HEC 2008 MB

D.M. 10

Pour Lundi 14 mars 2011

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document : **l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.**
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Toutes les variables aléatoires qui interviennent dans ce problème sont supposées définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Sous réserve d'existence, on note $E(X)$ et $V(X)$ respectivement, l'espérance et la variance d'une variable aléatoire réelle X quelconque. Pour toute variable aléatoire réelle X admettant une densité sur $\mathbb{R}$, notée f_X, on note $\mathcal{D}_X$ l'ensemble des réels s pour lesquels la variable aléatoire e^{sX} admet une espérance, et on note Φ_X la fonction définie sur $\mathcal{D}_X$ par : $\Phi_X(s) = E(e^{sX})$.

On admet les résultats suivants :

- si deux variables aléatoires X et Y sont telles que Φ_X et Φ_Y coïncident sur un intervalle ouvert non vide, alors X et Y ont la même loi ;
- si n est un entier naturel non nul, et $X_1, X_2, \ldots, X_n$ des variables aléatoires réelles quelconques, mutuellement indépendantes, alors, pour tout entier p de $[\![1, n-1]\!]$ et pour toutes fonctions réelles continues φ_1 et φ_2, les variables aléatoires $\varphi_1(X_1, \ldots, X_p)$ et $\varphi_2(X_{p+1}, \ldots, X_n)$ sont indépendantes ;
- si X et Y sont des variables aléatoires indépendantes admettant une espérance, alors XY admet une espérance, et $E(XY) = E(X)E(Y)$.

La fonction exponentielle est également notée exp. On rappelle que : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(\frac{-x^2}{2}\right) dx = \sqrt{2\pi}$.

Dans tout le problème, U désigne une variable aléatoire qui suit la loi normale centrée réduite.

Préliminaire

On rappelle que, pour tout s de $\mathcal{D}_X$, on a : $\displaystyle\Phi_X(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(sx) f_X(x) dx$.

1. Soit a un réel non nul et b un réel quelconque.

a) Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-ax^2)dx$ est convergente si et seulement si $a > 0$, et vaut alors $\sqrt{\dfrac{\pi}{a}}$.

b) En déduire que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-ax^2+bx)dx$ est convergente si et seulement si $a > 0$, puis montrer que dans ces conditions, on a : $\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-ax^2+bx)dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \exp\left(\frac{b^2}{4a}\right)$.

2. a) Déterminer $\mathcal{D}_U$; pour tout s de $\mathcal{D}_U$, calculer $\Phi_U(s)$.

b) On pose : $Z = U^2$. Établir que : $\mathcal{D}_Z =]-\infty, \frac{1}{2}[$; montrer, à l'aide du théorème de transfert, que pour tout réel s de $\mathcal{D}_Z$, on a : $\Phi_Z(s) = (1-2s)^{-1/2}$.

3. Soit X une variable aléatoire réelle à densité, et soit μ et β deux réels quelconques.

a) Montrer qu'un réel s appartient à $\mathcal{D}_{\mu X+\beta}$ si et seulement si μs appartient à $\mathcal{D}_X$, et que dans ce cas, on a : $\Phi_{\mu X+\beta}(s) = \exp(\beta s)\Phi_X(\mu s)$.

b) On suppose que X suit une loi γ de paramètre ν, où ν est un réel strictement positif.
Montrer que : $\mathcal{D}_X =]-\infty, 1[$; pour tout s de $\mathcal{D}_X$, établir la formule : $\Phi_X(s) = (1-s)^{-\nu}$. De même, déterminer $\mathcal{D}_{2X}$; pour tout s de $\mathcal{D}_{2X}$, calculer $\Phi_{2X}(s)$.

Partie I. Loi du χ^2 centré

Soit r un entier supérieur ou égal à 1. On considère une variable aléatoire X_r suivant la loi Γ de paramètres $\left(2, \frac{r}{2}\right)$, c'est-à-dire que X_r possède une densité f_{X_r} donnée par :

$$f_{X_r}(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2^{\frac{r}{2}} \times \Gamma\left(\frac{r}{2}\right)} \times x^{\frac{r}{2}-1} \times \exp\left(-\dfrac{x}{2}\right) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}$$

On dit que X_r suit une loi du χ^2 («chi deux») centré à r degrés de liberté, et on note : $X_r \hookrightarrow \chi^2(r)$.

1. Étudier les variations de f_{X_4} et tracer sa courbe représentative dans un repère orthogonal du plan.

2. a) Montrer que la variable aléatoire $\frac{X_r}{2}$ suit une loi γ de paramètre $\frac{r}{2}$. En déduire $E(X_r)$ et $V(X_r)$.

b) Déterminer $\mathcal{D}_{X_r}$; pour tout s de $\mathcal{D}_{X_r}$, calculer $\Phi_{X_r}(s)$.

3. Soit n un entier de $\mathbb{N}^*$. On considère n variables aléatoires indépendantes $U_1, U_2, \ldots, U_n$ de même loi que U. Pour tout i de $[\![1, n]\!]$, on pose : $Z_i = U_i^2$.

a) Vérifier que X_1 et U^2 sont de même loi.

b) On pose : $W_n = \sum_{i=1}^{n} Z_i$. Quelle est la loi de probabilité de W_n ?

c) Déterminer $\mathcal{D}_{W_n}$, et pour tout s de $\mathcal{D}_{W_n}$, exprimer $\Phi_{W_n}(s)$ en fonction de s et de n. Établir une relation entre $\Phi_{W_n}(s)$ et $\Phi_{Z_1}(s), \Phi_{Z_2}(s), \ldots, \Phi_{Z_n}(s)$.

4. Soit T une variable aléatoire qui suit la loi normale centrée, de variance σ^2 inconnue, σ étant un réel strictement positif. Pour n entier supérieur ou égal à 2, on dispose d'un n-échantillon indépendant, identiquement distribué (i.i.d.), $T_1, T_2, \ldots, T_n$ de la loi de T. On considère la variable aléatoire S_n définie par : $S_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} T_i^2$.

a) Montrer que S_n est un estimateur sans biais et convergent du paramètre σ^2.

b) Soit α un réel vérifiant : $0 < \alpha < 1$, et soit k_α le réel strictement positif tel que : $P([W_n \geqslant k_\alpha]) = 1 - \alpha$.
Montrer que l'intervalle $\left]0, \frac{nS_n}{k_\alpha}\right]$ est un intervalle de confiance de σ^2 au risque α.

Partie II. Loi du χ^2 décentré

On considère une suite $(M_j)_{j\geqslant 1}$ de variables aléatoires définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, mutuellement indépendantes, telles que pour tout j de $\mathbb{N}^*$, M_j suive la loi normale d'espérance m_j ($m_j \in \mathbb{R}$) et de variance égale à 1.

Pour n entier de $\mathbb{N}^*$, on pose : $Y_n = \sum_{j=1}^{n} M_j^2$ et $\lambda_n = \sum_{j=1}^{n} m_j^2$.

On dit que Y_n suit une loi du χ^2 décentré à n degrés de liberté, de paramètre de décentrage λ_n, et on note : $Y_n \hookrightarrow \chi^2(n, \lambda_n)$.

1. Dans cette question *uniquement*, on suppose que l'entier n est égal à 1.

a) Montrer les deux égalités suivantes : $E(U^3) = 0$ et $E(U^4) = 3$.

b) En déduire, en fonction de λ_1, les valeurs respectives de $E(Y_1)$ et de $V(Y_1)$.

c) Montrer que : $\mathcal{D}_{Y_1} =]-\infty, \frac{1}{2}[$ et établir, pour tout réel s de $\mathcal{D}_{Y_1}$, la formule suivante :

$$\Phi_{Y_1}(s) = (1-2s)^{-1/2} \times \exp\left(\frac{s\lambda_1}{1-2s}\right)$$

2. Soit n un entier de $\mathbb{N}^*$.

a) Calculer $E(Y_n)$ et $V(Y_n)$ en fonction de n et λ_n.

b) On admet que l'on a : $\mathcal{D}_{Y_n} =]-\infty, \frac{1}{2}[$. Pour tout s de $\mathcal{D}_{Y_n}$, exprimer $\Phi_{Y_n}(s)$ en fonction de s, n et λ_n.

Partie III. Nombre aléatoire de degrés de liberté

Sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, on considère une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{R}$ admettant une espérance $E(X)$, et une variable aléatoire K à valeurs dans $\mathbb{N}$. On note N_K l'ensemble des entiers naturels k vérifiant $P([K=k]) > 0$, et on suppose que pour tout entier k de N_K, la variable aléatoire X admet une espérance pour la probabilité conditionnelle $P_{[K=k]}$, notée $E(X/K=k)$.

On admet alors l'égalité suivante : $(\star)$ $E(X) = \sum_{k\in N_K} E(X/K=k)P([K=k])$

Soit g l'application définie sur $\mathbb{N}$ par : $g(k) = \begin{cases} E(X/K=k) & \text{si } k \in N_K \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

1. *Vérification de la formule $(\star)$ sur un exemple.*

Soit $(J_i)_{i\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indépendantes et de même loi uniforme sur l'intervalle $[0,1]$. Pour tout k de $\mathbb{N}^*$, on pose : $X_k = \sup_{1\leqslant i\leqslant k}(J_i)$; autrement dit, pour tout ω de Ω, $X_k(\omega) = \max_{1\leqslant i\leqslant k} J_i(\omega)$. Soit K une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ qui suit la loi uniforme discrète sur $[\![1, n]\!]$ ($n \in \mathbb{N}^*$). On suppose que K est indépendante des variables aléatoires de la suite $(J_i)_{i\geqslant 1}$.

Pour tout ω de Ω, on pose : $X(\omega) = \max_{1\leqslant i\leqslant K(\omega)} J_i(\omega)$, et on admet que X est une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

a) Établir, pour tout entier k de $[\![1, n]\!]$ et pour tout réel x, la relation : $P_{[K=k]}([X \leqslant x]) = P([X_k \leqslant x])$.

b) Déterminer la fonction de répartition F_X de la variable aléatoire X.

c) En déduire que X est une variable aléatoire à densité, qui admet une espérance $E(X)$ que l'on exprimera en fonction de $\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{k+1}$.

d) Vérifier l'égalité $(\star)$: $E(X) = E(g(K))$.

2. Soit $(U_i)_{i\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes qui suivent la loi normale centrée réduite. Soit K une variable aléatoire indépendante des variables aléatoires de la suite $(U_i)_{i\geqslant 1}$, qui suit la loi de Poisson de paramètre $\frac{\lambda}{2}$ strictement positif.

Pour n entier de $\mathbb{N}^*$, on pose : $H_n = U_1^2 + U_2^2 + \cdots + U_{n+2K}^2$. On admet que H_n est une variable aléatoire à densité à valeurs positives, et que $\mathcal{D}_{H_n} =]-\infty, \frac{1}{2}[$.

Soit s un réel de $]-\infty, \frac{1}{2}[$.

a) Montrer que pour tout k de $\mathbb{N}$, la loi conditionnelle de H_n sachant $[K = k]$ est la loi de la variable aléatoire W_{n+2k} définie dans la question I.3.b.

b) En posant : $X = e^{sH_n}$, déterminer, pour tout entier k de $\mathbb{N}$, l'expression de $g(k)$ en fonction de k.

c) Établir la formule suivante :

$$E(g(K)) = (1-2s)^{-n/2} \times \exp\left(\frac{\lambda s}{1-2s}\right)$$

d) En utilisant l'égalité $(\star)$, admise au début de cette partie, avec $X = e^{sH_n}$, déterminer la loi de H_n.

e) À l'aide de la question III.2.a, montrer que pour tout entier n supérieur ou égal à 3, on a :

$$E\left(\frac{1}{H_n}\right) = E\left(\frac{1}{n-2+2K}\right)$$

Partie IV. Estimateur de James-Stein

Soit p un entier supérieur ou égal à 3. On suppose qu'un modèle aléatoire défini sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ comporte p paramètres réels inconnus $\theta_1, \ldots, \theta_p$ non tous nuls. Un échantillon d'observations statistiques permet d'exhiber des estimateurs $\widehat{\theta}_1, \ldots, \widehat{\theta}_p$ *sans biais* des paramètres $\theta_1, \ldots, \theta_p$ respectivement. On suppose que les variables aléatoires $\widehat{\theta}_1, \ldots, \widehat{\theta}_p$ sont indépendantes et suivent une loi normale de variance égale à 1.

On pose : $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_p)$, $\widehat{\theta} = (\widehat{\theta}_1, \ldots, \widehat{\theta}_p)$, $B_p = \sum_{j=1}^{p} \widehat{\theta}_j^{\,2}$ et $b_p = \sum_{j=1}^{p} \theta_j^{\,2}$.

On dit que *le vecteur aléatoire $\widehat{\theta}$ est un estimateur sans biais du paramètre vectoriel θ*, et $E(\widehat{\theta})$ est alors le vecteur θ.

On définit le *risque quadratique scalaire* d'un estimateur θ^* de θ, noté $R(\theta^*, \theta)$, par :

$$R(\theta^*, \theta) = E\Big(\sum_{j=1}^{p} (\theta_j^* - \theta_j)^2\Big)$$

Dans cette partie, on cherche un estimateur θ^* de θ, représenté par un vecteur aléatoire $(\theta_1^*, \ldots, \theta_p^*)$, dont le risque $R(\theta^*, \theta)$ est strictement inférieur à $R(\widehat{\theta}, \theta)$.

1. Justifier que la variable aléatoire B_p suit la loi $\chi^2(p, b_p)$, et qu'elle constitue un estimateur biaisé de b_p.

2. On pose : $\theta^* = \left(1 - \frac{c}{B_p}\right) \times \widehat{\theta}$, où c est un paramètre réel strictement positif. Soit K une variable aléatoire qui suit la loi de Poisson de paramètre $\frac{b_p}{2}$.

a) En admettant que l'on a : $E\Big(\frac{1}{B_p} \sum_{j=1}^{p} \theta_j \, \widehat{\theta}_j\Big) = E\left(\frac{2K}{p-2+2K}\right)$, établir l'égalité suivante :

$$R(\theta^*, \theta) - R(\widehat{\theta}, \theta) = (c^2 - 2c(p-2)) \times E\left(\frac{1}{p-2+2K}\right)$$

b) Montrer que l'inégalité : $R(\theta^*, \theta) < R(\widehat{\theta}, \theta)$, est vérifiée si et seulement si : $0 < c < 2(p-2)$.

Déterminer en fonction de p, la valeur de c pour laquelle $R(\theta^*, \theta) - R(\widehat{\theta}, \theta)$ est minimale.

Comment s'écrit alors l'estimateur θ^* ?

PRÉLIMINAIRE

(Q1) a) Soit $a \in \mathbb{R}$. Posons $\forall x \in \mathbb{R}$, $h_a(x) = e^{-ax^2}$. h_a est continue sur $\mathbb{R}$.

1er cas.. $a \leq 0$. $\forall x \in \mathbb{R}$, $h_a(x) = e^{-ax^2} \geq 1 = \frac{1}{x^0} \geq 0$

• $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^0}$ diverge car $0 \leq 1$.

Alors les règles de comparaison sur les intégrales généralisées de fonctions positives montrent que $\int_1^{+\infty} h_a(x)dx$ diverge. Alors $\int_{-\infty}^{+\infty} h_a(x)dx$ diverge.

2e cas.. $a > 0$. $\forall x \in \mathbb{R}$, $h_a(x) = e^{-ax^2} = e^{-\frac{x^2}{2\left(\sqrt{\frac{1}{2a}}\right)^2}}$. Posons $\sigma = \sqrt{\frac{1}{2a}}$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $h_a(x) = e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} = \sqrt{2\pi}\,\sigma \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-x^2/2\sigma^2} \right)$.

$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-x^2/2\sigma^2}$ est une densité d'une variable aléatoire à densité qui suit la loi normale de paramètres 0 et σ^2. Donc $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx$ converge et vaut 1.

Alors $\int_{-\infty}^{+\infty} h_a(x)dx$ converge et vaut $\sqrt{2\pi}\,\sigma$. Notons que $\sqrt{2\pi}\,\sigma = \sqrt{2\pi}\sqrt{\frac{1}{2a}} = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$.

Ainsi 1) $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2}dx$ converge si et seulement si $a > 0$.

2) Si $a > 0$: $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2}dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$.

b) Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Posons $\forall x \in \mathbb{R}$, $\ell_{a,b}(x) = e^{-ax^2+bx}$. $\ell_{a,b}$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Soit $A \in \mathbb{R}$. $\int_0^A \ell_{a,b}(x)dx = \int_0^A e^{-a(x^2 - \frac{b}{a}x)}dx = \int_0^A e^{-a\left[\left(x-\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2}\right]}dx$

$x \mapsto x - \frac{b}{2a}$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ ce qui autorise le changement de variable $u = x - \frac{b}{2a}$ dans ce qui suit.

$$\int_0^A \ell_{a,b}(x)\,dx = \int_{-\frac{b}{2a}}^{A-\frac{b}{2a}} e^{-a\left(u^2-\frac{b^2}{4a^2}\right)}\,du = e^{\frac{b^2}{4a}}\int_{-\frac{b}{2a}}^{A-b/2a} e^{-au^2}\,du.$$

On a également : $\displaystyle\int_A^0 \ell_{a,b}(x)\,dx = e^{\frac{b^2}{4a}}\int_{A-b/2a}^{-b/2a} e^{-au^2}\,du.$

$\lim\limits_{A\to+\infty}\left(A-\frac{b}{2a}\right)=+\infty$. Ainsi $\displaystyle\int_0^{+\infty}\ell_{a,b}(x)\,dx$ est de même nature que $\displaystyle\int_{-b/2a}^{+\infty} e^{-au^2}\,du$ ou que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-au^2}\,du$. Donc si $a\leq 0$: $\displaystyle\int_0^{+\infty}\ell_{a,b}(x)\,dx$ diverge. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\ell_{a,b}(x)$ diverge également.

Supposons $a>0$. Alors $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-au^2}\,du$ converge. $\displaystyle\int_{-b/2a}^{+\infty} e^{-au^2}\,du$ et $\displaystyle\int_{-\infty}^{-b/2a} e^{-au^2}\,du$ converge.

Donc $\displaystyle\lim_{A\to+\infty}\int_0^A \ell_{a,b}(x)\,dx = e^{b^2/4a}\int_{-b/2a}^{+\infty} e^{-au^2}\,du$ et

$$\lim_{A\to-\infty}\int_A^0 \ell_{a,b}(x)\,dx = e^{b^2/4a}\int_{-\infty}^{-b/2a} e^{-au^2}\,du.$$

Ainsi $\displaystyle\int_0^{+\infty}\ell_{a,b}(x)\,dx$ et $\displaystyle\int_{-\infty}^0 \ell_{a,b}(x)\,dx$ convergent. Finalement $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\ell_{a,b}(x)\,dx$ converge.

De plus $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\ell_{a,b}(x)\,dx = \int_{-\infty}^0 \ell_{a,b}(x)\,dx + \int_0^{+\infty}\ell_{a,b}(x)\,dx = e^{b^2/4a}\int_{-\infty}^{-b/2a} e^{-au^2}\,du + e^{b^2/4a}\int_{-b/2a}^{+\infty} e^{-au^2}\,du$

Alors $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\ell_{a,b}(x)\,dx = e^{b^2/4a}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-au^2}\,du = e^{b^2/4a}\sqrt{\frac{\pi}{a}}.$

1) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2+bx}\,dx$ converge si et seulement si $a>0$

2) Si $a>0$: $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2+bx}\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\; e^{\frac{b^2}{4a}}.$

Q2 a) Soit $s \in \mathbb{R}$

- U prend ses valeurs dans $\mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$.
- $f_U : t \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}$ est une densité de U.
- $t \mapsto e^{st}$ est continue sur $]-\infty, +\infty[$

Le théorème de transfert montre que e^{sU} possède une espérance si et seulement si $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{st} f_U(t)\,dt$ est absolument convergente ou si et seulement si $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{st} f_U(t)\,dt$ converge car $\forall t \in \mathbb{R}$, $e^{st} f_U(t) \geq 0$.

$\forall t \in \mathbb{R}$, $e^{st} f_U(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}+st}$.

$\frac{1}{2} > 0$ donc $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2/2+st}\,dt$ converge et vaut $\sqrt{\frac{\pi}{1/2}}\, e^{\frac{s^2}{4 \times \frac{1}{2}}}$ ou $\sqrt{2\pi}\, e^{s^2/2}$

donc $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{st} f_U(t)\,dt$ converge et vaut $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \times \sqrt{2\pi}\, e^{s^2/2}$ ou $e^{s^2/2}$.

Ceci achève de montrer que $E(e^{sU})$ existe et vaut $e^{s^2/2}$ et ceci pour tout s dans $\mathbb{R}$.

$D_U = \mathbb{R}$ et $\forall s \in D_U$, $\phi_U(s) = e^{s^2/2}$.

b) Soit $s \in \mathbb{R}$. $t \mapsto e^{st^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$. Le théorème de transfert montre alors que $E(e^{sU^2})$ existe si et seulement si $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{st^2} f_U(t)\,dt$ est absolument convergente ou si et seulement si $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{st^2} f_U(t)\,dt$ converge car $t \mapsto e^{st^2} f_U(t)$ est positive sur $\mathbb{R}$.

$\forall t \in \mathbb{R}$, $e^{st^2} f_U(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{st^2 - \frac{1}{2}t^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(\frac{1}{2}-s)t^2}$.

Alors $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{st^2} f_U(t)\,dt$ est de même nature que $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(\frac{1}{2}-s)t^2}\,dt$.

D'après Q 1 a), $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(\frac{1}{2}-s)t^2}dt$ converge si et seulement si $\frac{1}{2}-s>0$.

donc $E(e^{sU^2})$ existe si et seulement si $\frac{1}{2}-s>0$.

Alors $E(e^{sZ})$ existe si et seulement si $s<\frac{1}{2}$.

Par conséquent $\underline{D_Z =]-\infty, \frac{1}{2}[}$.

Soit $s \in]-\infty, \frac{1}{2}[$.

$$\phi_Z(s) = E(e^{sZ}) = E(e^{sU^2}) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{st^2} f_U(t)\,dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(\frac{1}{2}-s)t^2}dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{\frac{\pi}{(1/2-s)}}$$

$$\phi_Z(s) = \sqrt{\frac{\pi}{2\pi(\frac{1}{2}-s)}} = \frac{1}{\sqrt{1-2s}} = (1-2s)^{-\frac{1}{2}}.$$

$\underline{\forall s \in D_Z,\ \phi_Z(s) = (1-2s)^{-\frac{1}{2}}}$.

Q3 a) Δ Si $\mu=0$: $\mu X+\beta$ est la variable constante égale à β donc n'est pas une variable aléatoire à densité. Nous supposons que $\mu \neq 0$.

Soit $s \in \mathbb{R}$.

$s \in D_{\mu X+\beta} \Leftrightarrow E(e^{s(\mu X+\beta)})$ existe $\Leftrightarrow E(e^{s\beta}e^{s\mu X})$ existe

Or $e^{s\beta}$ est un réel strictement positif donc :

$s \in D_{\mu X+\beta} \Leftrightarrow E(e^{s\mu X})$ existe $\Leftrightarrow s\mu \in D_X$

$\underline{\text{un réel } s \text{ appartient à } D_{\mu X+\beta} \text{ si et seulement si } \mu s \in D_X.}$

Soit $s \in D_{\mu X+\beta}$. $\mu s \in D_X$. $\phi_{\mu X+\beta}(s) = E(e^{s(\mu X+\beta)}) = E(e^{s\beta}e^{s\mu X}) = e^{s\beta}E(e^{s\mu X})$

$\phi_{\mu X+\beta}(s) = e^{s\beta}\phi_X(s\mu) = e^{\beta s}\phi_X(\mu s)$.

$\underline{\forall s \in D_{\mu X+\beta},\ \phi_{\mu X+\beta}(s) = e^{\beta s}\phi_X(\mu s)}$.

b) Posons $\forall x\in\mathbb{R}$, $f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{e^{-x}x^{r-1}}{\Gamma(r)} & \text{si } x\in]0,+\infty[\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$. f_X est une densité de X.

Soit $s\in\mathbb{R}$.

. X prend ses valeurs dans $]0,+\infty[$

. f_X est une densité de X

. $t\mapsto e^{st}$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Le théorème de transfert montre que $E(e^{sX})$ existe si et seulement si $\int_0^{+\infty} e^{st} f_X(t)\,dt$ est absolument convergente ou si et seulement si $\int_0^{+\infty} e^{st} f_X(t)\,dt$ converge car $t\mapsto e^{st}f_X(t)$ est positive sur $]0,+\infty[$.

$\forall t\in]0,+\infty[$, $e^{st}f_X(t)=\dfrac{1}{\Gamma(r)}\, e^{-(1-s)t}\, t^{r-1}$

<u>1er cas</u>... $1-s>0$. Posons $s'=1/(1-s)=(1-s)^{-1}$

$\forall t\in]0,+\infty[$, $e^{st}f_X(t)=s'^r\,\dfrac{e^{-t/s'}\,t^{r-1}}{s'^r\,\Gamma(r)}$.

Posons $\forall t\in\mathbb{R}$, $\ell(t)=\begin{cases}\dfrac{e^{-t/s'}\,t^{r-1}}{s'^r\,\Gamma(r)} & \text{si } t\in]0,+\infty[\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$. ℓ est une densité d'une variable aléatoire qui suit la loi gamma de paramètre s' et r.

Alors $\int_{-\infty}^{+\infty}\ell(t)\,dt$ existe et vaut 1. Donc $\int_0^{+\infty}\ell(t)\,dt$ existe et vaut 1.

Donc $\int_0^{+\infty} e^{st} f_X(t)\,dt$ existe et vaut s'^r ou $(1-s)^{-r}$.

Ainsi $E(e^{sX})$ existe et vaut $(1-s)^{-r}$.

Par conséquent : <u>$s\in D_X$ et $\phi_X(s)=(1-s)^{-r}$.</u>

2ème cas .. $1-s<0$.

$-(1-s)t\geq 0$, $t^{r-1}\geq 0$ et $1/\Gamma(r)>0$

- $\forall t\in]0,+\infty[$, $e^{st}f_X(t)=\frac{1}{\Gamma(r)}e^{-(1-s)t}t^{r-1}\geq\frac{1}{\Gamma(r)}t^{r-1}=\frac{1}{\Gamma(r)}\frac{1}{t^{1-r}}\geq 0$
- $\int_1^{+\infty}\frac{dt}{t^{1-r}}$ diverge car $1-r<1$ $(r>0\,!)$ donc $\int_1^{+\infty}\frac{1}{\Gamma(r)}\frac{1}{t^{1-r}}\,dt$ diverge.

Les règles de comparaison sur les intégrales généralisées de fonctions positives montrent alors que $\int_1^{+\infty}e^{st}f_X(t)\,dt$ diverge. Alors $\int_0^{+\infty}e^{st}f_X(t)\,dt$ diverge.

donc e^{sX} n'a pas d'espérance. $s\notin D_X$.

Finalement $D_X=]-\infty,1[$ et $\forall s\in D_X$, $\phi_X(s)=(1-s)^{-r}$.

Qui peut le plus peut le moins. Soit $b\in\mathbb{R}_+^*$. Déterminons D_{bX}.

Soit $s\in\mathbb{R}$. $s\in D_{bX}\overset{\text{Q3 a)}}{\Longleftrightarrow} bs\in D_X\Leftrightarrow bs\in]-\infty,1[\Leftrightarrow s\in]-\infty,\frac{1}{b}[$.

$D_{bX}=]-\infty,\frac{1}{b}[$. Soit $s\in D_{bX}$. $\phi_{bX}(s)\overset{\text{Q3 a)}}{=}e^{0\times s}\phi_X(bs)=\phi_X(bs)=(1-bs)^{-r}$

$\forall s\in D_{bX}$, $\phi_{bX}(s)=(1-bs)^{-r}$.

Remarque .. $\forall b\in\mathbb{R}_+^*$, $bX\hookrightarrow\Gamma(b,r)$!

Ainsi: $D_{2X}=]-\infty,\frac{1}{2}[$ et $\forall s\in D_{2X}$, $\phi_{2X}(s)=(1-2s)^{-r}$. (on prend $b=2$!).

PARTIE I Loi du χ^2 centré.

(Q1) $\forall x \in]-\infty, 0]$, $f_{X_4}(x) = 0$

$\forall x \in]0, +\infty[$, $f_{X_4}(x) = \dfrac{1}{2^2 \times \Gamma(2)} x^{\frac{4}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}} = \frac{1}{4} x e^{-x/2}$

mieux $\forall x \in [0, +\infty[$, $f_{X_4}(x) = \frac{1}{4} x e^{-x/2}$.

$x \mapsto \frac{1}{4} x e^{-x/2}$ et $x \mapsto 0$ sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. Alors f_{X_4} est de classe C^1 sur $]-\infty, 0]$ et sur $[0, +\infty[$. cela suffit pour dire que f_{X_4} est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe au moins sur $\mathbb{R}^*$.

Par croissance comparée $\lim_{x \to +\infty} f_{X_4}(x) = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{2} \dfrac{x/2}{e^{x/2}} \right) = 0$.

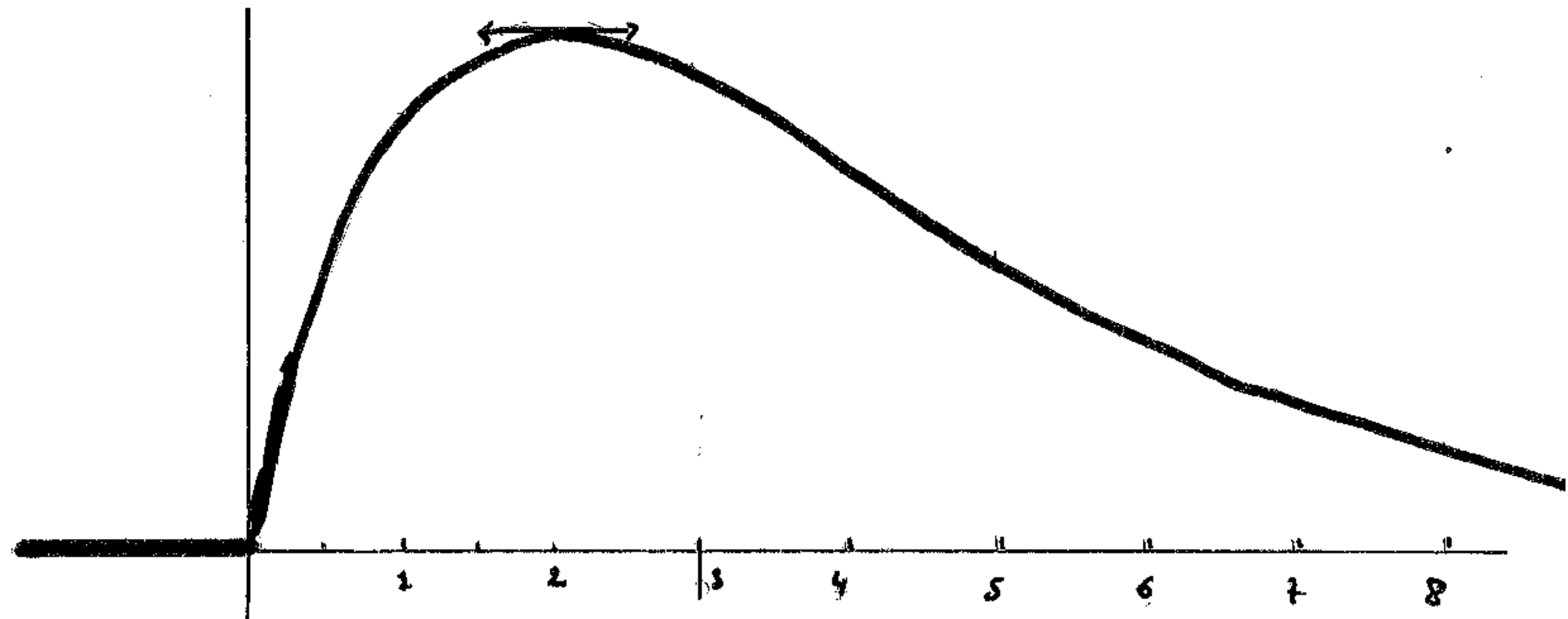
$\forall x \in]0, +\infty[$, $f'_{X_4}(x) = \frac{1}{4}\left(1 - \frac{x}{2}\right) e^{-x/2} = \frac{1}{8}(2-x) e^{-x/2}$.

f_{X_4} étant continue sur $[0, +\infty[$, cela permet de dire que f_{X_4} est croissante sur $[0, 2]$ et décroissante sur $[2, +\infty[$.

Notons que $\lim_{x \to 0^+} \dfrac{f_{X_4}(x) - f_{X_4}(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \left(\frac{1}{4} e^{-x/2} \right) = \frac{1}{4}$ et $\lim_{x \to 0^-} \dfrac{f_{X_4}(x) - f_{X_4}(0)}{x - 0} = 0$.

f_{X_4} est dérivable à droite et à gauche en 0, $(f_{X_4})'_d(0) = \frac{1}{4}$ et $(f_{X_4})'_g(0) = 0$.

f_{X_4} n'est pas dérivable en 0.



Q2 a) $\frac{X_r}{2}$ est une variable aléatoire à densité admettant pour densité

$f_{\frac{X_r}{2}} : x \mapsto \frac{1}{|1/2|} f_{X_r}\left(\frac{x-0}{1/2}\right)$. $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_{\frac{X_r}{2}}(x) = 2 f_{X_r}(2x)$.

- $\forall x \in]-\infty, 0]$, $f_{\frac{X_r}{2}}(x) = 0$
- $\forall x \in]0, +\infty[$, $f_{\frac{X_r}{2}}(x) = 2 \frac{1}{2^{r/2}\Gamma(\frac{r}{2})} (2x)^{\frac{r}{2}-1} e^{-\frac{2x}{2}} = \frac{x^{\frac{r}{2}-1} e^{-x}}{\Gamma(r/2)}$.

Ainsi $\frac{X_r}{2}$ suit la loi gamma de paramètre $\frac{r}{2}$. $\frac{X_r}{2} \hookrightarrow \gamma(\frac{r}{2})$.

• Remarque.. On peut aussi obtenir ce résultat en déterminant la fonction de répartition de $\frac{X_r}{2}$ ...

On peut encore obtenir ce résultat en utilisant : " $\gamma > 0$ et $Y \hookrightarrow \Gamma(b, \nu) \Rightarrow \gamma Y \hookrightarrow \Gamma(\gamma b, \nu)$ ".

Alors $E(\frac{X_r}{2})$ et $V(\frac{X_r}{2})$ existent et valent $\frac{r}{2}$.

Comme $X_r = 2 \times \frac{X_r}{2}$, $E(X_r)$ et $V(X_r)$ existent et valent $2 \times \frac{r}{2}$ et $4 \times \frac{r}{2}$.

Donc $E(X_r) = r$ et $V(X_r) = 2r$ ... ce qui est du cours car $X_r \hookrightarrow \Gamma(2, \frac{r}{2})$!

b) On pourrait appliquer directement le résultat général obtenu à Q3 b, mais bon ...

D'après Q3 b), ayant $\frac{X_r}{2} \hookrightarrow \gamma(\frac{r}{2})$ et $X_r = 2 \times \frac{X_r}{2}$ on peut dire que

$D_{X_r} =]-\infty, \frac{1}{2}[$ et $\forall s \in D_{X_r}$, $\phi_{X_r}(s) = (1-2s)^{-\frac{r}{2}}$.

Q3 a) Préli - Q2 b) nous a donné : $D_{U^2} =]-\infty, \frac{1}{2}[$ et

$\forall s \in]-\infty, \frac{1}{2}[$, $\phi_{U^2}(s) = (1-2s)^{-\frac{1}{2}}$.

Ce qui précède donne $D_{X_1} =]-\infty, \frac{1}{2}]$ et $\forall s \in D_{X_1}$, $\phi_{X_1}(s) = (1-2s)^{-\frac{1}{2}}$.

Alors ϕ_{U^2} et ϕ_{X_1} coïncident sur l'intervalle ouvert non vide $]-\infty, \frac{1}{2}[$.

d'après le troisième résultat admis U^2 et X_1 ont même loi.

• Exercice .. Montrer directement que $U^2 \hookrightarrow \Gamma(2, \frac{1}{2})$. •

b) $U_1, U_2, \dots, U_n$ sont indépendantes et suivent toutes la loi normale centrée réduite.

Alors $U_1^2, U_2^2, \dots, U_n^2$ sont indépendantes et suivent toutes la loi de X_1 c'est à dire la loi gamma de paramètres 2 et $\frac{1}{2}$.

Le théorème de stabilité au niveau des lois gamma montre alors que $\sum_{i=1}^{n} U_i^2$ suit la loi gamma de paramètres 2 et $\frac{n}{2}$.

Ainsi $W_n \hookrightarrow \Gamma(2, \frac{n}{2})$ ou $W_n \hookrightarrow \chi^2(n)$

c) IQ 2 b) donne : $D_{W_n} =]-\infty, \frac{1}{2}[$ et $\forall s \in D_{W_n}$, $\phi_{W_n}(s) = (1-2s)^{-\frac{n}{2}}$.

Rappelons que $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $D_{Z_i} =]-\infty, \frac{1}{2}[$ et $\forall s \in D_{Z_i}$, $\phi_{Z_i}(s) = (1-2s)^{-\frac{1}{2}}$.

Plus de doute : $\phi_{W_n} = \phi_{Z_1} \phi_{Z_2} \cdots \phi_{Z_n}$.

ou : $\forall s \in]-\infty, \frac{1}{2}[$, $\phi_{W_n}(s) = \phi_{Z_1}(s)\, \phi_{Z_2}(s) \cdots \phi_{Z_n}(s)$.

Q4 a) → Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $T_i \hookrightarrow \mathcal{N}(0, \sigma^2)$

Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\frac{T_i}{\sigma} \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$.

Alors pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\frac{T_i^2}{\sigma^2} \hookrightarrow \Gamma(2, \frac{1}{2})$.

donc pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\frac{T_i^2}{\sigma^2}$ possède une espérance qui vaut 1 et une variance qui vaut $2^2 \times \frac{1}{2}$ c'est à dire 2.

Alors pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, T_i^2 possède une espérance qui vaut σ^2 et une variance qui vaut $2\sigma^4$.

Ce qui suffit largement pour dire que $E(S_n)$ existe et vaut $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(T_i^2)$

Alors $E(S_n) = \frac{1}{n} \times n \times \sigma^2 = \sigma^2$. $\underline{\underline{E(S_n)=\sigma^2.}}$

<u>S_n est un estimateur sans biais de σ^2.</u>

→ • $T_1, T_2, \dots, T_n$ sont indépendantes. Il en est de même pour $T_1^2, T_2^2, \dots, T_n^2$.

• $T_1, T_2, \dots, T_n$ ont même espérance σ^2 et même variance $2\sigma^4$

La loi faible des grands nombres permet de dire que la suite de terme général $\frac{T_1^2+T_2^2+\dots+T_n^2}{n}$ converge en probabilité vers la variable certaine égale à σ^2.

Alors <u>S_n est un estimateur sans biais et convergent de σ^2.</u>

b) Montrons que $P\left(\sigma^2 \in \left]0, \frac{nS_n}{k_\alpha}\right]\right) \geq 1-\alpha$

Posons $a = P\left(\sigma^2 \in \left]0, \frac{nS_n}{k_\alpha}\right]\right)$.

$a = P\left(0<\sigma^2 \leq \frac{nS_n}{k_\alpha}\right) \underset{\sigma^2>0, k_\alpha>0}{=} P\left(k_\alpha \leq \frac{nS_n}{\sigma^2}\right) = P\left(k_\alpha \leq \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{T_i}{\sigma}\right)^2\right)$.

Pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $\frac{T_i}{\sigma} \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$.

De plus $\frac{T_1}{\sigma}, \frac{T_2}{\sigma}, \dots, \frac{T_n}{\sigma}$ sont indépendantes car $T_1, T_2, \dots, T_n$ sont indépendantes.

Alors $\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{T_i}{\sigma}\right)^2$ a même loi que W_n.

$a = P(k_\alpha \leq W_n) = 1-\alpha$. Ainsi $a \geq 1-\alpha$!!

Donc $P\left(\sigma^2 \in \left]0, \frac{nS_n}{k_\alpha}\right]\right) \geq 1-\alpha$.

<u>$\left]0, \frac{nS_n}{k_\alpha}\right]$ est un intervalle de confiance de σ^2 au risque α.</u>

PARTIE II. Loi du χ^2 centré

(Q1) a) Posons (de nouveau) $Z = U^2$. Nous avons vu dans I Q3 a) que Z a même loi que X_1 donc que Z suit la loi gamma de paramètre 2 et 1/2. Z possède donc un moment d'ordre 2, alors U possède un moment d'ordre 4 car $Z = U^2$.

$E(U^4) = E(Z^2) = V(Z) + (E(Z))^2 = 4 \times 1/2 + (2 \times 1/2)^2 = 2 + 1 = 3$. $E(U^4) = 3$.

$\uparrow_{Z \hookrightarrow \Gamma(2,1/2)}$

$E(U^3)$ existe car U possède un moment d'ordre 4 et $E(U^3) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^3 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} dt$

Or $t \mapsto t^3 \times \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}$ est impaire sur $\mathbb{R}$.

Ainsi $E(U^3) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^3 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} dt = 0$.

$E(U^3) = 0$ et $E(U^4) = 3$.

b) $Y_1 = M_1^2$. $M_1 \hookrightarrow \mathcal{N}(m_1, 1)$ donc $M_1 - m_1 \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$.

Or $M_1 = (M_1 - m_1) + m_1$. Donc M_1 a même loi que $U + m_1$.

$(U + m_1)^2 = U^2 + 2m_1 U + m_1^2$. Rappelons que U possède un moment d'ordre 4 donc $E(U^i)$ existe pour tout $i \in [\![1,4]\!]$.

Alors $E((U+m_1)^2)$ existe et vaut $E(U^2) + 2m_1 E(U) + m_1^2$

Donc $E(Y_1)$ existe et vaut $E(U^2) + 2m_1 E(U) + m_1^2$.

$E(U) = 0$ et $E(U^2) = V(U) + (E(U))^2 = 1 + 0^2 = 1$.

$E(Y_1) = 1 + m_1^2 = \lambda_1 + 1$.

$(U+m_1)^4 = U^4 + 4m_1 U^3 + 6m_1^2 U^2 + 4m_1^3 U + m_1^4$ et pour tout $i \in [\![1,4]\!]$, $E(U^i)$ existe. Alors $E((U+m_1)^4)$ existe et vaut $E(U^4) + 4m_1 E(U^3) + 6m_1^2 E(U^2) + 4m_1^3 E(U) + m_1^4$.

donc $E(Y_1^2)$ existe et vaut $E(U^4)+4m_1E(U^3)+6m_1^2E(U^2)+4m_1^3E(U)+m_1^4$.

$E(Y_1^2) = 3+4m_1\times 0+6m_1^2\times 1+4m_1^3\times 0+m_1^4 = 3+6m_1^2+m_1^4$.

Alors $V(Y_1)$ existe et vaut : $3+6m_1^2+m_1^4-(1+m_1^2)^2 = 2+4m_1^2 = 2+4\lambda_1$.

$E(Y_1) = \lambda_1+1$ et $V(Y_1) = 4\lambda_1+2$.

c) Rappelons que Y_1 a même loi que $(U+m_1)^2$.

Posons $\hat{Y}_1 = (U+m_1)^2$. $D_{Y_1} = D_{\hat{Y}_1}$ et $\phi_{Y_1} = \phi_{\hat{Y}_1}$.

$\hat{Y}_1 = U^2+2m_1U+m_1^2$. Soit $s\in\mathbb{R}$. $e^{s\hat{Y}_1} = e^{s(U^2+2m_1U+m_1^2)}$

. U est une variable aléatoire de densité φ

. U prend ses valeurs dans $\mathbb{R}$

. $x \mapsto e^{s(x^2+2m_1x+m_1^2)}$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Le théorème de transfert montre que $E(e^{s\hat{Y}_1})$ existe si et seulement si

$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{s(x^2+2m_1x+m_1^2)}\varphi(x)\,dx$ est absolument convergente ... ou convergente

car $\forall x\in\mathbb{R}$, $e^{s(x^2+2m_1x+m_1^2)}\varphi(x) \geq 0$.

$\forall x\in\mathbb{R}$, $e^{s(x^2+2m_1x+m_1^2)}\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{s(x^2+2m_1x+m_1^2)-\frac{x^2}{2}}$.

$\forall x\in\mathbb{R}$, $e^{s(x^2+2m_1x+m_1^2)}\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{sm_1^2}\, e^{-(\frac{1}{2}-s)x^2+2m_1sx}$

Alors $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{s(x^2+2m_1x+m_1^2)}\varphi(x)\,dx$ converge si et seulement si $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(\frac{1}{2}-s)x^2+2m_1sx}\,dx$ converge. D'après le préliminaire $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(\frac{1}{2}-s)x^2+2m_1sx}\,dx$ converge si et seulement si $\frac{1}{2}-s>0$.

donc $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{s(x^2+2m_1x+m_1^2)}\varphi(x)dx$ converge si et seulement si $s<\frac{1}{2}$.

Alors $E(e^{sY_1})$ existe si et seulement si $s<\frac{1}{2}$. $D_{Y_1} =]-\infty, \frac{1}{2}[$.

Soit $s \in D_{Y_1}$.

$E(e^{sY_1}) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{s(x^2+2m_1x+m_1^2)}\varphi(x)dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{sm_1^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(\frac{1}{2}-s)x^2+2m_1sx} dx$.

toujours d'après le préliminaire : $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(\frac{1}{2}-s)^2+2m_1sx} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\frac{1}{2}-s}}\, e^{\frac{(2m_1s)^2}{4(\frac{1}{2}-s)}}$.

Alors $E(e^{sY_1}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{sm_1^2} \times \sqrt{\frac{2\pi}{1-2s}}\, e^{\frac{2m_1^2s^2}{1-2s}} = (1-2s)^{-\frac{1}{2}} e^{sm_1^2\left[1+\frac{2s}{1-2s}\right]}$

$E(e^{sY_1}) = (1-2s)^{-1} e^{sm_1^2\left(\frac{1-2s+2s}{1-2s}\right)} = (1-2s)^{-1} e^{\frac{s\lambda_1}{1-2s}}$.

$\forall s \in D_{Y_1},\ \phi_{Y_1}(s) = (1-2s)^{-1} e^{\frac{s\lambda_1}{1-2s}}$.

(Q2) a) ce qui précède montre que $E(\Pi_1^2)$ (resp. $V(\Pi_1^2)$) existe et vaut λ_1+1 ou m_1^2+1 (resp. $4\lambda_1+2$ ou $4m_1^2+2$).

Alors pour tout $j \in [\![1,n]\!]$, $E(\Pi_j^2)$ (resp. $V(\Pi_j^2)$) existe et vaut m_j^2+1 (resp. $4m_j^2+2$).

Alors $Y_n = \sum_{j=1}^{n} \Pi_j^2$ possède une espérance et une variance.

$E(Y_n) = \sum_{j=1}^{n} E(\Pi_j^2) = \sum_{j=1}^{n}(m_j^2+1) = \lambda_n + n$. $E(Y_n) = \lambda_n + n$.

$\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_n$ sont indépendantes donc $\Pi_1^2, \Pi_2^2, \dots, \Pi_n^2$ le sont aussi.

Alors $V(Y_n) = \sum_{j=1}^{n} V(\Pi_j^2) = \sum_{j=1}^{n}(4m_j^2+2) = 4\lambda_n + 2n$. $V(Y_n) = 4\lambda_n + 2n$.

b) Soit $s \in D_{Y_n} =]-\infty, \frac{1}{2}[$.

$\phi_{Y_n}(s) = E(e^{sY_n}) = E(e^{s(N_1^2+N_2^2+\dots+N_n^2)}) = E(\prod_{j=1}^{n} e^{sN_j^2})$.

$s \in]-\infty, \frac{1}{2}[$ donc $E(e^{sN_1^2})$ existe et vaut $(1-2s)^{-1/2} e^{\frac{s m_1}{1-2s}}$ comme nous l'avons vu dans II Q1 c) ... ou vaut $(1-2s)^{-1/2} e^{\frac{s m_1^2}{1-2s}}$

de même pour tout $j \in [\![2,n]\!]$, $E(e^{sN_j^2})$ existe et vaut $(1-2s)^{-1/2} e^{\frac{s m_j^2}{1-2s}}$.

Notons que $e^{sN_1^2}, e^{sN_2^2}, \dots, e^{sN_n^2}$ sont indépendantes car $N_1, N_2, \dots, N_n$ sont indépendantes. En "extrapolant" (ou en itérant) le troisième résultat admis (vrai) :

$\phi_{Y_n}(s) = E(\prod_{j=1}^{n} e^{sN_j^2}) = \prod_{j=1}^{n} E(e^{sN_j^2}) = \prod_{j=1}^{n} \left[(1-2s)^{-1/2} e^{\frac{s m_j^2}{1-2s}}\right]$

$\phi_{Y_n}(s) = (1-2s)^{-\frac{n}{2}} e^{\sum_{j=1}^{n} \frac{s m_j^2}{1-2s}} = (1-2s)^{-\frac{n}{2}} e^{\frac{s}{1-2s}\sum_{j=1}^{n} m_j^2}$.

$\forall s \in]-\infty, \frac{1}{2}[, \ \phi_{Y_n}(s) = (1-2s)^{-\frac{n}{2}} e^{\frac{s\lambda_n}{1-2s}}$.

PARTIE III Nombre aléatoire de degré de liberté

Q1) a) Soit $k \in [\![1,n]\!]$. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$P(K=k) = \frac{1}{n} \neq 0$.

$P_{[K=k]}(X \leq x) = \frac{1}{P(K=k)} P([K=k] \cap [X \leq x])$.

$P_{[K=k]}(X \leq x) = \frac{1}{P(K=k)} P([K=k] \cap [\sup_{1 \leq i \leq K} (J_i) \leq x])$.

$P_{[K=k]}(X \leq x) = \frac{1}{P(K=k)} P([K=k] \cap [\sup_{1 \leq i \leq k} (J_i) \leq x])$.

Or $K, J_1, J_2, \dots, J_k$ sont indépendantes donc K et $\sup_{1\leq i\leq k} J_i$ sont également indépendantes. Dans ces conditions :

$$P_{[K=\ell]}(X\leqslant x)=\frac{1}{P(K=\ell)}\left[P(K=\ell)\,P(\sup_{1\leqslant i\leqslant \ell} J_i\leqslant x)\right]=P(\sup_{1\leqslant i\leqslant \ell} J_i\leqslant x)=P(X_\ell\leqslant x).$$

$\forall \ell\in[\![1,n]\!],\ \forall x\in\mathbb{R},\ P_{[K=\ell]}(X\leqslant x)=P(X_\ell\leqslant x).$

b) X prend ses valeurs dans $[0,1]$. $\forall x\in]-\infty,0[$, $F_X(x)=0$ et $\forall x\in[1,+\infty[$, $F_X(x)=1$.

Soit $x\in[0,1[$. $([K=\ell])_{\ell\in[\![1,n]\!]}$ est un système complet d'événements.

Alors $F_X(x)=P(X\leqslant x)=\sum_{\ell=1}^{n}P(K=\ell)\,P_{[K=\ell]}(X\leqslant x)=\frac{1}{n}\sum_{\ell=1}^{n}P(X_\ell\leqslant x)$.

$F_X(x)=\frac{1}{n}\sum_{\ell=1}^{n}P(\sup_{1\leqslant i\leqslant \ell} J_i\leqslant x)=\frac{1}{n}\sum_{\ell=1}^{n}P(\{J_1\leqslant x\}\cap\dots\cap\{J_\ell\leqslant x\})$

$F_X(x)=\frac{1}{n}\sum_{\ell=1}^{n}P(J_1\leqslant x)\,P(J_2\leqslant x)\dots P(J_\ell\leqslant x))$ par indépendance de $J_1, J_2, \dots, J_\ell$

pour tout $\ell\in[\![1,n]\!]$.

Comme $x\in[0,1[$, : $\forall i\in[\![1,n]\!]$, $P(J_i\leqslant x)=x$ $(J_i \hookrightarrow \mathcal{U}([0,1]))$.

$$F_X(x)=\frac{1}{n}\sum_{\ell=1}^{n}x^\ell \underset{x\neq 1}{=} \frac{1}{n}\,x\,\frac{1-x^n}{1-x}.$$

Finalement : $\forall x\in\mathbb{R},\ F_X(x)=\begin{cases}0 \text{ si } x\in]-\infty,0[\\ \frac{x}{n}\frac{1-x^n}{1-x} \text{ si } x\in[0,1[\\ 1 \text{ si } x\in[1,+\infty[\end{cases}$ ou

$$\forall x\in\mathbb{R},\ F_X(x)=\begin{cases}0 \text{ si } x\in]-\infty,0[\\ \frac{1}{n}\sum_{\ell=1}^{n}x^\ell \text{ si } x\in[0,1[\\ 1 \text{ si } x\in[1,+\infty[\end{cases}.$$

c) Notons que $\forall x\in]-\infty,0]$, $F_X(x)=0$. $\forall x\in[0,1]$, $F_X(x)=\frac{1}{n}\sum_{\ell=1}^{n}x^\ell$ et

$\forall x\in[1,+\infty[$, $F_X(x)=1$. Comme $x\mapsto 0$, $x\mapsto\frac{1}{n}\sum_{\ell=1}^{n}x^\ell$, $x\mapsto 1$ sont de classe

C^1 sur $\mathbb{R}$: F_X est de classe C^1 sur $]-\infty,0]$, $[0,1]$ et $[1,+\infty[$.

Dans ces conditions F_X est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe C^1 au moins sur $\mathbb{R}-\{0,1\}$.

Ceci suffit pour dire que <u>X est une variable aléatoire à densité.</u>

$\forall x \in]-\infty, 0[$, $F_X(x) = 0$ et $F'_X(x) = 0$

$\forall x \in]0,1[$, $F_X(x) = \frac{1}{n} \sum_{\ell=1}^{n} x^\ell$ et $F'_X(x) = \frac{1}{n} \sum_{\ell=1}^{n} \ell x^{\ell-1}$

$\forall x \in]1, +\infty[$, $F_X(x) = 1$ et $F'_X(x) = 0$.

Posons $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{n} \sum_{\ell=1}^{n} \ell x^{\ell-1} & \text{si } x \in [0,1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

f_X est positive sur son domaine de définition qui est $\mathbb{R}$ et coïncide avec F'_X sur $\mathbb{R}-\{0,1\}$ donc sur $\mathbb{R}$ privé d'un ensemble fini de points.

Alors <u>f_X est une densité de X.</u>

$\int_{-\infty}^{0} t f_X(t)\,dt$ (resp. $\int_{1}^{+\infty} t f_X(t)\,dt$) existe et vaut 0.

$\int_{0}^{1} t f_X(t)\,dt$ existe car $t \mapsto t f_X(t)$ est continue sur $[0,1]$.

Alors $\int_{-\infty}^{+\infty} t f_X(t)\,dt$ converge et ainsi <u>$E(X)$ existe.</u>

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} t f_X(t)\,dt = \int_{0}^{1} t f_X(t)\,dt = \int_{0}^{1} t \left(\frac{1}{n} \sum_{\ell=1}^{n} \ell t^{\ell-1}\right) dt = \frac{1}{n} \sum_{\ell=1}^{n} \ell \int_{0}^{1} t^\ell\,dt$$

$$E(X) = \frac{1}{n} \sum_{\ell=1}^{n} \ell \left[\frac{t^{\ell+1}}{\ell+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n} \sum_{\ell=1}^{n} \frac{\ell}{\ell+1}. \quad \boxed{E(X) = \frac{1}{n} \sum_{\ell=1}^{n} \frac{\ell}{\ell+1}}.$$

d) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Étudions X_k. X_k prend ses valeurs dans $[0,1]$. Notons

$\forall x \in]-\infty, 0[$, $F_{X_k}(x) = 0$ et $\forall x \in [1, +\infty[$, $F_{X_k}(x) = 1$.

Soit $x \in [0,1[$. $F_{X_k}(x) = P(X_k \leq x) = P(\sup J_i \leq x) = P([J_1 \leq x] \cap \dots \cap [J_k \leq x]) \underset{\uparrow}{=} x^k$

calcul déjà fait !

$\forall x \in \mathbb{R}$, $F_{X_k}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-\infty, 0[\\ x^k & \text{si } x \in [0,1[\\ 1 & \text{si } x \in [1, +\infty[\end{cases}$.

Notons que $\forall x \in \mathbb{R}$, $F_{X_k}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-\infty, 0] \\ x^k & \text{si } x \in [0,1] \\ 1 & \text{si } x \in [1, +\infty[\end{cases}$.

Alors F_{X_k} est de classe C^1 sur $]-\infty, 0]$, $[0,1]$ et $[1, +\infty[$.

F_{X_k} est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe C^1 sur $\mathbb{R} - \{0,1\}$. X_k est une variable aléatoire à densité. $\forall x \in]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[$, $F'_{X_k}(x) = 0$ et $\forall x \in]0,1[$, $F'_{X_k}(x) = k x^{k-1}$.

Posons $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_{X_k}(x) = \begin{cases} k x^{k-1} & \text{si } x \in [0,1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

f_{X_k} est positive sur son domaine de définition qui est $\mathbb{R}$ et coïncide avec F'_{X_k} sur $\mathbb{R} - \{0,1\}$ donc sur $\mathbb{R}$ privé d'un ensemble fini de points. f_{X_k} est une densité de X_k.

$\int_{-\infty}^{0} t f_{X_k}(t)dt$ (resp. $\int_{1}^{+\infty} t f_{X_k}(t)dt$) existe et vaut 0.

$\int_0^1 t f_{X_k}(t)dt$ existe car $t \mapsto t f_{X_k}(t)$ est continue sur $[0,1]$.

Finalement $\int_{-\infty}^{+\infty} t f_{X_k}(t)dt$ existe. X_k possède une espérance.

$E(X_k) = \int_{-\infty}^{+\infty} t f_{X_k}(t)dt = \int_0^1 t f_{X_k}(t)dt = \int_0^1 t (k t^{k-1})dt = k \left[\frac{t^{k+1}}{k+1}\right]_0^1 = \frac{k}{k+1}$.

$\forall k \in \mathbb{N}^*$, $E(X_k) = \frac{k}{k+1}$.

$E(g(K))$ existe car $g(K)$ est une variable aléatoire discrète finie.

$E(g(K)) = \sum_{k=1}^{n} g(k) P(K=k) = \sum_{k=1}^{n} E(X|K=k) \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} E(X_k) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{k+1}$

la loi de X sachant $\{K=k\}$ est la loi de X_k.

donc $E(g(K)) = E(X)$.

$E(X) = E(g(K))$.

Nous avons ainsi vérifié (R) dans ce cas particulier.

(Q2) a) Soit $k \in \mathbb{N}$. Soit $x \in \mathbb{R}$. Notons que $P(K=k) = \frac{(\lambda k)^k}{k!} e^{-\lambda k} \neq 0$.

Alors $P_{[K=k]}(H_n \leq x) = \frac{1}{P(K=k)} P([H_n \leq x] \cap [K=k])$.

$P_{[K=k]}(H_n \leq x) = \frac{1}{P(K=k)} P([U_1^2+U_2^2+\cdots+U_{n+2K}^2 \leq x] \cap [K=k])$

$P_{[K=k]}(H_n \leq x) = \frac{1}{P(K=k)} P([U_1^2+U_2^2+\cdots+U_{n+2k}^2 \leq x] \cap [K=k])$.

Par hypothèse $U_1, U_2, \dots, U_{n+2k}, K$ sont indépendantes.

Alors $U_1^2, U_2^2, \dots, U_{n+2k}^2, K$ sont indépendantes.

Ainsi $U_1^2+U_2^2+\cdots+U_{n+2k}^2$ et K sont indépendantes. Dans ces conditions :

$P_{[K=k]}(H_n \leq x) = \frac{1}{P(K=k)} P(U_1^2+U_2^2+\cdots+U_{n+2k}^2 \leq x) P(K=k) = P[U_1^2+\cdots+U_{n+2k}^2 \leq x]$.

Or $P(U_1^2+U_2^2+\cdots+U_{n+2k}^2 \leq x) = P(W_{n+2k} \leq x)$ car $U_1^2+U_2^2+\cdots+U_{n+2k}^2$ a même loi

que W_{n+2k}.

$\forall k \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, \quad P_{[K=k]}(H_n \leq x) = P(W_{n+2k} \leq x)$.

Pour tout k dans $\mathbb{N}$, la loi conditionnelle de H_n sachant $[K=k]$ est la loi de la variable aléatoire W_{n+2k} définie dans la question 1.3.b. de I.

b) Rappelons que $\forall k \in \mathbb{N}, P(K=k) \neq 0$. donc $N_K = \mathbb{N}$.

Soit s un élément de $]-\infty, \frac{1}{2}[$. $s \in D_{H_n}$. Soit $k \in \mathbb{N}$

La loi conditionnelle de e^{sH_n} sachant $[K=k]$ est la même que la loi de $e^{sW_{n+2k}}$.

Rappelons que $D_{W_{n+2k}} =]-\infty, \frac{1}{2}[$ et $\forall s' \in D_{W_{n+2k}}, \phi_{W_{n+2k}}(s') = (1-2s')^{-\frac{n+2k}{2}}$

$s \in]-\infty, \frac{1}{2}[$ donc $E(e^{s W_{n+2k}})$ existe et vaut $(1-2s)^{-\frac{n+2k}{2}}$.

Alors $\underline{\underline{E(e^{sH_n} / K=k) \text{ existe et vaut } (1-2s)^{-\frac{n+2k}{2}}}}$

$\underline{\underline{\text{ou } g(k) = (1-2s)^{-\frac{n+2k}{2}}}}$.

c) $\forall k \in \mathbb{N}$, $g(k) P(K=k) = (1-2s)^{-\frac{n+2k}{2}} \frac{(\lambda/2)^k}{k!} e^{-\lambda/2} = (1-2s)^{-\frac{n}{2}} e^{-\lambda/2} \frac{\left(\frac{\lambda}{2(1-2s)}\right)^k}{k!}$.

la série de terme général $\frac{\left(\frac{\lambda}{2(1-2s)}\right)^k}{k!}$ est convergente et

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\left(\frac{\lambda}{2(1-2s)}\right)^k}{k!} = e^{\frac{\lambda}{2(1-2s)}}.$$

Alors la série de terme général $g(k) P(K=k)$ converge et :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} g(k) P(K=k) = (1-2s)^{-\frac{n}{2}} e^{-\lambda/2} e^{\frac{\lambda}{2(1-2s)}}$$

Notons que cette série est même absolument convergente car à termes positifs.

Le théorème de transfert montre alors que $E(g(K))$ existe et vaut :

$(1-2s)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda}{2(1-2s)}}$ ou $(1-2s)^{-\frac{n}{2}} e^{\frac{\lambda s}{1-2s}}$.

$\underline{\underline{E(g(K)) \text{ existe et } E(g(K)) = (1-2s)^{-\frac{n}{2}} e^{\frac{\lambda s}{1-2s}}}}$.

d) Soit $s \in D_{H_n}$. $s \in]-\infty, \frac{1}{2}]$ et e^{sH_n} possède une espérance.

D'après c), pour tout $k \in \mathbb{N}$ $E(e^{sH_n} / K=k)$ existe. De plus $N_K = \mathbb{N}$

Alors $(*)$ donne $E(e^{sH_n}) = \sum_{k=0}^{+\infty} E(e^{sH_n} / K=k) P(K=k)$.

Le c) montre alors que $\underline{E(e^{sH_n}) = (1-2s)^{-\frac{n}{2}} e^{\frac{\lambda s}{1-2s}}}$ dans ces conditions :

$D_{H_n} =]-\infty, \frac{1}{2}[$ et $\forall s \in D_{H_n}$, $\phi_{H_n}(s) = (1-2s)^{-\frac{n}{2}} e^{\frac{\lambda s}{1-2s}}$.

dans II Q2 nous avons vu que Y_n suivait la loi du χ^2 décentré

à n degré de liberté, de paramètre de décentrage λ_n, que $D_{Y_n} =]-\infty, \frac{1}{2}[$

et que : $\forall s \in D_{Y_n}$, $\phi_{Y_n}(s) = (1-2s)^{-\frac{n}{2}} e^{\frac{s \lambda_n}{1-2s}}$.

donc si $\lambda_n = \lambda$, ϕ_{H_n} et ϕ_{Y_n} coïncide sur l'intervalle ouvert non vide

$]-\infty, \frac{1}{2}[$ donc H_n et Y_n ont même loi (d'après le premier résultat admis).

Ainsi H_n suit la loi du χ^2 décentré à n degré de liberté, de paramètre

de décentrage λ. $H_n \hookrightarrow \chi^2(n, \lambda)$.

e) le résultat proposé au début de la partie III part de l'existence de $E(X)$.

En fait il aurait plutôt fallu supposé que l'existence de $E(X)$ résulte de

1°) l'existence de $E(X | K=k)$ pour tout k dans N_K ... dans la

2) l'existence de $\sum_{k \in N_K} E(X | K=k) P(K=k)$

car ou X prend ses valeurs dans $\mathbb{R}_+$. c'est ce que nous supposerons.

On a toujours $N_K = \mathbb{N}$ et $\forall k \in \mathbb{N}$, $P(K=k) = \frac{(\lambda/2)^k}{k!} e^{-\lambda/2}$.

$$\forall k \in \mathbb{N},\ 0 \leq \left| \frac{1}{n-2+2k} P(K=k) \right| = \frac{1}{n-2+2k} P(K=k) \leq \frac{1}{n-2} P(K=k) \underset{n \geq 3}{\leq} P(K=k)$$

De plus la série de terme général $P(K=k)$ converge. Les règles de comparaison

des séries à termes positifs montrent que la série de terme général

$\left| \frac{1}{n-2+2k} P(K=k) \right|$ converge.

Alors la série de terme général $\frac{1}{n-2+2\ell} P(K=\ell)$ est absolument convergente.

Le théorème de transfert montre alors que :

1) $\underline{E\left(\frac{1}{n-2+2K}\right) \text{ existe}}$.

2) $\underline{E\left(\frac{1}{n-2+2K}\right) = \sum_{\ell=0}^{+\infty} \frac{1}{n-2+2\ell} \; P(K=k)}$.

Soit $\ell \in \mathbb{N}$. La loi de H_n sachant $[K=\ell]$ est la loi de $W_{n+2\ell}$ donc la loi gamma de paramètres 2 et $\frac{n+2\ell}{2}$.

Pour $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_{W_{n+2\ell}}(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{-\frac{x}{2}} x^{\frac{n+2\ell}{2}-1}}{2^{\frac{n+2\ell}{2}} \Gamma\left(\frac{n+2\ell}{2}\right)} & \text{si } x \in]0, +\infty[. \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

$f_{W_{n+2\ell}}$ est une densité de $W_{n+2\ell}$

- $W_{n+2\ell}$ prend ses valeurs dans $]0, +\infty[$
- $t \mapsto \frac{1}{t}$ est continue sur $]0, +\infty[$
- $f_{W_{n+2\ell}}$ est une densité de $W_{n+2\ell}$

Alors $\frac{1}{W_{n+2\ell}}$ possède une espérance si et seulement si $\int_0^{+\infty} \frac{1}{t} f_{W_{n+2\ell}}(t)\,dt$ est absolument convergente ou converge car $\forall t \in]0, +\infty[$, $\frac{1}{t} f_{W_{n+2\ell}}(t) \geq 0$.

En cas d'existence $E\left(\frac{1}{W_{n+2\ell}}\right) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{t} f_{W_{n+2\ell}}(t)\,dt$.

$\forall t \in]0, +\infty[$, $\frac{1}{t} f_{W_{n+2\ell}}(t) = \dfrac{e^{-t/2}\, t^{\left(\frac{n+2\ell}{2}-1\right)-1}}{2^{\frac{n+2\ell}{2}} \Gamma\left(\frac{n+2\ell}{2}\right)} \overset{\frac{n+2\ell}{2}-1>0}{=} \dfrac{\Gamma\left(\frac{n+2\ell}{2}-1\right)}{2\,\Gamma\left(\frac{n+2\ell}{2}\right)} \; \dfrac{e^{-t/2}\, t^{\left(\frac{n+2\ell}{2}-1\right)-1}}{2^{\frac{n+2\ell}{2}-1} \Gamma\left(\frac{n+2\ell}{2}-1\right)}$

Pour $\forall t \in \mathbb{R}$, $h(t) = \begin{cases} \dfrac{e^{-t/2}\, t^{\left(\frac{n+2\ell}{2}-1\right)-1}}{2^{\frac{n+2\ell}{2}-1} \Gamma\left(\frac{n+2\ell}{2}-1\right)} & \text{si } t \in]0, +\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

est une densité d'une variable aléatoire qui suit la loi gamma de paramètres 2 et $\frac{n+\ell}{2}-1$.

Donc $\int_{-\infty}^{+\infty} h(t)dt$ existe et vaut 1. Ce qui permet aussi de dire que

$\int_{0}^{+\infty} h(t)dt$ existe et vaut 1 car h est nulle sur $]-\infty, 0]$.

Or $\forall t \in]0, +\infty[$, $\frac{1}{t} f_{W_{n+\ell}}(t) = \frac{\Gamma(\frac{n+\ell}{2}-1)}{2\Gamma(\frac{n+\ell}{2})} h(t) = \frac{1}{2(\frac{n+\ell}{2}-1)} h(t) = \frac{1}{n-2+\ell} h(t)$

"$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$"

Alors $\int_{0}^{+\infty} \frac{1}{t} f_{W_{n+\ell}}(t)dt$ existe et vaut $\frac{1}{n-2+\ell}$.

Nous avons vu que ceci suffit pour dire que $E(\frac{1}{W_{n+2\ell}})$ existe et vaut $\frac{1}{n-2+2\ell}$.

La loi de H_n sachant que $[K=\ell]$ étant la loi de $W_{n+2\ell}$ on peut alors dire que $E\left(\frac{1}{H_n} / K=\ell\right)$ existe et vaut $\frac{1}{n-2+2k}$.

Rappelons que la série de terme général $\frac{1}{n-2+2\ell} P(K=\ell)$ converge, que $E(\frac{1}{n-2+2K})$ existe et que $E(\frac{1}{n-2+2K}) = \sum_{\ell=0}^{+\infty} \frac{1}{n-2+2\ell} P(K=\ell)$

Alors la série de terme général $E(\frac{1}{H_n} / K=\ell) P(K=\ell)$ converge et

$\sum_{k=0}^{+\infty} E\left(\frac{1}{H_n} / K=\ell\right) P(K=\ell) = E\left(\frac{1}{n-2+2K}\right)$

<u>Nous en déduisons que $E\left(\frac{1}{H_n}\right)$ existe (!!) et que $E\left(\frac{1}{H_n}\right) = E\left(\frac{1}{n-2+2K}\right)$</u>

d'après (*).

PARTIE IV. Estimateur de James-Stein

(Q1) • $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \dots, \hat{\theta}_p$ sont indépendantes

• $\forall i \in [\![1,p]\!]$, $\hat{\theta}_i \hookrightarrow \mathcal{N}(\theta_i, 1)$

Alors d'après la partie II : $\hat{\theta}_1^2 + \hat{\theta}_2^2 + \dots + \hat{\theta}_p^2 \hookrightarrow \chi^2(p, \sum_{i=1}^{p} \theta_i^2)$.

Ainsi $\underline{\underline{B_p \hookrightarrow \chi^2(p, b_p)}}$.

$\underline{E(B_p) = b_p + p}$ d'après II Q 2a (et $V(B_p) = 4b_p + 2p$)

$E(B_p) \neq b_p$ donc $\underline{\underline{B_p \text{ est un estimateur biaisé de } b_p}}$.

(Q2) • Soit $j \in [\![1,p]\!]$. $(\hat{\theta}_j - \theta_j)^2 = (\hat{\theta}_j - E(\hat{\theta}_j))^2$ et $\hat{\theta}_j \hookrightarrow \mathcal{N}(\theta_j, 1)$.

Alors $E((\hat{\theta}_j - \theta_j)^2)$ existe et vaut $V(\hat{\theta}_j)$ donc 1.

Ainsi $R(\hat{\theta}, \theta) = E(\sum_{i=1}^{p} (\hat{\theta}_j - \theta_j)^2)$ existe.

• Soit $j \in [\![1,p]\!]$. $(\theta_j^* - \theta_j)^2 = \left((1 - \frac{c}{B_p}) \hat{\theta}_j - \theta_j \right)^2$

$(\theta_j^* - \theta_j)^2 = \left((\hat{\theta}_j - \theta_j) - \frac{c}{B_p} \hat{\theta}_j \right)^2 = (\hat{\theta}_j - \theta_j)^2 + \frac{c^2}{B_p^2} \hat{\theta}_j^2 - \frac{2c}{B_p} (\hat{\theta}_j - \theta_j) \hat{\theta}_j$

Rappelons que $B_p = \sum_{j=1}^{p} \hat{\theta}_j^2$. En sommant ce qui précède on obtient :

$$\sum_{j=1}^{p} (\theta_j^* - \theta_j)^2 = \sum_{j=1}^{p} (\hat{\theta}_j - \theta_j)^2 + \frac{c^2}{B_p^2} \times B_p - \frac{2c}{B_p} \left[B_p - \sum_{j=1}^{p} \theta_j \hat{\theta}_j \right]$$

$$\sum_{j=1}^{p} (\theta_j^* - \theta_j)^2 = \sum_{j=1}^{p} (\hat{\theta}_j - \theta_j)^2 + c^2 \times \frac{1}{B_p} - 2c + 2c \frac{1}{B_p} \sum_{j=1}^{p} \theta_j \hat{\theta}_j$$

$\rightarrow E\left(\sum_{j=1}^{p}(\hat{\theta}_j-\theta_j)^2\right)$ existe et vaut $R(\hat{\theta},\theta)$.

$\rightarrow E\left(\frac{1}{B_p}\right)$ existe et vaut $E\left(\frac{1}{p-2+2K}\right)$ d'après III q 2 e

$\rightarrow E\left(\frac{1}{B_p}\sum_{j=1}^{p}\theta_j\hat{\theta}_j\right)$ existe et vaut $E\left(\frac{2K}{p-2+2K}\right)$ d'après ce qui est admis.

Alors $E\left(\sum_{j=1}^{p}(\theta_j^*-\theta_j)^2\right)$ existe et vaut $E\left(\sum_{j=1}^{p}(\hat{\theta}_j-\theta_j)^2\right)+c^2E\left(\frac{1}{p-2+2K}\right)-2c$
$+2c\,E\left(\frac{2K}{p-2+2K}\right)$.

donc $R(\theta^*,\theta)$ existe et vaut $R(\hat{\theta},\theta)+c^2E\left(\frac{1}{p-2+2K}\right)-2c+2c\,E\left(\frac{2K}{p-2+2K}\right)$

Alors $R(\theta^*,\theta)-R(\hat{\theta},\theta)=c^2E\left(\frac{1}{p-2+2K}\right)+2c\,E\left(\frac{2K}{p-2+2K}-1\right)=c^2E\left(\frac{1}{p-2+2K}\right)+2c\,E\left(\frac{-(p-2)}{p-2+2K}\right)$

$R(\theta^*,\theta)-R(\hat{\theta},\theta)=(c^2-2c(p-2))E\left(\frac{1}{p-2+2K}\right)$.

$R(\theta^*,\theta)$ et $R(\hat{\theta},\theta)$ existent et $R(\theta^*,\theta)-R(\hat{\theta},\theta)=(c^2-2c(p-2))E\left(\frac{1}{p-2+2K}\right)$.

b) $E\left(\frac{1}{p-2+2K}\right)=\sum_{\ell=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{p-2+2\ell}\right)\frac{(\lambda/2)^\ell}{\ell!}e^{-\lambda/2}>0$.

Alors $R(\theta^*,\theta)-R(\hat{\theta},\theta)<0 \iff c^2-2c(p-2)<0 \iff c(c-2(p-2))<0 \iff c\in]0,2(p-2)[$

signe du trinome du second degré

Par conséquent $R(\theta^*,\theta)<R(\hat{\theta},\theta)\iff 0<c<2(p-2)$

$R(\theta^*,\theta)-R(\hat{\theta},\theta)$ est minimal si et seulement si $c^2-2c(p-2)$ est minimal.

$c^2-2c(p-2)=(c-(p-2))^2-(p-2)^2$. donc $c^2-2c(p-2)$ est minimal pour $c=p-2$.

$R(\theta^*,\theta)-R(\hat{\theta},\theta)$ est minimal pour $c=p-2$.

Si $c=p-2$: $\theta^*=\left(1-\frac{p-2}{B_p}\right)\hat{\theta}$.