PARTIE I

Q1 a) Soit $i \in [\![1,n]\!]$. Notons pour tout k dans $[\![1,m]\!]$, A_k^i l'événement la $k^{ième}$ boule n'est pas placée dans l'urne numéro i.

- $\{X_i=1\} = A_1^i \cap A_2^i \cap \dots \cap A_m^i$
- $A_1^i, A_2^i, \dots, A_m^i$ sont indépendants car on répartit "de façon indépendante"...
- $\forall k \in [\![1,m]\!]$, $P(A_k^i) = 1 - P(\overline{A_k^i}) = 1 - \frac{1}{n}$.

Ainsi $P(X_i=1) = P(A_1^i)P(A_2^i)\dots P(A_m^i) = \left(1-\frac{1}{n}\right)^m$.

Pour tout i dans $[\![1,n]\!]$, X_i suit la loi de Bernoulli de paramètre $\left(1-\frac{1}{n}\right)^m$.

b) Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ tel que $i \neq j$.

Notons pour tout k dans $[\![1,m]\!]$, $A_k^{i,j}$ l'événement la $k^{ième}$ boule n'est placée ni dans l'urne numéro i ni dans l'urne numéro j.

- $\{X_i=1\} \cap \{X_j=1\} = \bigcap_{k=1}^{m} A_k^{i,j}$.
- $A_1^{i,j}, A_2^{i,j}, \dots, A_m^{i,j}$ sont indépendants.
- $\forall k \in [\![1,m]\!]$, $P(A_k^{i,j}) = 1 - P(\overline{A_k^{i,j}}) = 1 - P(\overline{A_k^i} \cup \overline{A_k^j}) \overset{\text{événements disjoints}}{=} 1 - P(\overline{A_k^i}) - P(\overline{A_k^j}) = 1 - \frac{1}{n} - \frac{1}{n} = 1 - \frac{2}{n}$.

Alors $P(\{X_i=1\} \cap \{X_j=1\}) = P\left(\bigcap_{k=1}^{m} A_k^{i,j}\right) = \prod_{k=1}^{m} P(A_k^{i,j}) = \prod_{k=1}^{m} \left(1-\frac{2}{n}\right) = \left(1-\frac{2}{n}\right)^m$.

$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $i \neq j \Rightarrow P(\{X_i=1\} \cap \{X_j=1\}) = \left(1-\frac{2}{n}\right)^m$.

Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ tel que $i \neq j$.

$\mathrm{cov}(X_i,X_j) = E(X_iX_j) - E(X_i)E(X_j) = P(X_iX_j=1) - \left(1-\frac{1}{n}\right)^m \left(1-\frac{1}{n}\right)^m$

$\mathrm{cov}(X_i,X_j) = P(\{X_i=1\} \cap \{X_j=1\}) - \left(1-\frac{1}{n}\right)^{2m} = \left(1-\frac{2}{n}\right)^m - \left(1-\frac{1}{n}\right)^{2m}$

$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $i \neq j \Rightarrow \mathrm{cov}(X_i,X_j) = \left(1-\frac{2}{n}\right)^m - \left(1-\frac{1}{n}\right)^{2m}$.

Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ tel que $i \neq j$

$n \geqslant 3$; $1-\frac{2}{n} \geqslant 1-\frac{2}{3} = \frac{1}{3}$ et $1-\frac{2}{n} < 1$; $\frac{1}{3} \leqslant 1-\frac{2}{n} < 1$.

$1-\frac{1}{n} \geqslant 1-\frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ et $1-\frac{1}{n} < 1$; $\frac{2}{3} \leqslant 1-\frac{1}{n} < 1$.

Alors $\frac{4}{9} \leqslant \left(1-\frac{1}{n}\right)^2 = 1-\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2} < 1$

TROP LONG !

Finalement $\frac{1}{3} \leqslant 1-\frac{2}{n} < 1-\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2} = \left(1-\frac{1}{n}\right)^2 < 1$

Alors comme m est strictement positif : $\left(1-\frac{2}{n}\right)^m < \left(\left(1-\frac{1}{n}\right)^2\right)^m = \left(1-\frac{1}{n}\right)^{2m}$.

Donc $\operatorname{cov}(X_i, X_j) = \left(1-\frac{2}{n}\right)^m - \left(1-\frac{1}{n}\right)^{2m} < 0$; $\operatorname{cov}(X_i,X_j) \neq 0$

Si $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ et si $i=j$: $\operatorname{cov}(X_i,X_j) = V(X_i) = \left(1-\frac{1}{n}\right)^m\left[1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^m\right] \neq 0$

car $\left(1-\frac{1}{n}\right)^m \notin \{0,1\}$.

$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $\operatorname{cov}(X_i,X_j) \neq 0$

Pour tout (i,j) dans $[\![1,n]\!]^2$, X_i et X_j ne sont pas indépendantes.

Q2 a) $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $E(X_i) = \left(1-\frac{1}{n}\right)^m$

Par linéarité de l'espérance $E(W_n) = E\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n E(X_i) = n\left(1-\frac{1}{n}\right)^m$;

$E(W_n) = n\left(1-\frac{1}{n}\right)^m$.

b) $V(W_n) = V\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^m V(X_i) + 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} \operatorname{cov}(X_i,X_j)$.

$V(W_n) = \sum_{i=1}^n \left(1-\frac{1}{n}\right)^m\left[1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^m\right] + 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}\left(\left(1-\frac{2}{n}\right)^m - \left(1-\frac{1}{n}\right)^{2m}\right)$.

$V(W_n) = n\left(1-\frac{1}{n}\right)^m\left[1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^m\right] + \underbrace{2\times\binom{n}{2}}_{n(n-1)}\left[\left(1-\frac{2}{n}\right)^m - \left(1-\frac{1}{n}\right)^{2m}\right]$.

$V(W_n) = n\left(1-\frac{1}{n}\right)^m + (-n-n(n-1))\left(1-\frac{1}{n}\right)^{2m} + n(n-1)\left(1-\frac{2}{n}\right)^m$.

$V(W_n) = n\left[\left(1-\frac{1}{n}\right)^m - n\left(1-\frac{1}{n}\right)^{2m} + (n-1)\left(1-\frac{2}{n}\right)^m\right]$.

c) $\mathbb{E}(W_n) - V(W_n) = n\left(1-\frac{1}{n}\right)^m - n\left[\left(1-\frac{1}{n}\right)^m - n\left(1-\frac{1}{n}\right)^{2m} + (n-1)\left(1-\frac{2}{n}\right)^m\right]$.

$$\mathbb{E}(W_n) - V(W_n) = n^2\left(1-\frac{1}{n}\right)^{2m} - n(n-1)\left(1-\frac{2}{n}\right)^m = n^2\left[\left(1-\frac{1}{n}\right)^{2m} - \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)^m\right].$$

$\left(1-\frac{1}{n}\right)^2 = \left(1-\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}\right) \geq 1-\frac{2}{n} \geq 0$.

Donc $\left(1-\frac{1}{n}\right)^{2m} \geq \left(1-\frac{2}{n}\right)^m \geq \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)^m$.

car $1 \geq 1-\frac{1}{n}$ et $\left(1-\frac{2}{n}\right)^m \geq 0$

Alors $\left(1-\frac{1}{n}\right)^{2m} - \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)^m \geq 0$

Donc $\mathbb{E}(W_n) - V(W_n) \geq 0$.

Q3) On a $n\ln n + \theta n = m + \alpha_n$ où $\alpha_n \in [0,1[$.

Ainsi $m = n\ln n + \theta n - \alpha_n$ où $\alpha_n \in [0,1[$.

a) $\mathbb{E}(W_n) = n\left(1-\frac{1}{n}\right)^m = n\, e^{m\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)} = e^{m\ln\left(1-\frac{1}{n}\right) + \ln n}$.

$m\ln\left(1-\frac{1}{n}\right) + \ln n = n\ln n \ln\left(1-\frac{1}{n}\right) + \theta n \ln\left(1-\frac{1}{n}\right) - \alpha_n \ln\left(1-\frac{1}{n}\right) + \ln n$.

$m\ln\left(1-\frac{1}{n}\right) + \ln n = \underset{\blacktriangle}{\ln n\left[n\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)+1\right]} + \underset{\odot}{\theta n \ln\left(1-\frac{1}{n}\right)} - \underset{\blacktriangledown}{\alpha_n \ln\left(1-\frac{1}{n}\right)}$.

▲ $\ln\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n} = -\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) = -\frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

Alors $\ln\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n} \sim -\frac{1}{2n^2}$; $n\ln\left(1-\frac{1}{n}\right) + 1 \sim -\frac{1}{2n}$; $\ln n\left[n\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)+1\right] \sim -\frac{\ln n}{2n}$;

Par conséquent $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\ln n\left[n\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)+1\right]\right) = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(-\frac{\ln n}{2n}\right) = 0$.

⊙ $\theta n \ln\left(1-\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \theta n\left(-\frac{1}{n}\right) = -\theta$; $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\theta n \ln\left(1-\frac{1}{n}\right)\right) = -\theta$

▼ $\alpha_n \ln\left(1-\frac{1}{n}\right) \sim -\frac{\alpha_n}{n}$, $\alpha_n \in [0,1[$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n} = 0$. Alors $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\alpha_n \ln\left(1-\frac{1}{n}\right)\right) = 0$.

Finalement $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(m\ln(1-\frac{1}{n})+\ln n\right) = -\theta$. Par continuité de la fonction exponentielle : $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{m\ln(1-\frac{1}{n})+\ln n} = e^{-\theta}$; $\underline{\underline{\lim\limits_{n\to+\infty} E(W_n) = e^{-\theta}}}$.

b) $E(W_n)-V(W_n) = n^2\left[(1-\frac{1}{n})^{2m} - (1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})^m\right]$

$E(W_n)-V(W_n) = n^2(1-\frac{1}{n})^{2m} - n^2(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})^m$

$E(W_n)-V(W_n) = (E(W_n))^2 - e^{m\ln(1-\frac{2}{n})+2\ln n+\ln(1-\frac{1}{n})}$

$\lim\limits_{n\to+\infty}(E(W_n))^2 = e^{-2\theta}$.

$m\ln(1-\frac{2}{n})+2\ln n = n\ln n\ln(1-\frac{2}{n})+\theta n\ln(1-\frac{2}{n})-\alpha_n\ln(1-\frac{2}{n})+2\ln n$.

$m\ln(1-\frac{2}{n})+2\ln n = n\ln n\left[\ln(1-\frac{2}{n})+\frac{2}{n}\right]+\theta n\ln(1-\frac{2}{n})-\alpha_n\ln(1-\frac{2}{n})$.

$\to \ln(1-\frac{2}{n})+\frac{2}{n} = -\frac{2}{n}-\frac{1}{2}(\frac{2}{n})^2+\frac{2}{n}+o(\frac{1}{n^2}) = -\frac{2}{n^2}+o(\frac{1}{n^2})$.

$\ln(1-\frac{2}{n})+\frac{2}{n} \sim -\frac{2}{n^2}$; $n\ln n\left[\ln(1-\frac{2}{n})+\frac{2}{n}\right] \sim -\frac{2\ln n}{n}$.

Alors $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(n\ln n\left[\ln(1-\frac{2}{n})+\frac{2}{n}\right]\right) = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{2\ln n}{n}\right) = 0$.

$\Rightarrow \theta n\ln(1-\frac{2}{n}) \sim \theta n(-\frac{2}{n}) = -2\theta$; $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\theta n\ln(1-\frac{2}{n})\right) = -2\theta$.

$\Rrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty}\ln(1-\frac{2}{n}) = 0$ et $\alpha_n\in[0,1[$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(-\alpha_n\ln(1-\frac{2}{n})\right) = 0$.

Alors $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(m\ln(1-\frac{2}{n})+2\ln n\right) = 0-2\theta+0 = -2\theta$

$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(m\ln(1-\frac{2}{n})+2\ln n+\ln(1-\frac{1}{n})\right) = -2\theta$.

Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{m\ln(1-\frac{2}{n})+2\ln n+\ln(1-\frac{1}{n})} = e^{-2\theta}$.

Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(E(W_n)-V(W_n)\right) = \lim\limits_{n\to+\infty}\left((E(W_n))^2 - e^{n\ln(1-\frac{2}{n})+2\ln n+\ln(1-\frac{1}{n})}\right) = e^{-2\theta}-e^{-2\theta}=0$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} \left(E(W_n)-V(W_n)\right)=0$.

c) $\lim\limits_{n\to+\infty} \mu_n = \lim\limits_{n\to+\infty} E(W_n) = e^{-\theta}$; $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{\mu_n} = e^{\theta} \geqslant 1$.

Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \min\left(1, \frac{1}{\mu_n}\right) = 1$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\mu_n - V(W_n)\right) = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(E(W_n)-V(W_n)\right)=0$.

Or $\forall \ell\in\mathbb{N}$, $0\leq |P(W_n=\ell)-P(T_n=\ell)| \leq \min\left(1,\frac{1}{\mu_n}\right)\left(\mu_n - V(W_n)\right)$.

Par encadrement on obtient : $\forall \ell\in\mathbb{N}$, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(P(W_n=\ell)-P(T_n=\ell)\right)=0$.

$\forall \ell\in\mathbb{N}$, $P(T_n=\ell) = \frac{\mu_n^\ell}{\ell!}e^{-\mu_n}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\mu_n = e^{-\theta}$.

Posons $\mu = e^{-\theta}$. $\lim\limits_{n\to+\infty} P(T_n=\ell) = \frac{\mu^\ell}{\ell!}e^{-\mu}$ pour tout ℓ dans $\mathbb{N}$.

Ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} P(W_n=\ell) = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\left(P(W_n=\ell)-P(T_n=\ell)\right)+P(T_n=\ell)\right) = 0+\frac{\mu^\ell}{\ell!}e^{-\mu}$ pour tout ℓ dans $\mathbb{N}$.

$\mu = e^{-\theta}>0$ et $\forall \ell\in\mathbb{N}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} P(W_n=\ell) = \frac{\mu^\ell}{\ell!}e^{-\mu}$.

La suite $(W_n)_{n\geq 3}$ converge en loi vers une variable aléatoire qui suit la loi de Poisson de paramètre $\mu = e^{-\theta}$.

(Q4) a) • $E(\overline{T}_p) = E\left(\frac{1}{p}\sum_{i=1}^{p} T_i\right) = \frac{1}{p}\sum_{i=1}^{p} E(T_i) = \frac{1}{p}\sum_{i=1}^{p}\mu = \mu$

• La loi faible des grands nombres montre que "$\overline{T}_p$" converge en probabilité vers la variable certaine μ

Ainsi $\overline{T}_p$ est un estimateur sans biais et convergent de μ.

b) Posons $S_p = T_1 + T_2 + \dots + T_p$. Le théorème de la limite centrée montre que "$\frac{S_p - E(S_p)}{\sqrt{V(S_p)}}$" converge en loi vers une variable aléatoire qui suit la loi normale centrée réduite.

$$\frac{S_p - E(S_p)}{\sqrt{V(S_p)}} = \frac{p\overline{T}_p - p\mu}{\sqrt{p\,V(T_1)}} = p\,\frac{\overline{T}_p - \mu}{\sqrt{p\mu}} = \sqrt{p}\,\frac{\overline{T}_p - \mu}{\sqrt{\mu}} = U_p$$

Ainsi $(U_p)_{p\geq 1}$ converge en loi vers une variable aléatoire qui suit la loi normale centrée réduite.

c) $(U_p)_{p\geq 1}$ converge en loi vers une variable aléatoire X qui suit la loi normale centrée réduite.

Donc pour p assez grand $P(|U_p|\leq u) \overset{!!}{=} P(|X|\leq u) = P(-u\leq X\leq u)$.

Pour assez grand $P(|U_p|\leq u) = P(X\leq u) - P(X<-u) = \Phi(u) - \Phi(-u) = 2\Phi(u) - 1$ où Φ est la fonction de répartition de X et de U !!

$P(U\geq u) = 1 - P(U<u) = 1 - P(U\leq u) = 1 - \Phi(u)$ et $P(U\geq u) = \alpha/2$

Alors $\alpha = 2(1-\Phi(u)) = 1 - (2\Phi(u) - 1)$; $2\Phi(u) - 1 = 1 - \alpha$.

Donc pour p assez grand $P(|U_p|\leq u) = 1 - \alpha$

$$P(|U_p|\leq u) = P\left(-u\leq \sqrt{p}\,\frac{\overline{T}_p - \mu}{\sqrt{\mu}} \leq u\right) = P\left(\frac{\sqrt{p}\,\overline{T}_p - u\sqrt{\mu}}{\sqrt{p}} \leq \mu \leq \frac{\sqrt{p}\,\overline{T}_p + u\sqrt{\mu}}{\sqrt{p}}\right).$$

Ainsi $P\left(\overline{T}_p - \frac{u\sqrt{\rho}}{\sqrt{p}} \leq \rho \leq \overline{T}_p + \frac{u\sqrt{\rho}}{\sqrt{p}}\right) = 1-\alpha$.

Notons que $\sqrt{\rho} = e^{-\frac{\theta}{2}} \leqslant 1$ car $\theta \in \mathbb{R}_+$. Ainsi $-\frac{u}{\sqrt{p}} \leqslant -\frac{u\sqrt{\rho}}{p}$ et $\frac{u\sqrt{\rho}}{\sqrt{p}} \leqslant \frac{u}{\sqrt{p}}$.

L'événement $\left\{\overline{T}_p - \frac{u\sqrt{\rho}}{\sqrt{p}} \leq \rho \leq \overline{T}_p + \frac{u\sqrt{\rho}}{\sqrt{p}}\right\}$ est contenu dans l'événement

$\left\{\overline{T}_p - \frac{u}{\sqrt{p}} \leq \rho \leq \overline{T}_p \leq \frac{u}{\sqrt{p}}\right\}$.

Par conséquent $P\left(\overline{T}_p - \frac{u}{\sqrt{p}} \leq \rho \leq \overline{T}_p + \frac{u}{\sqrt{p}}\right) \geqslant 1-\alpha$.

Donc $P\left(\rho \in \left[\overline{T}_p - \frac{u}{\sqrt{p}}, \overline{T}_p + \frac{u}{\sqrt{p}}\right]\right) \geqslant 1-\alpha$.

$\left[\overline{T}_p - \frac{u}{\sqrt{p}}, \overline{T}_p + \frac{u}{\sqrt{p}}\right]$ est un intervalle de confiance de ρ au risque α.

PARTIE II

Q1 a) 1er cas : $A=\emptyset$. $P(\Pi\in A)=P(\Pi\in\emptyset)=0$.

$\forall \ell\in\mathbb{N},\ 0\leq P(\{\Pi\in A\}\cap\{\Pi\leq \ell\})\leq P(\Pi\in A)=0$.

$\uparrow \{\Pi\in A\}\cap\{\Pi\leq\ell\}\subset\{\Pi\in A\}$

Finalement $f_A(0)=0$ et $\forall \ell\in\mathbb{N},\ f_A(\ell+1)=\dfrac{\ell!}{\lambda^{\ell+1}}e^{\lambda}\left[0-0\times P(\Pi\leq\ell)\right]=0$.

Si $A=\emptyset$: $\forall \ell\in\mathbb{N},\ f_A(\ell)=0$.

2ème cas : $A=\mathbb{N}$. $P(\Pi\in A)=P(\Pi\in\mathbb{N})\overset{\Pi(\Omega)=\mathbb{N}}{=}1$. Soit $\ell\in\mathbb{N}$.

$P(\{\Pi\in A\}\cap\{\Pi\leq\ell\})=P(\Pi\leq\ell)$ car $A=\mathbb{N}$ et $\Pi(\Omega)=\mathbb{N}$

Alors $f_A(\ell+1)=\dfrac{\ell!}{\lambda^{\ell+1}}e^{\lambda}\left[P(\Pi\leq\ell)-1\times P(\Pi\leq\ell)\right]=0$.

$\forall \ell\in\mathbb{N},\ f_A(\ell+1)=0$ et $f_A(0)=0$.

Si $A=\mathbb{N}$: $\forall \ell\in\mathbb{N},\ f_A(\ell)=0$.

b) 1er cas : $0\in A$

$f_A(1)=f_A(0+1)=\dfrac{0!}{\lambda^{0+1}}e^{\lambda}\left[P(\{\Pi\in A\}\cap\{\Pi\leq 0\})-P(\Pi\in A)\times P(\Pi\leq 0)\right]$.

$0\in A$ donc $P(\{\Pi\in A\}\cap\{\Pi\leq 0\})=P(\Pi=0)=e^{-\lambda}$. $P(\Pi\leq 0)=P(\Pi=0)=e^{-\lambda}$.

Alors $f_A(1)=\dfrac{e^{\lambda}}{\lambda}\left[e^{-\lambda}-P(\Pi\in A)e^{-\lambda}\right]=\dfrac{1-P(\Pi\in A)}{\lambda}$.

Si $0\in A$: $f_A(1)=\dfrac{1-P(\Pi\in A)}{\lambda}=\dfrac{P(\Pi\in\bar{A})}{\lambda}$.

2ème cas : $0\in\bar{A}$. $P(\{\Pi\in A\}\cap\{\Pi\leq 0\})=P(\{\Pi\in A\}\cap\{\Pi=0\})\overset{0\notin A}{=}P(\emptyset)=0$.

Alors $f_A(1)=\dfrac{e^{\lambda}}{\lambda}\left[0-P(\Pi\in A)e^{-\lambda}\right]=-\dfrac{P(\Pi\in A)}{\lambda}$.

Si $0\in\bar{A}$: $f_A(1)=-\dfrac{P(\Pi\in A)}{\lambda}$.

On suppose que 0 et 1 appartiennent à A.

$f_A(2) = f_A(1+1) = \frac{1!}{\lambda^2} e^{\lambda} \left[P(\{\Pi \in A\} \cap \{\Pi \leq 1\}) - P(\Pi \in A)\, P(\Pi \leq 1) \right]$.

$0 \in A$ et $1 \in A$

$P(\{\Pi \in A\} \cap \{\Pi \leq 1\}) = P(\{\Pi \in A\} \cap (\{\Pi = 0\} \cup \{\Pi = 1\})) \stackrel{\downarrow}{=} P(\{\Pi = 0\} \cup \{\Pi = 1\})$.

$P(\{\Pi \in A\} \cap \{\Pi \leq 1\}) = P(\Pi = 0) + P(\Pi = 1) = e^{-\lambda} + \lambda e^{-\lambda} = (1+\lambda) e^{-\lambda}$.

$P(\Pi \leq 1) = P(\Pi = 0) + P(\Pi = 1) = (1+\lambda) e^{-\lambda}$.

$f_A(2) = \frac{e^{\lambda}}{\lambda^2} \left[(1+\lambda) e^{-\lambda} - P(\Pi \in A)(1+\lambda) e^{-\lambda} \right]$.

$f_A(2) = \frac{1+\lambda}{\lambda^2} (1 - P(\Pi \in A)) = \frac{1+\lambda}{\lambda^2} P(\Pi \in \bar{A})$.

Q2) a) $P(\Pi \in (A \cup B)) = P(\{\Pi \in A\} \cup \{\Pi \in B\}) \underset{\substack{\uparrow \\ A \cap B = \emptyset}}{=} P(\Pi \in A) + P(\Pi \in B)$.

Soit $k \in \mathbb{N}$.

$P(\{\Pi \in A \cup B\} \cap \{\Pi \leq k\}) = P((\{\Pi \in A\} \cup \{\Pi \in B\}) \cap \{\Pi \leq k\})$.

$P(\{\Pi \in A \cup B\} \cap \{\Pi \leq k\}) = P((\{\Pi \in A\} \cap \{\Pi \leq k\}) \cup (\{\Pi \in B\} \cap \{\Pi \leq k\}))$.

$P(\{\Pi \in A \cup B\} \cap \{\Pi \leq k\}) = P(\{\Pi \in A\} \cap \{\Pi \leq k\}) + P(\{\Pi \in B\} \cap \{\Pi \leq k\})$.

$\uparrow$ $A \cap B = \emptyset$ donc $(\{\Pi \in A\} \cap \{\Pi \leq k\}) \cap (\{\Pi \in B\} \cap \{\Pi \leq k\}) = \emptyset$.

Alors $f_{A \cup B}(k+1) = \frac{k!\, e^{\lambda}}{\lambda^{k+1}} \left[P(\{\Pi \in A \cup B\} \cap \{\Pi \leq k\}) - P(\Pi \in A \cup B) \times P(\Pi \leq k) \right]$.

$f_{A \cup B}(k+1) = \frac{k!\, e^{\lambda}}{\lambda^{k+1}} \left[P(\{\Pi \in A\} \cap \{\Pi \leq k\}) + P(\{\Pi \in B\} \cap \{\Pi \leq k\}) - (P(\Pi \in A) + P(\Pi \in B)) P(\Pi \leq k) \right]$

$f_{A \cup B}(k+1) = \frac{k!\, e^{\lambda}}{\lambda^{k+1}} \left[P(\{\Pi \in A\} \cap \{\Pi \leq k\}) - P(\Pi \in A) P(\Pi \leq k) \right] + \frac{k!\, e^{\lambda}}{\lambda^{k+1}} \left[P(\{\Pi \in B\} \cap \{\Pi \leq k\}) - P(\Pi \in B) P(\Pi \leq k) \right]$

$f_{A \cup B}(k+1) = f_A(k+1) + f_B(k+1)$ et ceci pour tout k dans $\mathbb{N}$.

De plus $f_{A \cup B}(0) = 0 = 0 + 0 = f_A(0) + f_B(0)$. Finalement :

$\forall k \in \mathbb{N}$, $f_{A \cup B}(k) = f_A(k) + f_B(k)$. Ainsi $f_{A \cup B} = f_A + f_B$ lorsque $A \cap B = \emptyset$.

b) $A \cap \bar{A} = \emptyset$ donc a) donne $f_{A\cup\bar{A}} = f_A + f_{\bar{A}}$.

Alors $\forall \ell \in \mathbb{N}$, $f_A(\ell) + f_{\bar{A}}(\ell) = f_{A\cup\bar{A}}(\ell) = f_{\mathbb{N}}(\ell) \underset{Q1a)}{=} 0$. $\forall \ell \in \mathbb{N}$, $f_{\bar{A}}(\ell) = -f_A(\ell)$.

Finalement $\underline{\underline{f_{\bar{A}} = -f_A}}$.

(Q3) a) Soit ℓ un élément de $\mathbb{N}$.

1er cas. $\ell = 0$. $\lambda f_A(\ell+1) - \ell f_A(\ell) = \lambda f_A(1) - 0 \times f_A(0) = \lambda f_A(1)$.

De plus $f_A(1) = \begin{cases} \dfrac{P(\Pi \in \bar{A})}{\lambda} & \text{si } 0 \in A \\ -\dfrac{P(\Pi \in A)}{\lambda} & \text{si } 0 \in \bar{A} \end{cases}$

donc $\lambda f_A(\ell+1) - \ell f_A(\ell) = \lambda f_A(1) = \begin{cases} P(\Pi \in \bar{A}) & \text{si } 0 \in A \quad (\text{ou si } \ell \in A) \\ -P(\Pi \in A) & \text{si } 0 \in \bar{A} \quad (\text{ou si } \ell \in \bar{A}) \end{cases}$.

2ème cas $\ell \geqslant 1$.

$\lambda f_A(\ell+1) - \ell f_A(\ell) = \lambda \frac{\ell!}{\lambda^{\ell+1}} e^{\lambda} [P(\{\Pi \in A\} \cap \{\Pi \leq \ell\}) - P(\Pi \in A) P(\Pi \leq \ell)] - \ell \frac{(\ell-1)!}{\lambda^{\ell}} e^{\lambda} [$

$P(\{\Pi \in A\} \cap \{\Pi \leq \ell-1\}) - P(\Pi \in A) P(\Pi \leq \ell-1)]$.

$\lambda f_A(\ell+1) - \ell f_A(\ell) = \frac{\ell!}{\lambda^{\ell}} e^{\lambda} \Big[P(\{\Pi \in A\} \cap \{\Pi \leq \ell\}) - P(\{\Pi \in A\} \cap \{\Pi \leq \ell-1\}) - P(\Pi \in A)(P(\Pi \leq \ell) - P(\Pi \leq \ell-1)) \Big]$

- $P(\Pi \leq \ell) - P(\Pi \leq \ell-1) = P(\Pi = \ell)$.
- $P(\{\Pi \in A\} \cap \{\Pi \leq \ell\}) = P(\{\Pi \in A\} \cap \{\Pi = \ell\}) + P(\{\Pi \in A\} \cap \{\Pi \leq \ell-1\})$.

Ainsi $\lambda f_A(\ell+1) - \ell f_A(\ell) = \frac{\ell!}{\lambda^{\ell}} e^{\lambda} \Big[P(\{\Pi \in A\} \cap \{\Pi = \ell\}) - P(\Pi \in A) P(\Pi = \ell) \Big]$. Distinguons deux cas

→ $\ell \in A$. Alors $P(\{\Pi \in A\} \cap \{\Pi = \ell\}) = P(\Pi = \ell) = \frac{\lambda^{\ell}}{\ell!} e^{-\lambda}$; $\frac{\ell! e^{\lambda}}{\lambda^{\ell}} P(\Pi = \ell) = 1$;

Donc $\lambda f_A(\ell+1) - \ell f_A(\ell) = \frac{\ell! e^{\lambda}}{\lambda^{\ell}} P(\Pi = \ell)(1 - P(\Pi \in A)) = 1 - P(\Pi \in A) = P(\Pi \in \bar{A})$.

→ $\ell \in \bar{A}$. Alors $P(\{\Pi \in A\} \cap \{\Pi = \ell\}) = 0$.

Donc $\lambda f_A(\ell+1) - \ell f_A(\ell) = \dfrac{\ell!\, e^{\lambda}}{\lambda^\ell}\left[-P(\Pi\in A)P(\Pi=\ell)\right] = -P(\Pi\in A)$.

Finalement $\forall \ell\in\mathbb{N},\ \lambda f_A(\ell+1) - \ell f_A(\ell) = \begin{cases} P(\Pi\in\bar A) & \text{si } \ell\in A \\ -P(\Pi\in A) & \text{si } \ell\in\bar A\end{cases}$.

b) $A\in\mathcal{P}(\mathbb{N})$, $A\neq\emptyset$ et $A\neq\mathbb{N}$. Alors $A\neq\emptyset$ et $\bar A\neq\emptyset$

$P(\Pi\in A) = \sum_{\ell\in A} P(\Pi=\ell) = \sum_{\ell\in A}\dfrac{\lambda^\ell}{\ell!}e^{-\lambda} > 0$; de même $P(\Pi\in\bar A) > 0$.

Alors $\lambda f_A(0+1) - 0 f_A(0) \neq 0$; $\lambda f_A(1)\neq 0$; $f_A(1)\neq 0$. f_A n'est pas identiquement nulle.

Si $A\in\mathcal{P}(\mathbb{N}) - \{\emptyset, \mathbb{N}\}$, f_A n'est pas identiquement nulle.

Q4 Ici $j\in\mathbb{N}^*$. — $\ell\in\mathbb{N}$ et non $\ell\in\mathbb{N}^*$ comme le propose le texte !

a) Soit $\ell\in\mathbb{N}$. $f_j(\ell+1) = \dfrac{\ell!}{\lambda^{\ell+1}}e^{\lambda}\left[P(\{\Pi\in\{j\}\}\cap\{\Pi\leq\ell\}) - P(\Pi\in\{j\})P(\Pi\leq\ell)\right]$.

$f_j(\ell+1) = \dfrac{\ell!}{\lambda^{\ell+1}}e^{\lambda}\left[P(\{\Pi=j\}\cap\{\Pi\leq\ell\}) - P(\Pi=j)P(\Pi\leq\ell)\right]$.

Notons que $P(\Pi=j) = \dfrac{\lambda^j}{j!}e^{-\lambda}$ et $P(\{\Pi=j\}\cap\{\Pi\leq\ell\}) = \begin{cases} P(\Pi=j) & \text{si } j\leq\ell \\ 0 & \text{si } j>\ell\end{cases}$

→ $j\leq\ell$. $f_j(\ell+1) = \dfrac{\ell!}{\lambda^{\ell+1}}e^{\lambda}P(\Pi=j)(1-P(\Pi\leq\ell)) = \dfrac{\ell!}{\lambda^{\ell+1}}e^{\lambda}\dfrac{\lambda^j}{j!}e^{-\lambda}P(\Pi\geq\ell+1)$.

$f_j(\ell+1) = \dfrac{\ell!}{j!\,\lambda^{\ell+1-j}}P(\Pi\geq\ell+1)$.

→ $j>\ell$ $f_j(\ell+1) = \dfrac{\ell!}{\lambda^{\ell+1}}e^{\lambda}(-P(\Pi=j)P(\Pi\leq\ell)) = -\dfrac{\ell!}{\lambda^{\ell+1}}e^{\lambda}\dfrac{\lambda^j}{j!}e^{-\lambda}P(\Pi\leq\ell)$.

$f_j(\ell+1) = -\dfrac{\ell!}{j!\,\lambda^{\ell-j+1}}P(\Pi\leq\ell)$.

$\forall\ell\in\mathbb{N}$, $f_j(\ell+1) = \begin{cases}\dfrac{\ell!}{j!\,\lambda^{\ell-j+1}}P(\Pi\geq\ell+1) & \text{si } \ell\geq j \\ -\dfrac{\ell!}{j!\,\lambda^{\ell-j+1}}P(\Pi\leq\ell) & \text{si } \ell< j\end{cases}$

b) $j \geq j$ donc $f_j(j+1) = \dfrac{j!}{j!\,\lambda^{j-j+1}} P(\Pi \geq j+1) = \dfrac{1}{\lambda} P(\Pi \geq j+1)$.

$0 \leq j-1 < j$ donc $f_j(j) = f_j((j-1)+1) = -\dfrac{(j-1)!}{j!\,\lambda^{j-1-j+1}} P(\Pi \leq j-1) = -\dfrac{1}{j} P(\Pi \leq j-1)$.

Alors $f_j(j+1) - f_j(j) = \dfrac{1}{\lambda} P(\Pi \geq j+1) + \dfrac{1}{j} P(\Pi \leq j-1)$

Or $\dfrac{1}{\lambda} > 0$, $P(\Pi \geq j+1) > 0$, $\dfrac{1}{j} > 0$ et $P(\Pi \leq j-1) > 0$. Ainsi $f_j(j+1) - f_j(j) > 0$.

$$f_j(j+1) - f_j(j) = \frac{1}{\lambda} P(\Pi \geq j+1) + \frac{1}{j} P(\Pi \leq j-1) \text{ et } f_j(j+1) - f_j(j) > 0.$$

<u>Remarque</u>.. Si $j = 0$:
$f_j(j+1) - f_j(j) = f_0(1) = \dfrac{1}{\lambda} P(\Pi \geq 1) > 0$.

c) Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et $k \neq j$.

$\boxed{\cdot}$ Supposons $k > j$. Alors $k-1 \geq j$.

$$f_j(k+1) - f_j(k) = f_j(k+1) - f_j((k-1)+1) = \frac{k!}{j!\,\lambda^{k-j+1}} P(\Pi \geq k+1) - \frac{(k-1)!}{j!\,\lambda^{k-1-j+1}} P(\Pi \geq k).$$

$$f_j(k+1) - f_j(k) = \frac{(k-1)!}{j!\,\lambda^{k-j+1}} \left[k P(\Pi \geq k+1) - \lambda P(\Pi \geq k) \right].$$

Ainsi $f_j(k+1) - f_j(k)$ est du signe de $k P(\Pi \geq k+1) - \lambda P(\Pi \geq k)$.

Lemme 1.. Pour tout r dans $\mathbb{N}$, $r P(\Pi \geq r+1) - \lambda P(\Pi \geq r) < 0$.

Soit $r \in \mathbb{N}$; $r P(\Pi \geq r+1) - \lambda P(\Pi \geq r) = r \displaystyle\sum_{i=r+1}^{+\infty} \frac{\lambda^i}{i!} e^{-\lambda} - \lambda \sum_{i=r}^{+\infty} \frac{\lambda^i}{i!} e^{-\lambda}$.

$$r P(\Pi \geq r+1) - \lambda P(\Pi \geq r) = \sum_{i=r+1}^{+\infty} r \frac{\lambda^i}{i!} e^{-\lambda} - \underbrace{\sum_{i=r}^{+\infty} \frac{\lambda^{i+1}}{i!} e^{-\lambda}}_{i \to i-1} = \left[\sum_{i=r+1}^{+\infty} r \frac{\lambda^i}{i!} - \sum_{i=r+1}^{+\infty} \frac{\lambda^i}{(i-1)!} \right] e^{-\lambda}.$$

$$r P(\Pi \geq r+1) - \lambda P(\Pi \geq r) = e^{-\lambda} \sum_{i=r+1}^{+\infty} \frac{\lambda^i}{i!} (r - i) < 0$$

$\forall i \in [\![r+1, +\infty [\![$, $r - i < 0$

En particulier $k P(\Pi \geq k+1) - \lambda P(\Pi \geq k) < 0$.

Ainsi $f_j(k+1) - f_j(k) < 0$.

$\boxed{\cdot}$ $\ell < j$. Alors $0 \leq \ell-1 < j$.

$$f_j(\ell+1)-f_j(\ell) = f_j(\ell+1)-f_j((\ell-1)+1) = -\frac{\ell!}{j!\,\lambda^{\ell-j+1}}P(\Pi \leq \ell) + \frac{(\ell-1)!}{j!\,\lambda^{\ell-1-j+1}}P(\Pi \leq \ell-1).$$

$$f_j(\ell+1)-f_j(\ell) = \frac{(\ell-1)!}{j!\,\lambda^{\ell-j+1}}\left[\lambda P(\Pi \leq \ell-1) - \ell P(\Pi \leq \ell)\right].$$

$f_j(\ell+1)-f_j(\ell)$ est du signe de $\lambda P(\Pi \leq \ell-1) - \ell P(\Pi \leq \ell)$.

Lemme 2. $\forall r \in \mathbb{N}^*$, $\lambda P(\Pi \leq r-1) - r P(\Pi \leq r) \leq -re^{-\lambda}$.

Soit $r \in \mathbb{N}^*$. $\lambda P(\Pi \leq r-1) - r P(\Pi \leq r) = \displaystyle\sum_{i=0}^{r-1} \frac{\lambda^{i+1}}{i!}e^{-\lambda} - \sum_{i=0}^{r} r\frac{\lambda^i}{i!}e^{-\lambda}$.

$i \to i-1$

$$\lambda P(\Pi \leq r-1) - r P(\Pi \leq r) = \sum_{i=1}^{r} \frac{\lambda^i}{(i-1)!}e^{-\lambda} - \sum_{i=0}^{r} r\frac{\lambda^i}{i!}e^{-\lambda} = -re^{-\lambda} - \sum_{i=1}^{r}\frac{\lambda^i}{i!}(r-i)e^{-\lambda}.$$

$\lambda P(\Pi \leq r-1) - r P(\Pi \leq r) \leq -re^{-\lambda}$ car $\displaystyle\sum_{i=1}^{r}\frac{\lambda^i}{i!}(r-i)e^{-\lambda} \geq 0$ puisque

$\forall i \in [\![1, r]\!]$, $\frac{\lambda^i}{i!}(r-i)e^{-\lambda} \geq 0$. Ceci achève la démonstration du lemme 2.

Alors $\lambda P(\Pi \leq \ell-1) - \ell P(\Pi \leq \ell) \leq -\ell e^{-\lambda} < 0$ $\quad (\ell \in \mathbb{N}^*)$

Donc $f_j(\ell+1)-f_j(\ell) < 0$.

Finalement $\underline{\underline{\forall \ell \in \mathbb{N}^* - \{j\},\ f_j(\ell+1)-f_j(\ell) < 0.}}$

$P(\Pi \leq 0) = P(\Pi = 0) = e^{-\lambda}$

<u>Remarque</u>.. $f_j(0+1)-f_j(0) = f_j(0+1) \underset{0<j}{=} -\frac{0!}{j!\,\lambda^{0-j+1}}P(\Pi \leq 0) = -\frac{\lambda^{j-1}}{j!}e^{-\lambda} < 0$.

Ainsi $\forall \ell \in \mathbb{N} - \{j\}$, $f_j(\ell+1)-f_j(\ell) < 0$ et $f_j(j+1)-f_j(j) > 0$.

<u>Alors pour tout ℓ dans $\mathbb{N}$ $f_j(\ell+1)-f_j(\ell) > 0$ (resp. $f_j(\ell+1)-f_j(\ell) \geq 0$) si et</u>

<u>seulement si $\ell = j$ et ceci pour tout $j \in \mathbb{N}^*$.</u>

d) Nous avons vu que $f_j(j+1)-f_j(j)=\frac{1}{\lambda}P(\Pi\geq j+1)+\frac{1}{j}P(\Pi\leq j-1)$.

Le lemme 2 donne $\lambda P(\Pi\leq j-1)-j\,P(\Pi\leq j)\leq -j\,e^{-\lambda}$.

Alors $\lambda P(\Pi\leq j-1)\leq j\,(P(\Pi\leq j)-e^{-\lambda})$; $\frac{1}{j}P(\Pi\leq j-1)\leq\frac{1}{\lambda}(P(\Pi\leq j)-e^{-\lambda})$.

Donc $f_j(j+1)-f_j(j)\leq\frac{1}{\lambda}P(\Pi\geq j+1)+\frac{1}{\lambda}(P(\Pi\leq j)-e^{-\lambda})=\frac{1}{\lambda}[\underbrace{P(\Pi\geq j+1)+P(\Pi\leq j)}_{=1}-e^{-\lambda}]$

$f_j(j+1)-f_j(j)\leq\frac{1-e^{-\lambda}}{\lambda}$.

$\lambda>0$ et $-e^{-\lambda}<0$ donc $\frac{1-e^{-\lambda}}{\lambda}<\frac{1}{\lambda}$.

Rappelons que $\forall x\in\mathbb{R}$, $e^{x}\geq x+1$ (inégalité de convexité classique).

Alors $e^{-\lambda}\geq-\lambda+1$; $\lambda\geq1-e^{-\lambda}$; $1\geq\frac{1-e^{-\lambda}}{\lambda}$.

Ainsi $\frac{1-e^{-\lambda}}{\lambda}<\frac{1}{\lambda}$ et $\frac{1-e^{-\lambda}}{\lambda}\leq1$; $\frac{1-e^{-\lambda}}{\lambda}\leq\min(1,\frac{1}{\lambda})$.

Finalement $\underline{\underline{f_j(j+1)-f_j(j)\leq\frac{1-e^{-\lambda}}{\lambda}\leq\min(1,\frac{1}{\lambda})}}$.

Q5 Soit $\ell\in\mathbb{N}^*$. $f_0(\ell+1)=\frac{\ell!}{\lambda^{\ell+1}}e^{\lambda}[P(\{\Pi=0\}\cap\{\Pi\leq\ell\})-P(\Pi=0)P(\Pi\leq\ell)]$.

$$f_0(\ell+1)=\frac{\ell!}{\lambda^{\ell+1}}e^{\lambda}[P(\Pi=0)-P(\Pi=0)P(\Pi\leq\ell)].$$

$$f_0(\ell+1)=\frac{\ell!}{\lambda^{\ell+1}}\underbrace{e^{\lambda}P(\Pi=0)}_{=1}(1-P(\Pi\leq\ell))=\frac{\ell!}{\lambda^{\ell+1}}P(\Pi\geq\ell+1).$$

On montre de même que $f_0(\ell)=\frac{(\ell-1)!}{\lambda^{\ell}}P(\Pi\geq\ell)$.

Alors $f_0(\ell+1)-f_0(\ell)=\frac{(\ell-1)!}{\lambda^{\ell+1}}[\ell\,P(\Pi\geq\ell+1)-\lambda\,P(\Pi\geq\ell)]\overset{\text{lemme 1}}{<}0$

$\underline{\underline{\forall\ell\in\mathbb{N}^*,\ f_0(\ell+1)-f_0(\ell)<0.}}$

Remarque. $f_0(0+1)-f_0(0)=f_0(1)\overset{0\in\{0\}\text{ et }\Pi\in\{1\}}{=}\frac{1}{\lambda}P(\Pi\in\overline{\{0\}})=\frac{1}{\lambda}P(\Pi\in\mathbb{N}^*)=\frac{1-e^{-\lambda}}{\lambda}>0$.

Ainsi ces résultats de Q4 c) et d) valent en cas pour $j=0$.

(Q6) a) Soit $\ell \in \mathbb{N}$. Supposons que $\forall j \in \mathbb{N}$, $f_j(\ell+1)-f_j(\ell)$ est strictement négatif pour $j \neq \ell$ et strictement positif pour $j=\ell$.

Montrons que $f_A(\ell+1)-f_A(\ell) \leq f_\ell(\ell+1)-f_\ell(\ell)$.

* Si A est vide c'est clair car $f_A(\ell+1)-f_A(\ell)=0-0=0 \leq f_\ell(\ell+1)-f_\ell(\ell)$.

Supposons A non vide.

* Si $A=\{\ell\}$ c'est encore clair car $f_A(\ell+1)-f_A(\ell)=f_\ell(\ell+1)-f_\ell(\ell)$.

* Supposons alors $A \neq \emptyset$, $A \neq \{\ell\}$ et A fini(e).

<u>1er cas</u>.. $\ell \notin A$. Soit $j_1, j_2, \dots, j_r$ les éléments distincts de A.

$$f_A = f_{\{j_1,j_2,\dots,j_r\}} = f_{\{j_1\}\cup\{j_2\}\cup\dots\cup\{j_r\}} = \sum_{i=1}^{r} f_{j_i}.$$

Alors $f_A(\ell+1)-f_A(\ell)=\sum_{i=1}^{r}(f_{j_i}(\ell+1)-f_{j_i}(\ell)) \underset{\substack{\uparrow \\ \forall i\in[\![1,r]\!],\, j_i\neq \ell}}{<} 0 < f_\ell(\ell+1)-f_\ell(\ell)$.

<u>2ème cas</u>.. $\ell \in A$. Alors $A'=A-\{\ell\}$ est une partie non vide ne contenant pas ℓ.

Ainsi $f_{A'}(\ell+1)-f_{A'}(\ell)<0$ (même démonstration que dans le 1er cas...)

$A=A'\cup\{\ell\}$ et $A'\cap\{\ell\}=\emptyset$ donc $f_A=f_{A'}+f_{\{\ell\}}=f_{A'}+f_\ell$.

$$f_A(\ell+1)-f_A(\ell)=\underbrace{f_{A'}(\ell+1)-f_{A'}(\ell)}_{\leq 0}+f_\ell(\ell+1)-f_\ell(\ell) \leq f_\ell(\ell+1)-f_\ell(\ell).$$

Ainsi $\forall \ell \in \mathbb{N}$, $f_A(\ell+1)-f_A(\ell) \leq f_\ell(\ell+1)-f_\ell(\ell)$.

* Supposons A infini(e). A étant une partie de $\mathbb{N}$, A est alors dénombrable.
A est en bijection avec $\mathbb{N}$. Soit φ une bijection de $\mathbb{N}$ sur A.
Posons $\forall j \in \mathbb{N}$, $a_j=\varphi(j)$.

Soit $i \in \mathbb{N}$.

$$P(\{R\in A\}\cap\{R\leq i\}) = P\left(\bigcup_{j=0}^{+\infty}\{R=a_j\}\cap(R\leq i)\right) \underset{\substack{\uparrow\\ \text{incompatibilité}}}{=} \sum_{j=0}^{+\infty} P(\{R=a_j\}\cap(R\leq i)).$$

De même $P(\{\Pi \in A\}) = P\left(\bigcup_{j=0}^{+\infty} \{\Pi \in \{a_j\}\}\right) = \sum_{j=0}^{+\infty} P(\{\Pi \in \{a_j\}\})$.

Alors $f_A(i+1) = \frac{i!}{\lambda^{i+1}} e^{\lambda} \left[\sum_{j=0}^{+\infty} P(\{\Pi \in \{a_j\}\} \cap \{\Pi \leq i\}) - \left(\sum_{j=0}^{+\infty} P(\{\Pi \in \{a_j\}\})\right) P(\Pi \leq i) \right]$

Donc $f_A(i+1) = \sum_{j=0}^{+\infty} \left[\frac{i!\, e^{\lambda}}{\lambda^{i+1}} \left(P(\{\Pi \in \{a_j\}\} \cap \{\Pi \leq i\}) - P(\{\Pi \in \{a_j\}\}) P(\Pi \leq i) \right) \right]$

$f_A(i+1) = \sum_{j=0}^{+\infty} f_{\{a_j\}}(i+1)$. Ceci pour tout $i \in \mathbb{N}$.

Alors $\forall i \in \mathbb{N}^*$, $f_A(i) = \sum_{j=0}^{+\infty} f_{\{a_j\}}(i)$. Ceci est encore vraie pour $i=0$.

Finalement $\forall i \in \mathbb{N}$, $f_A(i) = \sum_{j=0}^{+\infty} f_{\{a_j\}}(i)$. Démontrons alors le résultat demandé.

1er cas.. $k \notin A$: $\forall j \in \mathbb{N}$, $k \neq a_j$; $\forall j \in \mathbb{N}$, $f_{\{a_j\}}(k+1) - f_{\{a_j\}}(k) < 0$.

Alors $f_A(k+1) - f_A(k) = \sum_{j=0}^{+\infty} \left(f_{\{a_j\}}(k+1) - f_{\{a_j\}}(k) \right) < 0 < f_k(k+1) - f_k(k)$.

2e cas.. $k \in A$. $\exists! \, j_0 \in \mathbb{N}$, $k = a_{j_0}$.

Alors $f_A(k+1) - f_A(k) = \sum_{j=0}^{+\infty} \left(f_{\{a_j\}}(k+1) - f_{\{a_j\}}(k) \right)$

$f_A(k+1) - f_A(k) = \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq j_0}}^{+\infty} \underbrace{\left(f_{\{a_j\}}(k+1) - f_{\{a_j\}}(k) \right)}_{<0} + \left(f_{\{a_{j_0}\}}(k+1) - f_{\{a_{j_0}\}}(k) \right) < f_{\{a_{j_0}\}}(k+1) - f_{\{a_{j_0}\}}(k)$.

$f_A(k+1) - f_A(k) < f_{\{a_{j_0}\}}(k+1) - f_{\{a_{j_0}\}}(k) = f_k(k+1) - f_k(k)$.

Ainsi $\forall k \in \mathbb{N}$, $f_A(k+1) - f_A(k) \leq f_k(k+1) - f_k(k)$ et ceci pour toute partie A de $\mathbb{N}$.

b) Soit $k \in \mathbb{N}$. 1er cas.. $f_A(k+1) - f_A(k) \geq 0$.

$|f_A(k+1) - f_A(k)| = f_A(k+1) - f_A(k) \leq f_k(k+1) - f_k(k) \leq \min(1, \frac{1}{\lambda})$.

2ème cas.. $f_A(k+1) - f_A(k) \leq 0$. Rappelons que $f_A = -f_{\bar{A}}$.

$|f_A(k+1) - f_A(k)| = f_A(k) - f_A(k+1) = f_{\bar{A}}(k+1) - f_{\bar{A}}(k) \leq f_k(k+1) - f_k(k) \leq \min(1, \frac{1}{\lambda})$.

Cl.) $\forall k \in \mathbb{N}$, $|f_A(k+1) - f_A(k)| \leq \min(1, \frac{1}{\lambda})$ donc $\sup_{k \geq 0} |f_A(k+1) - f_A(k)|$ existe et majoré par $\min(1, \frac{1}{\lambda})$.

PARTIE III

Q1 a) Notons que $\forall \omega \in \Omega$, $X_i(\omega) f(W_n(\omega)) = X_i(\omega) f(1+R_i(\omega))$.

Soit $\omega \in \Omega$. Si $X_i(\omega)=0$ l'égalité précédente est claire.

Supposons que $X_i(\omega)=1$.

$X_i(\omega) f(W_n(\omega)) = f(W_n(\omega)) = f(X_i(\omega)+R_i(\omega)) = f(1+R_i(\omega)) = X_i(\omega) f(1+R_i(\omega))$.

Finalement $\forall \omega \in \Omega$, $X_i(\omega) f(W_n(\omega)) = X_i(\omega) f(1+R_i(\omega))$. $\underline{\underline{X_i f(W_n) = X_i f(1+R_i)}}$.

b) $X_i f(W_n) = X_i f(1+R_i)$ est une variable aléatoire discrète finie donc elle possède une espérance. Pour les mêmes raisons X_i et $f(1+R_i)$ possèdent une espérance.

Ainsi $E(X_i f(W_n)) = E(X_i f(1+R_i))$.

$1+R_i = 1+\sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n} X_k$; ainsi $f(1+R_i)$ est une fonction des variables aléatoires $X_1, X_2, \dots, X_{i-1}, X_{i+1}, \dots, X_n$. Or $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont indépendantes ; par conséquent X_i et $f(1+R_i)$ sont indépendantes. Ainsi $E(X_i f(1+R_i)) = E(X_i)\, E(f(1+R_i))$.

Notons que $E(X_i) = P(X_i=1) = p_i$

Finalement $\underline{\underline{E(X_i f(W_n)) = p_i\, E(f(1+R_i))}}$.

Q2 $\lambda_n f(1+W_n) - W_n f(W_n) = \sum_{i=1}^{n} p_i f(1+W_n) - \sum_{i=1}^{n} X_i f(W_n)$. Par linéarité de l'espérance :

$E(\lambda_n f(1+W_n) - W_n f(W_n)) = \sum_{i=1}^{n} p_i\, E(f(1+W_n)) - \sum_{i=1}^{n} E(X_i f(W_n))$

$E(\lambda_n f(1+W_n) - W_n f(W_n)) = \sum_{i=1}^{n} p_i\, E(f(1+W_n)) - \sum_{i=1}^{n} p_i\, E(f(1+R_i))$

$E(\lambda_n f(1+W_n) - W_n f(W_n)) = \sum_{i=1}^{n} p_i\, E[f(1+W_n) - f(1+R_i)] = \sum_{i=1}^{n} p_i\, E(Y_i)$

$$\underline{\underline{E(\lambda_n f(1+W_n) - W_n f(W_n)) = \sum_{i=1}^{n} p_i\, E(Y_i)}}.$$

(Q3) a) Soit $i \in [\![1,n]\!]$. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$P_{\{X_i=1\}}(Y_i=\alpha) = \frac{P(\{X_i=1\}\cap\{Y_i=\alpha\})}{P(X_i=1)} = \frac{P(\{X_i=1\}\cap\{f(1+X_i+R_i)-f(1+R_i)=\alpha\})}{P(X_i=1)}$$

$$P_{\{X_i=1\}}(Y_i=\alpha) = \frac{1}{P(X_i=1)} \times P(\{X_i=1\}\cap\{f(2+R_i)-f(1+R_i)=\alpha\})$$

Or X_i et $f(2+R_i)-f(1+R_i)$ sont indépendantes donc

$$P_{\{X_i=1\}}(Y_i=\alpha) = \frac{1}{P(X_i=1)}\, P(X_i=1)\, P(f(2+R_i)-f(1+R_i)=\alpha) = P(f(2+R_i)-f(1+R_i)=\alpha)$$

Notons que $P_{\{X_i=1\}}(Y_i=\alpha)=0 \iff P(f(2+R_i)-f(1+R_i)=\alpha)=0$. ▲

Ainsi $E(Y_i/\{X_i=1\}) = \sum_{\alpha\in Y_i(\Omega)} \alpha\, P_{\{X_i=1\}}(Y_i=\alpha) = \sum_{\alpha\in Y_i(\Omega)} \alpha\, P(f(2+R_i)-f(1+R_i)=\alpha)$

Audédite ! Avec ▲ ...

Donc $E(Y_i/\{X_i=1\}) = \sum_{\alpha\in Y_i(\Omega)} \alpha\, P(f(2+R_i)-f(1+R_i)=\alpha) = \sum_{\alpha\in (f(2+R_i)-f(1+R_i))(\Omega)} \alpha\, P(f(2+R_i)-f(1+R_i)=\alpha)$

$E(Y_i/\{X_i=1\}) = E(f(2+R_i)-f(1+R_i))$ pour tout i dans $[\![1,n]\!]$.

b) Un raisonnement rigoureusement analogue donne :

$\forall i\in[\![1,n]\!]$, $E(Y_i/\{X_i=0\}) = E(f(1+R_i)-f(1+R_i)) = 0$.

$\forall i\in[\![1,n]\!]$, $E(Y_i/\{X_i=0\}) = 0$.

c) $\forall i\in[\![1,n]\!]$, $E(Y_i) = P(X_i=0)\,E(Y_i/\{X_i=0\}) + P(X_i=1)\,E(Y_i/\{X_i=1\})$

$\forall i\in[\![1,n]\!]$, $E(Y_i) = p_i\, E(f(2+R_i)-f(1+R_i))$

$$E(\lambda_n f(1+W_n) - W_n f(W_n)) = \sum_{i=1}^{n} p_i E(Y_i) = \sum_{i=1}^{n} p_i^2\, E(f(2+R_i)-f(1+R_i))$$

$$E(\lambda_n f(1+W_n) - W_n f(W_n)) = \sum_{i=1}^{n} p_i^2\, E(f(2+R_i)-f(1+R_i)).$$

Q4 $|E(\lambda_n f(1+W_n)-W_n f(W_n))| = |\sum_{i=1}^{n} p_i^2 E(f(2+R_i)-f(1+R_i))|$:

$|E(\lambda_n f(1+W_n)-W_n f(W_n))| \leq \sum_{i=1}^{n} p_i^2 \, |E(f(2+R_i)-f(1+R_i))|$.

Soit $\omega \in \Omega$. $|f(2+R_i(\omega))-f(1+R_i(\omega))| \leq \min(1, \frac{1}{\lambda_n})$ d'après Q6 b).

Posons pour simplifier les écritures $\gamma_n = \min(1, \frac{1}{\lambda_n})$.

$\forall \omega \in \Omega$, $-\gamma_n \leq f(2+R_i(\omega))-f(1+R_i(\omega)) \leq \gamma_n$.

Alors la croissance de l'espérance donne :

$-\gamma_n \leq E(f(2+R_i)-f(1+R_i)) \leq \gamma_n$

Ainsi $|E(f(2+R_i)-f(1+R_i))| \leq \gamma_n = \min(1, \frac{1}{\lambda_n})$.

Par conséquent $\underline{|E(\lambda_n f(1+W_n)-W_n f(W_n))| \leq \min(1, \frac{1}{\lambda_n}) \sum_{i=1}^{n} p_i^2}$.

Q5 La relation de transfert donne :

$E(\lambda_n f(1+W_n)-W_n f(W_n)) = \sum_{\ell=0}^{n} (\lambda_n f(1+\ell)-\ell f(\ell)) P(W_n=\ell)$.

$E(\lambda_n f(1+W_n)-W_n f(W_n)) = \sum_{\ell \in [\![0,n]\!] \cap A} P(\Pi_n \in \bar{A}) P(W_n=\ell) - \sum_{\ell \in [\![0,n]\!] \cap \bar{A}} P(\Pi_n \in A) P(W_n=\ell)$, d'après II Q3 a)

$E(\lambda_n f(1+W_n)-W_n f(W_n)) = P(\Pi_n \in \bar{A}) P(W_n \in A) - P(\Pi_n \in A) P(W_n \in \bar{A})$

$E(\lambda_n f(1+W_n)-W_n f(W_n)) = P(\Pi_n \in \bar{A}) P(W_n \in A) - P(\Pi_n \in A)(1-P(W_n \in A))$

$E(\lambda_n f(1+W_n)-W_n f(W_n)) = (P(\Pi_n \in \bar{A}) + P(\Pi_n \in A)) P(W_n \in A) - P(\Pi_n \in A)$

$\underline{E(\lambda_n f(1+W_n)-W_n f(W_n)) = P(W_n \in A) - P(\Pi_n \in A)}$.

Q4 donne alors $\underline{|P(W_n \in A) - P(\Pi_n \in A)| \leq \min(1, \frac{1}{\lambda_n}) \sum_{i=1}^{n} p_i^2 \text{ pour toute partie } A \text{ de } \mathbb{N}}$.

Q6 a) $\lambda_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n+i} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1+\frac{i}{n}}$.

$\varphi : x \mapsto \frac{1}{1+x}$ est continue sur $[0,1]$ donc $\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n}\varphi\left(\frac{i}{n}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge

vers $\int_0^1 \varphi(t)\,dt$.

Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \lambda_n = \int_0^1 \varphi(t)\,dt = \int_0^1 \frac{1}{1+t}\,dt = [\ln(1+t)]_0^1 = \ln 2$.

$\underline{\underline{\lim\limits_{n\to+\infty} \lambda_n = \ln 2.}}$

$0 \leq \sum_{i=1}^{n} p_i^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(n+i)^2} \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{n}{(n+1)^2}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n}{(n+1)^2} = 0$.

Il vient alors par encadrement $\underline{\underline{\lim\limits_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} p_i^2 = 0.}}$

b) Soit $\ell \in \mathbb{N}$. D'après Q5 $|P(W_n \in \{\ell\}) - P(\Pi_n \in \{\ell\})| \leq \min\left(1, \frac{1}{\lambda_n}\right) \sum_{i=1}^{n} p_i^2$

Ainsi : $0 \leq |P(W_n = \ell) - P(\Pi_n = \ell)| \leq \min\left(1, \frac{1}{\lambda_n}\right) \sum_{i=1}^{n} p_i^2$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} \lambda_n = \ln 2 < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{\lambda_n} = \frac{1}{\ln 2} > 1$. Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \min\left(1, \frac{1}{\lambda_n}\right) = 1$.

Par conséquent $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\min\left(1, \frac{1}{\lambda_n}\right) \sum_{i=1}^{n} p_i^2\right) = 1 \times 0 = 0$

Par encadrement on obtient alors $\lim\limits_{n\to+\infty} (P(W_n = \ell) - P(\Pi_n = \ell)) = 0$.

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} P(\Pi_n = \ell) = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\lambda_n^\ell}{\ell!} e^{-\lambda_n} = \frac{(\ln 2)^\ell}{\ell!} e^{-\ln 2}$

Ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} P(W_n = \ell) = \lim\limits_{n\to+\infty} \left((P(W_n = \ell) - P(\Pi_n = \ell)) + P(\Pi_n = \ell)\right) = 0 + \frac{(\ln 2)^\ell}{\ell!} e^{-\ln 2}$

$\forall \ell \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} P(W_n = \ell) = \frac{(\ln 2)^\ell}{\ell!} e^{-\ln 2}$. <u>La suite $(W_n)_{n\geq 1}$ converge en loi vers une</u>

<u>variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre $\ln 2$.</u>

PARTIE IV

Q1 a) $\forall$ soit $i \in [\![1,n]\!]$ Si X_i prend la valeur 0, $X_i f(W_n)$ prend la valeur 0.

Ainsi $E(X_i f(W_n) / \{X_i = 0\}) = 0$.

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$!!

$$P_{\{X_i=1\}}(X_i f(W_n) = \alpha) = \frac{P(\{X_i=1\} \cap \{X_i f(W_n) = \alpha\})}{P(X_i=1)} = \frac{1}{P(X_i=1)} P(\{X_i=1\} \cap \{1 \times f(1+R_i) = \alpha\})$$

$$P_{\{X_i=1\}}(X_i f(W_n) = \alpha) = \frac{1}{P(X_i=1)} P(\{X_i=1\} \cap \{f(1+R_i) = \alpha\}) = P_{\{X_i=1\}}(f(1+R_i) = \alpha).$$

Ainsi la loi de $X_i f(W_n)$ sachant que $\{X_i=1\}$ est la même que la loi de $f(1+R_i)$ sachant que $\{X_i=1\}$.

Alors $E(X_i f(W_n) / \{X_i=1\}) = E(f(1+R_i) / \{X_i=1\})$

$$\text{Donc } E(X_i f(W_n)) = \underbrace{P(X_i=1)}_{p_i} \underbrace{E(X_i f(W_n) / \{X_i=1\})}_{E(f(1+R_i) | \{X_i=1\})} + P(X_i=0) \underbrace{E(X_i f(W_n) / \{X_i=0\})}_{=0}$$

Donc $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $E(X_i f(W_n)) = p_i\, E(f(1+R_i) / \{X_i=1\})$.

b) Comme dans III Q5 on a : $P(W_n \in A) - P(\Pi_n \in A) = E(\lambda_n f(1+W_n) - W_n f(W_n))$.

$$E(\lambda_n f(1+W_n) - W_n f(W_n)) = E\left(\sum_{i=1}^{n} p_i f(1+W_n) - \sum_{i=1}^{n} X_i f(W_n)\right) = E\left(\sum_{i=1}^{n} \left(p_i f(1+W_n) - X_i f(W_n)\right)\right).$$

$$E(\lambda_n f(1+W_n) - W_n f(W_n)) = \sum_{i=1}^{n} \left(p_i E(f(1+W_n)) - E(X_i f(W_n))\right).$$

$$E(\lambda f(1+W_n) - W_n f(W_n)) = \sum_{i=1}^{n} p_i \left[E(f(1+W_n)) - E(f(1+R_i) / \{X_i=1\})\right].$$

Ainsi $P(W_n \in A) - P(\Pi_n \in A) = \sum_{i=1}^{n} p_i \left[E(f(1+W_n)) - E(f(1+R_i) / \{X_i=1\})\right]$.

Q2) a) Soit $(\ell,j)\in\mathbb{N}^2$. Supposons $\ell\leq j$.

Si $\ell=j$: $|f(\ell)-f(j)|=0\leq 0\min(1,\frac{1}{\lambda_n})=|\ell-j|\min(1,\frac{1}{\lambda_n})$. Supposons donc $\ell<j$.

$$|f(\ell)-f(j)|=\left|-\sum_{\ell=\ell}^{j-1}(f(\ell+1)-f(\ell))\right|\leq\sum_{\ell=\ell}^{j-1}|f(\ell+1)-f(\ell)|\leq\sum_{\ell=\ell}^{j-1}\min(1,\frac{1}{\lambda_n})=(j-\ell)\min(1,\frac{1}{\lambda_n})$$

$$|f(\ell)-f(j)|\leq(j-\ell)\min(1,\frac{1}{\lambda_n})=|j-\ell|\min(1,\frac{1}{\lambda_n})=|\ell-j|\min(1,\frac{1}{\lambda_n}).$$

$\forall(\ell,j)\in\mathbb{N}^2$, $\ell\leq j\Rightarrow|f(\ell)-f(j)|\leq|\ell-j|\min(1,\frac{1}{\lambda_n})$.

Soit $(\ell,j)\in\mathbb{N}^2$ tel que $\ell>j$. Alors $j<\ell$!

Ainsi $|f(\ell)-f(j)|=|f(j)-f(\ell)|\leq|j-\ell|\min(1,\frac{1}{\lambda_n})=|\ell-j|\min(1,\frac{1}{\lambda_n})$.

$\forall(j,\ell)\in\mathbb{N}^2$, $|f(\ell)-f(j)|\leq|\ell-j|\min(1,\frac{1}{\lambda_n})$.

$$|P(W_n\in A)-P(\Pi_n\in A)|=\left|\sum_{i=1}^{n}p_i\left[E(f(1+W_n))-E(f(1+R_i)/\{X_i=1\})\right]\right|.$$

$$|P(W_n\in A)-P(\Pi_n\in A)|\leq\sum_{i=1}^{n}p_i\left|E(f(1+W_n))-E(f(1+R_i)/\{X_i=1\})\right|.$$

Soit $i\in[\![1,n]\!]$. Le théorème de transfert donne :

$$E(f(1+R_i)/\{X_i=1\})=\sum_{\alpha\in R_i(\Omega)}f(1+\alpha)P_{\{X_i=1\}}(R_i=\alpha)=\sum_{\alpha\in Z_i(\Omega)}f(1+\alpha)P(Z_i=\alpha)$$

Ainsi $E(f(1+R_i)/\{X_i=1\})=E(f(1+Z_i))$.

Alors $E(f(1+W_n))-E(f(1+R_i)/\{X_i=1\})=E\left(f(1+W_n)-f(1+Z_i)\right)$

$\forall\omega\in\Omega$ $|f(1+W_n(\omega))-f(1+Z_i(\omega))|\leq|1+W_n(\omega)-(1+Z_i(\omega))|\min(1,\frac{1}{\lambda_n})$.

$\forall\omega\in\Omega$, $-\min(1,\frac{1}{\lambda_n})|W_n(\omega)-Z_i(\omega)|\leq f(1+W_n(\omega))-f(1+Z_i(\omega))\leq\min(1,\frac{1}{\lambda_n})|W_n(\omega)-Z_i(\omega)|$

Donc $-\min(1,\frac{1}{\lambda_n})|W_n-Z_i|\leq f(1+W_n)-f(1+Z_i)\leq\min(1,\frac{1}{\lambda_n})|W_n-Z_i|$.

Par croissance de l'espérance il vient :

$-\min(1,\frac{1}{\lambda_n})\, E(|W_n-Z_i|) \le E(f(1+W_n)-f(1+Z_i)) \le \min(1,\frac{1}{\lambda_n})\, E(|W_n-Z_i|)$.

donc $|E(f(1+W_n)-f(1+Z_i))| \le \min(1,\frac{1}{\lambda_n})\, E(|W_n-Z_i|)$. Ainsi :

$|E(f(1+W_n)) - E(f(1+R_i)/\{X_i=1\})| \le \min(1,\frac{1}{\lambda_n})\, E(|W_n-Z_i|)$ pour tout $i\in[\![1,n]\!]$

Alors $\sum_{i=1}^{n} p_i\, |E(f(1+W_n)) - E(f(1+Z_i)/\{X_i=1\})| \le \min(1,\frac{1}{\lambda_n}) \sum_{i=1}^{n} p_i\, E(|W_n-Z_i|)$.

Finalement $|P(W_n\in A) - P(\Pi_n\in A)| \le \min(1,\frac{1}{\lambda_n}) \sum_{i=1}^{n} p_i\, E(|W_n-Z_i|)$.

soit $i\in[\![1,n]\!]$

b) $\forall\omega\in\Omega,\ W_n(\omega)\ge Z_i(\omega)$. $\forall\omega\in\Omega,\ (W_n-Z_i)(\omega)\ge 0$.

Ainsi $|W_n-Z_i| = W_n-Z_i$ et ceci pour tout $i\in[\![1,n]\!]$.

Alors $\sum_{i=1}^{n} p_i\, E(|W_n-Z_i|) = \sum_{i=1}^{n} p_i\, E(W_n-Z_i) = \left(\sum_{i=1}^{n} p_i\right) E(W_n) - \sum_{i=1}^{n} p_i\, E(Z_i)$.

$\sum_{i=1}^{n} p_i\, E(|W_n-Z_i|) = (E(W_n))^2 - \sum_{i=1}^{n} p_i\, E(Z_i) = E(W_n^2) - V(W_n) - \sum_{i=1}^{n} p_i\, E(Z_i)$.

$\sum_{i=1}^{n} p_i\, E(|W_n-Z_i|) = E(W_n) - V(W_n) + \underbrace{E(W_n^2)-E(W_n)}_{E(W_n(W_n-1))} - \sum_{i=1}^{n} p_i\, E(Z_i)$.

$\sum_{i=1}^{n} p_i\, E(|W_n-Z_i|) = \lambda_n - V(W_n) + E(W_n(W_n-1)) - \sum_{i=1}^{n} p_i\, E(Z_i)$.

Pour obtenir l'égalité demandée il suffit de prouver que $E(W_n(W_n-1)) = \sum_{i=1}^{n} p_i\, E(Z_i)$.

$E(W_n(W_n-1)) = E\left(\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)(W_n-1)\right) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i(W_n-1))$. Soit i un élément de $[\![1,n]\!]$.

$E(X_i(W_n-1)) = P(X_i=1)\, E(X_i(W_n-1)/\{X_i=1\}) + P(X_i=0)\, E(X_i(W_n-1)/\{X_i=0\})$.

Soit $\omega \in \Omega$. Supposons $X_i(\omega)=1$. Alors $X_i(\omega)(W_n(\omega)-1) = 1 \times (R_i(\omega)+1-1) = R_i(\omega)$

Alors la loi de $X_i(W_n-1)$ sachant que $\{X_i=1\}$ est la même que la loi de R_i sachant que $\{X_i=1\}$.

Ainsi $\mathbb{E}(X_i(W_n-1) / \{X_i=1\}) = \mathbb{E}(R_i / \{X_i=1\}) = \mathbb{E}(Z_i)$.

Soit $\omega \in \Omega$. Supposons $X_i(\omega)=0$ Alors $X_i(\omega)(W_n(\omega)-1)=0$.

Ainsi $\mathbb{E}(X_i(W_n-1) / \{X_i=0\}) = 0$.

Alors $\mathbb{E}(X_i(W_n-1)) = P(X_i=1)\,\mathbb{E}(Z_i) + P(X_i=0) \times 0 = p_i\, \mathbb{E}(Z_i)$.

Donc $\sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(X_i(W_n-1)) = \sum_{i=1}^{n} p_i\, \mathbb{E}(Z_i)$.

Ainsi $\mathbb{E}(W_n(W_n-1)) = \sum_{i=1}^{n} p_i\, \mathbb{E}(Z_i)$. C'est ce qu'il fallait prouver pour obtenir : $\underline{\underline{\sum_{i=1}^{n} p_i\, \mathbb{E}(|W_n - Z_i|) = \lambda_n - V(W_n)}}$.

$$|P(W_n \in A) - P(\Pi_n \in A)| \leq \min\left(1, \frac{1}{\lambda_n}\right) \sum_{i=1}^{n} p_i\, \mathbb{E}(|W_n - Z_i|).$$

Donc $\underline{\underline{|P(W_n \in A) - P(\Pi_n \in A)| \leq \min\left(1, \frac{1}{\lambda_n}\right)(\lambda_n - V(W_n))}}$.