theta < I(X_1, X_2, \dots, X_n)) \leq \frac{\alpha}{2}$.

ceci achève de montrer que $P(\theta \notin [I(X_1, X_2, \dots, X_n), J(X_1, X_2, \dots, X_n)]) \leq \alpha$.

$I(X_1, X_2, \dots, X_n)$ et $J(X_1, X_2, \dots, X_n)$ sont les bornes d'un intervalle de confiance de risque inférieur ou égal à $\alpha$ pour le paramètre inconnu $\theta$.

## Partie III Lois de Poisson mélangées

**Q14** Soit $n\in\mathbb{N}$. $t\mapsto t^n e^{-t} f(t)$ est continue sur $]0,+\infty[$.

* $\forall t\in ]0,1]$, $0\leq t^n e^{-t} f(t)\leq f(t)$ et $\int_0^1 f(t)\,dt$ converge.

les règles de comparaison sur les intégrales impropres de fonctions positives montrent que $\int_0^1 t^n e^{-t} f(t)\,dt$ converge.

* $\lim\limits_{t\to+\infty}(t^n e^{-t})=0$ par croissance comparée. Alors :

  - $t^n e^{-t} f(t) \underset{t\to+\infty}{=} o(f(t))$ — facultatif avec le programme 2018 !
  - $\forall t\in [1,+\infty[$, $t^n e^{-t} f(t)\geq 0$ et $f(t)\geq 0$ — essentiel !
  - $\int_1^{+\infty} f(t)\,dt$ converge.

les règles de comparaison sur les intégrales impropres de fonctions positives montrent que $\int_1^{+\infty} t^n e^{-t} f(t)\,dt$ converge.

Alors $\int_0^{+\infty} t^n e^{-t} f(t)\,dt$ converge et ceci pour tout $n$ dans $\mathbb{N}$.

---

**Q15** a) Soit $n\in\mathbb{N}$. Rappelons que nous avons montré dans Q11 b) que $t\mapsto F(t,n)$ définit une bijection continue strictement décroissante de $]0,+\infty[$ sur $]0,1[$. Alors :

1) $\forall t\in ]0,+\infty[$, $0<F(t,n)<1$.

2) $\forall t\in ]0,A]$, $F(t,n)\geq F(A,n)=\sum\limits_{j=0}^{n}\frac{A^j}{j!}e^{-A}=\sum\limits_{j=0}^{n}P(X_A=j)=P(X_A\leq n)$.

$$1-v_n=1-\sum_{k=0}^{n} z_k = 1-\sum_{k=0}^{n}\int_0^{+\infty}\frac{t^k}{k!}e^{-t}f(t)\,dt=\int_0^{+\infty}f(t)\,dt-\int_0^{+\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{t^k}{k!}e^{-t}f(t)\,dt=\int_0^{+\infty}f(t)\,dt-\int_0^{+\infty}F(t,n)f(t)\,dt$$

$$1-v_n=\int_0^{+\infty}(1-F(t,n))f(t)\,dt.$$

Or $\forall t\in ]0,+\infty[$, $1-F(t,n)\geq 0$ et $f(t)\geq 0$ donc $\forall t\in ]0,+\infty[$, $(1-F(t,n))f(t)\geq 0$.

Alors $1-V_n=\displaystyle\int_0^{+\infty}(1-F(t,n))f(t)\,dt\geqslant 0$ (... car $0\leqslant+\infty$). $\underline{\underline{1-V_n\geqslant 0}}$.

$$1-V_n=\int_0^{+\infty}(1-F(t,n))f(t)dt=\int_0^{A}(1-F(t,n))f(t)dt+\int_A^{+\infty}(1-F(t,n))f(t)dt.$$

$\forall t\in]0,A]$, $F(t,n)\geqslant F(A,n)$ donc $\forall t\in]0,A]$, $1-F(t,n)\leqslant 1-F(A,n)$ et $f(t)\geqslant 0$.

Alors $\forall t\in]0,A]$, $(1-F(t,n))f(t)\leqslant(1-F(A,n))f(t)=(1-P(X_A\leqslant n))f(t)=P(X_A>n)f(t)$.

Alors $\displaystyle\int_0^A(1-F(t,n))f(t)dt\leqslant\int_0^A P(X_A>n)f(t)dt$ car $0<A$ et toutes les intégrales convergent.

$f$ est positive sur $]0,+\infty[$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty}f(t)dt$ converge et vaut $1$.

Alors $\displaystyle\int_0^A f(t)dt\leqslant\int_0^{+\infty}f(t)dt=1$. De plus $P(X_A>n)\geqslant 0$.

donc $\displaystyle\int_0^A P(X_A>n)f(t)dt=P(X_A>n)\int_0^A f(t)dt\leqslant P(X_A>n)$.

Ainsi $\underline{\displaystyle\int_0^A(1-F(t,n))f(t)dt\leqslant P(X_A>n)}$.

$\forall t\in[A,+\infty[$, $1-F(t,n)\leqslant 1$ et $f(t)\geqslant 0$. $\forall t\in[A,+\infty[$, $(1-F(t,n))f(t)\leqslant f(t)$.

$F(t,n)\in]0,1[$

Alors $\underline{\displaystyle\int_A^{+\infty}(1-F(t,n))f(t)dt\leqslant\int_A^{+\infty}f(t)dt}$ car toutes ces intégrales convergent et $A\leqslant+\infty$.

donc $1-V_n=\displaystyle\int_0^A(1-F(t,n))f(t)dt+\int_A^{+\infty}(1-F(t,n))f(t)dt\leqslant P(X_A>n)+\int_A^{+\infty}f(t)dt$

$$\underline{\underline{1-V_n\leqslant P(X_A>n)+\int_A^{+\infty}f(t)dt.}}$$

$$\underline{\underline{\forall n\in\mathbb{N},\quad 0\leqslant 1-V_n\leqslant P(X_A>n)+\int_A^{+\infty}f(t)dt.}}$$

<u>b)</u> Montrons en utilisant la définition que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}(1-V_n)=0$.

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Montrons que l'on peut trouver $p_\varepsilon$ dans $\mathbb{N}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant p_\varepsilon \Rightarrow |1-v_n| < \varepsilon$.

$\lim\limits_{x \mapsto +\infty} \int_x^{+\infty} f(t)\,dt = 0$ "comme reste d'une intégrale convergente".

Alors $\exists B \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in ]0,+\infty[, x > B \Rightarrow \int_x^{+\infty} f(t)\,dt = \left|\int_x^{+\infty} f(t)\,dt\right| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Choisissons $A$ dans $]B,+\infty[$. $A \in \mathbb{R}_+^*$ et $\int_A^{+\infty} f(t)\,dt < \frac{\varepsilon}{2}$.

Reprenons une variable aléatoire $X_A$ suivant la loi de Poisson de paramètre $A$ et notons $F_{X_A}$ sa fonction de répartition.

$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant 1-v_n \leqslant P(X_A > n) + \int_A^{+\infty} f(t)\,dt < P(X_A > n) + \frac{\varepsilon}{2} = 1 - P(X_A \leqslant n) + \frac{\varepsilon}{2} = 1 - F_{X_A}(n) + \frac{\varepsilon}{2}$.

$\lim\limits_{x \mapsto +\infty} F_{X_A}(x) = 1$ donc $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} (1 - F_A(x)) = 0$ et $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} (1 - F_{X_A}(n)) = 0$.

Alors $\exists p_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant p_\varepsilon \Rightarrow 1 - F_{X_A}(n) = |1 - F_{X_A}(n)| < \frac{\varepsilon}{2}$.

$\forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant p_\varepsilon \Rightarrow 0 \leqslant 1-v_n < 1 - F_{X_A}(n) + \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

$\forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant p_\varepsilon \Rightarrow |1-v_n| < \varepsilon$.

Finalement $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists p_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant p_\varepsilon \Rightarrow |1-v_n| < \varepsilon$.

Ainsi $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} v_n = 1$. donc $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} \sum_{k=0}^{n} z_k = 1$.

Alors la série de terme général $z_n$ converge et $\sum_{n=0}^{+\infty} z_n = 1$.

---

Q16 a) Posons $b = \frac{1-p}{p}$. $b \in \mathbb{R}_+^*$ car $p \in ]0,1[$. Rappelons que $r$ est un réel strictement positif.

De plus $\forall t \in ]0,+\infty[, f(t) = \frac{1}{\Gamma(r)}\left(\frac{p}{1-p}\right)^r t^{r-1} e^{-\frac{pt}{1-p}} = \frac{t^{r-1} e^{-\frac{t}{b}}}{b^r \Gamma(r)}$ et $\forall t \in ]-\infty,0], f(t) = 0$

Alors $T$ suit la loi gamma de paramètres $b$ et $r$.

Donc $T$ suit la loi gamma de paramètres $\frac{1-p}{p}$ et $r$. $T \hookrightarrow \Gamma\left(\frac{1-p}{p}, r\right)$.

---

Ainsi $E(T)=\frac{1-p}{p}\times r$ et $V(T)=\left(\frac{1-p}{p}\right)^2 r$.

b) Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ qui suit la loi de Poisson mélangée associée à la densité $f$. $\forall n\in\mathbb{N}$, $P(X=n)=\int_0^{+\infty}\frac{t^n}{n!}e^{-t}f(t)dt$.

Soit $t\in]0,+\infty[$.

$$\frac{t^n}{n!}e^{-t}f(t)=\frac{t^n}{n!}e^{-t}\frac{1}{\Gamma(r)}\left(\frac{p}{1-p}\right)^r t^{r-1}e^{-\frac{pt}{1-p}}=\frac{1}{n!}\frac{1}{\Gamma(r)}\frac{p^r}{(1-p)^r}t^{n+r-1}\underbrace{e^{-t\left(1+\frac{p}{1-p}\right)}}_{=e^{-\frac{t}{1-p}}}.$$

$$\frac{t^n}{n!}e^{-t}f(t)=\frac{1}{n!}\frac{1}{\Gamma(r)}\frac{p^r}{(1-p)^r}\Gamma(n+r)(1-p)^{n+r}\frac{t^{n+r-1}e^{-\frac{t}{1-p}}}{(1-p)^{n+r}\Gamma(n+r)}.$$

donc $\forall t\in]0,+\infty[$, $\frac{t^n}{n!}e^{-t}f(t)=\frac{1}{n!}\frac{\Gamma(n+r)}{\Gamma(r)}p^r(1-p)^n\frac{t^{n+r-1}e^{-\frac{t}{1-p}}}{(1-p)^{n+r}\Gamma(n+r)}$.

Posons $\forall t\in\mathbb{R}$, $h(t)=\begin{cases}\dfrac{t^{n+r-1}e^{-\frac{t}{1-p}}}{(1-p)^{n+r-1}\Gamma(n+r)} & \text{si } t\in]0,+\infty[\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$

$n+r-1>0$ et $1-p>0$ car $n\in\mathbb{N}^*$, $r\in]0,+\infty[$ et $p\in]0,1[$.

$h$ est une densité d'une variable aléatoire qui suit la loi gamma de paramètres $1-p$ et $n+r-1$. Alors $\int_{-\infty}^{+\infty}h(t)dt=1$. Comme $h$ est nulle sur $]-\infty,0]$, $\int_0^{+\infty}h(t)dt=1$.

Or $\forall t\in]0,+\infty[$, $\frac{t^n}{n!}e^{-t}f(t)=\frac{1}{n!}\frac{\Gamma(n+r)}{\Gamma(r)}p^r(1-p)^n h(t)$.

donc $P(X=n)=\int_0^{+\infty}\frac{t^n}{n!}e^{-t}f(t)dt=\frac{1}{n!}\frac{\Gamma(n+r)}{\Gamma(r)}p^r(1-p)^n\int_0^{+\infty}h(t)dt$.

donc $P(X=n)=\frac{1}{n!}\frac{\Gamma(n+r)}{\Gamma(r)}p^r(1-p)^n$

Montrons par récurrence que $\forall k\in\mathbb{N}$, $\frac{\Gamma(k+r)}{\Gamma(r)}=r^{\langle k\rangle}$.

- La propriété est vraie pour $k=0$ car $\frac{\Gamma(0+r)}{\Gamma(r)}=1=r^{\langle 0\rangle}$.

• supposons la propriété vraie pour $k$ dans $\mathbb{N}$ et montrons la pour $k+1$.

$$\frac{\Gamma(k+1+r)}{\Gamma(r)} \underset{\uparrow}{=} \frac{(k+r)\,\Gamma(k+r)}{\Gamma(r)} \underset{\uparrow}{=} (k+r)\, r^{\langle k\rangle} = r^{\langle k+1\rangle}$$ . ceci achève la récurrence.

"$\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$" hypothèse de récurrence Q2 a)

$$\forall k \in \mathbb{N},\quad \frac{\Gamma(k+r)}{\Gamma(r)} = r^{\langle k\rangle}.$$

Alors $P(X=n) = \dfrac{1}{n!}\,\dfrac{\Gamma(n+r)}{\Gamma(r)}\,p^r(1-p)^n = \dfrac{r^{\langle n\rangle}}{n!}\,p^r(1-p)^n$ et ceci pour tout $n$ dans $\mathbb{N}$.

Alors $X$ suit la loi binomiale négative de paramètres $r$ et $p$.

$\mathbb{P}_f$ est la loi binomiale négative $BN(r,p)$.

(Q17) a) Soient $U$ et $V$ deux variables aléatoires indépendantes telles que $U \hookrightarrow BN(r,p)$ et $V \hookrightarrow BN(s-r,p)$ $(r>0$ et $s-r>0\ldots)$.

D'après Q6 $U+V \hookrightarrow BN(r+(s-r),p)$. $U+V \hookrightarrow BN(s,p)$.

$\forall k\in\mathbb{N}$, $\{U+V\leq k\} \subset \{U\leq k\}$ car $V$ prend ses valeurs dans $\mathbb{N}$.

Alors $\forall k\in\mathbb{N}$, $P(U+V\leq k)\leq P(U\leq k)$. Or $U+V$ a même loi que $Z$ et $U$ a même loi que $Y$. Donc $\forall k\in\mathbb{N}$, $P(Z\leq k)\leq P(Y\leq k)$. $\forall k\in\mathbb{N}$, $P(Y\leq k)\geq P(Z\leq k)$

Comme $Z$ et $Y$ prennent leurs valeurs dans $\mathbb{N}$, Q9 permet alors de dire que

$Y$ est stochastiquement inférieure à $Z$.

b) Nous allons procéder en deux étapes. Dans un premier temps nous montrerons que $Z$ est stochastiquement inférieure à $W$ en utilisant Q16 puis nous montrerons que $Y$ est stochastiquement inférieure à $W$ en utilisant Q17 a)

Etape 1.. Montrons que $Z$ est stochastiquement inférieure à $W$.

$Z$ et $W$ sont des variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$ donc pour montrer que $Z$ est stochastiquement inférieure à $W$ il suffit de montrer que :

$\forall k \in \mathbb{N}$, $P(Z \leq k) \leq P(W \leq k)$ (comme nous l'avons vu dans Q 9).

Posons $\forall t \in \mathbb{R}$, $g(t) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(s)} \left(\frac{p}{1-p}\right)^s t^{s-1} e^{-\frac{pt}{1-p}} & \text{si } t \in ]0,+\infty[ \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ et

$\forall t \in \mathbb{R}$, $h(t) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(s)} \left(\frac{q}{1-q}\right)^s t^{s-1} e^{-\frac{qt}{1-q}} & \text{si } t \in ]0,+\infty[ \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

$Z \hookrightarrow BN(s,p)$ donc $Z \Leftrightarrow \mathcal{G}_g$. $W \hookrightarrow BN(s,q)$ donc $W \Leftrightarrow \mathcal{G}_h$.

Soit $k \in \mathbb{N}$. $P(Z \leq k) = \sum_{j=0}^{k} P(Z=j) = \sum_{j=0}^{k} \int_0^{+\infty} \frac{t^j}{j!} e^{-t} g(t)\,dt = \int_0^{+\infty} \left(\sum_{j=0}^{k} \frac{t^j}{j!} e^{-t}\right) g(t)\,dt.$

$P(Z \leq k) = \int_0^{+\infty} F(k,t)\, g(t)\,dt$. De même $P(W \leq k) = \int_0^{+\infty} F(k,t)\, h(t)\,dt$.

Ainsi $P(Z \leq k) = \int_0^{+\infty} F(k,t) \frac{1}{\Gamma(s)} \left(\frac{p}{1-p}\right)^s t^{s-1} e^{-\frac{pt}{1-p}}\,dt$ et

$$P(W \leq k) = \int_0^{+\infty} F(k,t) \frac{1}{\Gamma(s)} \left(\frac{q}{1-q}\right)^s t^{s-1} e^{-\frac{qt}{1-q}}\,dt.$$

Pour comparer $P(Z \leq k)$ et $P(W \leq k)$ nous allons "transformer $e^{-\frac{pt}{1-p}}$ en $e^{-\frac{t}{1-q}}$" en utilisant le changement de variable $u = \frac{1-q}{q} \frac{p}{1-p} t$.

$\frac{1-q}{q} \frac{p}{1-p} > 0$ car $p \in ]0,1[$ et $q \in ]0,1[$. Ainsi $t \mapsto \frac{1-q}{q} \frac{p}{1-p} t$ définit clairement une bijection strictement croissante de $]0,+\infty[$ sur $]0,+\infty[$ de classe $C^1$ sur $]0,+\infty[$. Ceci autorise le changement de variable $u = \frac{1-q}{q} \frac{p}{1-p} t$ dans l'intégrale convergente $\int_0^{+\infty} F(k,t)\, g(t)\,dt$.

$$\int_0^{+\infty} F(k,t)\, g(t)\,dt = \int_0^{+\infty} F\left(k, \frac{q}{1-q} \frac{1-p}{p} u\right) g\left(\frac{q}{1-q} \frac{1-p}{p} u\right) \frac{q}{1-q} \frac{1-p}{p}\,du.$$

Notons que la convergence de la première intégrale donne la convergence de la seconde

Soit $u \in ]0,+\infty[$. Posons $\alpha(u) = g\left(\frac{q}{1-q}\,\frac{1-p}{p}\,u\right)\frac{q}{1-q}\,\frac{1-p}{p}$.

$$\alpha(u) = \frac{1}{\Gamma(b)}\left(\frac{p}{1-p}\right)^{b}\left(\frac{q}{1-q}\,\frac{1-p}{p}\,u\right)^{b-1} e^{-\frac{p}{1-p}\,\frac{q}{1-q}\,\frac{1-p}{p}\,u}\,\frac{q}{1-q}\,\frac{1-p}{p}.$$

$$\alpha(u) = \frac{1}{\Gamma(b)}\left(\frac{p}{1-p}\right)^{b}\left(\frac{q}{1-q}\right)^{b-1}\left(\frac{1-p}{p}\right)^{b-1}u^{b-1} e^{-\frac{q}{1-q}u}\,\frac{q}{1-q}\,\frac{1-p}{p}.$$

$$\alpha(u) = \frac{1}{\Gamma(b)}\left(\frac{p}{1-p}\right)^{b}\left(\frac{q}{1-q}\right)^{b}\left(\frac{1-p}{p}\right)^{b}u^{b-1} e^{-\frac{qu}{1-q}} = \frac{1}{\Gamma(b)}\left(\frac{q}{1-q}\right)^{b}u^{b-1}e^{-\frac{qu}{1-q}} = h(u).$$

Ainsi $\int_0^{+\infty} F(k,t)g(t)\,dt = \int_0^{+\infty} F\left(k,\frac{q}{1-q}\,\frac{1-p}{p}\,u\right) g\left(\frac{q}{1-q}\,\frac{1-p}{p}\,u\right)\frac{q}{1-q}\,\frac{1-p}{p}\,du$ donc :

$$\int_0^{+\infty} F(k,t)g(t)\,dt = \int_0^{+\infty} F\left(k,\frac{q}{1-q}\,\frac{1-p}{p}\,u\right) h(u)\,du.$$

---

Montrons alors que $\int_0^{+\infty} F\left(k,\frac{q}{1-q}\,\frac{1-p}{p}\,u\right) h(u)\,du \leq \int_0^{+\infty} F(k,u)\,h(u)\,du$.

Soit $u \in ]0,+\infty[$. $p<q$ ; $p-pq < q-pq$ ; $\underset{\uparrow_{p\in]0,1[\text{ et }q\in]0,1[}}{0} < p(1-q) = p-pq < q-pq = q(1-p)$.

Alors $\frac{q(1-p)}{p(1-q)} > 1$ et $u>0$ donc $\frac{q}{1-q}\,\frac{1-p}{p}\,u = \frac{q(1-p)}{p(1-q)}\,u > u > 0$

Or nous avons vu que $z \mapsto F(k,z)$ est (strictement) décroissante sur $]0,+\infty[$.

Alors $F\left(k,\frac{q}{1-q}\,\frac{1-p}{p}\,u\right) \leq F(k,u)$. De plus $h(u) \geq 0$. Ainsi

$F\left(k,\frac{q}{1-q}\,\frac{1-p}{p}\,u\right) h(u) \leq F(k,u)\,h(u)$ et ceci pour tout $u$ dans $]0,+\infty[$.

Alors $\int_0^{+\infty} F\left(k,\frac{q}{1-q}\,\frac{1-p}{p}\,u\right) h(u)\,du \leq \int_0^{+\infty} F(k,u)\,h(u)\,du$ car $0 \leq +\infty$ (!) et

les deux intégrales sont convergentes. Finalement

$$P(Z\leq k) = \int_0^{+\infty} F(k,t)g(t)\,dt = \int_0^{+\infty} F\left(k,\frac{q}{1-q}\,\frac{p}{1-p}\,u\right)du \leq \int_0^{+\infty} F(k,u)\,h(u)\,du = P(W\leq k).$$

$\forall k \in \mathbb{N}$, $P(Z \leq k) \leq P(W \leq k)$. Comme Z et W sont des variables aléatoires discrètes, Q9 permet de dire que Z est stochastiquement inférieure à W.

Etape 2 Montrons que Y est stochastiquement inférieure à W.

Nous venons de voir que Z est stochastiquement inférieure à W donc

$\forall x \in \mathbb{R}$, $P(Z \geqslant x) \leq P(W \geqslant x)$.

Dans Q17 a nous avons vu que Y est stochastiquement inférieure à Z donc

$\forall x \in \mathbb{R}$, $P(Y \geqslant x) \leq P(Z \geqslant x)$.

Alors $\forall x \in \mathbb{R}$, $P(Y \geqslant x) \leq P(Z \geqslant x) \leq P(W \geqslant x)$.

Ainsi Y est stochastiquement inférieure à W.