Q1) a) Soit $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et soit f_M l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ de matrice M dans $\mathcal{B}$.

→ L'ensemble des valeurs propres de f_M est $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_q\}$

→ Pour tout i dans $[\![1,q]\!]$ le sous-espace propre $SEP(f_M, \lambda_i)$ de f_M associé à la valeur propre λ_i est de dimension n_i.

→ $\mathbb{R}^n = \bigoplus_{i=1}^{q} SEP(f_M, \lambda_i)$ car f_M est diagonalisable.

Pour tout i dans $[\![1,q]\!]$ considérons une base $\mathcal{B}_i$ de $SEP(f_M, \lambda_i)$.

Alors $\mathcal{B}' =$ "$\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 \cup \dots \cup \mathcal{B}_q$" est une base de $\mathbb{R}^n$ et la matrice de f_M dans $\mathcal{B}'$ est la matrice diagonale par blocs $D = \begin{pmatrix} D_1 & & (0) \\ & D_2 & \\ (0) & & \ddots D_q \end{pmatrix}$ où pour tout i dans $[\![1,q]\!]$ $D_i = \lambda_i I_{n_i}$ où I_{n_i} est la matrice identité de $\mathcal{M}_{n_i}(\mathbb{R})$.

M et D sont semblables car ce sont deux matrices de f_M.

Ainsi $tr(M) = tr(D)$. Or $tr(D) = \sum_{i=1}^{q} tr(D_i) = \sum_{i=1}^{q} tr(\lambda_i I_{n_i}) = \sum_{i=1}^{q} \lambda_i \, tr(I_{n_i})$

Or $\forall i \in [\![1,q]\!]$, $tr(I_{n_i}) = n_i$. Donc $tr(M) = tr(D) = \sum_{i=1}^{q} \lambda_i n_i$.

Finalement : $\underline{\underline{tr(M) = \sum_{i=1}^{q} n_i \lambda_i}}$.

b) Reprenons les notations de a). M et D sont semblables donc il existe une matrice inversible P de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que : $D = P^{-1} M P$.

Alors $D^2 = (P^{-1} M P)^2 = P^{-1} M^2 P$. Par conséquent M^2 et D^2 sont semblables.

Ainsi $tr(M^2) = tr(D^2)$. Or $D^2 = \begin{pmatrix} D_1^2 & & (0) \\ & D_2^2 & \\ (0) & & \ddots D_q^2 \end{pmatrix}$.

Donc $tr(M^2) = tr(D^2) = \sum_{i=1}^{q} tr(D_i^2) = \sum_{i=1}^{q} tr(\lambda_i^2 I_{n_i}) = \sum_{i=1}^{q} \lambda_i^2 \, tr(I_{n_i})$.

$tr(M^2) = \sum_{i=1}^{q} \lambda_i^2 n_i = \sum_{i=1}^{q} n_i \lambda_i^2$.

Posons ${}^tMM = (\alpha_{ij})$ et ${}^tM = (m'_{ij})$. $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $m'_{ij} = m_{j,i}$ et $\alpha_{ij} = \sum_{l=1}^{n} m'_{il} m_{lj}$.

$$tr({}^tMM) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{jj} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} m'_{j,l} m_{lj} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} m_{lj} m_{lj} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} m_{lj}^2$$

En particulier écrire : $tr({}^tMM) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} m_{ij}^2 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} m_{ij}^2$.

Rappelons que M est symétrique alors ${}^tM = M$. ce qui précède permet alors

de dire que : $tr({}^tMM) = tr(M^2) = \sum_{i=1}^{n} n_i \lambda_i^2 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} m_{ij}^2$.

(Q2) a) On suppose que Z est définie par $\forall \omega \in \Omega$, $Z(\omega) = \begin{pmatrix} Z_{1,1}(\omega) & \cdots & Z_{1,r}(\omega) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ Z_{n,1}(\omega) & \cdots & Z_{n,r}(\omega) \end{pmatrix}$

où pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,r]\!]$, Z_{ij} est une

variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{B}, P)$. Dans la suite on s'autorisera à écrire $Z = (Z_{i,j})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le r}}$.

Z possède une espérance ce qui signifie que pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,r]\!]$, $E(Z_{i,j})$

existe.

Posons $A = (a_{ij})_{\substack{1 \le i \le r \\ 1 \le j \le n}}$. Notons que $AZ \in M_r(\mathbb{R})$

$$\forall \omega \in \Omega,\ (AZ)(\omega) = A\,Z(\omega) = \Big(\sum_{l=1}^{n} a_{i,l} Z_{l,j}(\omega) \Big)_{\substack{1 \le i \le r \\ 1 \le j \le r}}$$

Posons encore $\forall i \in [\![1,r]\!]$, $\forall j \in [\![1,r]\!]$, $Z'_{i,j} = \sum_{l=1}^{n} a_{i,l} Z_{l,j}$

1) $\forall \omega \in \Omega$, $(AZ)(\omega) = (Z'_{i,j}(\omega))_{\substack{1 \le i \le r \\ 1 \le j \le r}}$

2) Pour tout $(i,j) \in [\![1,r]\!]^2$, $Z'_{i,j}$ est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ comme

combinaison linéaire de variables aléatoires sur $(\Omega, \mathcal{B}, P)$.

3) Pour tout $(i,j) \in [\![1,r]\!]^2$, $Z'_{i,j}$ possède une espérance comme combinaison linéaire

de variables aléatoires sur $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ qui possèdent une espérance.

4) $\forall (i,j) \in [\![1,r]\!]^2$, $E(Z'_{ij}) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} E(Z_{l,j})$ par linéarité de l'espérance.

Ainsi peut-on dire que $\rightarrow$ AZ est une matrice aléatoire qui possède une espérance.

$\rightarrow$ $E(AZ)$ est la matrice $\left(\sum_{\ell=1}^{n} a_{i,\ell}\, E(Z_{\ell,j})\right)_{\substack{1\le i\le r\\ 1\le j\le r}}$ de $M_r(\mathbb{R})$.

Or $A\,E(Z) = (a_{i,j})_{\substack{1\le i\le r\\ 1\le j\le n}} \times \left(E(Z_{i,j})\right)_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le r}} = \left(\sum_{\ell=1}^{n} a_{i,\ell}\, E(Z_{\ell,j})\right)_{\substack{1\le i\le r\\ 1\le j\le r}}$.

Ainsi <u>AZ possède une (matrice) espérance et $E(AZ) = A\,E(Z)$.</u>

<u>Remarque</u>... Le résultat vaut encore si $A \in M_{p,n}(\mathbb{R})$ où $p \in \mathbb{N}^*$... nous en aurons besoin !

Nous posons $B = (b_{i,j})_{\substack{1\le i\le r\\ 1\le j\le q}}$. Z est toujours $(Z_{i,j})_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le r}}$.

$\forall \omega\in\Omega$, $(ZB)(\omega) = Z(\omega)B = (Z_{i,j}(\omega))_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le r}}\,(b_{i,j})_{\substack{1\le i\le r\\ 1\le j\le q}} = \left(\sum_{\ell=1}^{r} Z_{i,\ell}(\omega)\, b_{\ell,j}\right)_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le q}}$

Posons $\forall i\in [\![1,n]\!], \forall j\in [\![1,q]\!]$, $Z''_{i,j} = \sum_{\ell=1}^{r} b_{\ell,j} Z_{i,\ell}$. $ZB = (Z''_{i,j})_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le q}}$

Alors 1) $\forall \omega\in\Omega$, $(ZB)(\omega) = (Z''_{i,j}(\omega))_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le q}}$.

2) Pour tout $(i,j)\in [\![1,n]\!]\times[\![1,q]\!]$, $Z''_{i,j}$ est une variable aléatoire sur $(\Omega,\mathcal{A},P)$ qui possède une espérance comme combinaison linéaire de variables aléatoires sur $(\Omega,\mathcal{A},P)$ qui possèdent une espérance.

3) $\forall (i,j)\in [\![1,n]\!]\times[\![1,q]\!]$, $E(Z''_{i,j}) = \sum_{\ell=1}^{r} b_{\ell,j} E(Z_{i,\ell}) = \sum_{\ell=1}^{r} E(Z_{i,\ell})\, b_{\ell,j}$.

Ainsi peut-on dire que

- ZB est une matrice aléatoire ayant n lignes et q colonnes
- ZB possède une (matrice) espérance
- $E(ZB) = \left(E(Z''_{i,j})\right)_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le q}} = \left(\sum_{\ell=1}^{r} E(Z_{i,\ell})\, b_{\ell,j}\right)_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le q}} = E(Z)B$

Ainsi <u>ZB possède une (matrice) espérance et $E(ZB) = E(Z)B$.</u>

b) Soit Z une matrice aléatoire à n lignes et r colonnes ayant une (matrice) espérance $Z = (Z_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq r}}$ où, pour tout $(i,j)\in [\![1,n]\!]\times[\![1,r]\!]$, $Z_{i,j}$ est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ qui possède une espérance.

Posons $\forall (i,j)\in [\![1,r]\!]\times[\![1,n]\!]$, $\hat{Z}_{i,j} = Z_{j,i}$

${}^tZ = (\hat{Z}_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq r\\ 1\leq j\leq n}}$ et pour tout $(i,j)\in [\![1,r]\!]\times[\![1,n]\!]$, $\hat{Z}_{i,j} = Z_{j,i}$ est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ qui possède une espérance.

Alors ${}^tZ$ est une matrice aléatoire à r lignes et n colonnes qui possède une (matrice) espérance.

$$E({}^tZ) = \left(E(\hat{Z}_{i,j})\right)_{\substack{1\leq i\leq r\\ 1\leq j\leq n}} = \left(E(Z_{j,i})\right)_{\substack{1\leq i\leq r\\ 1\leq j\leq n}} = {}^tE(Z).$$

Si Z est une matrice aléatoire à n lignes et r colonnes ayant une (matrice) espérance alors ${}^tZ$ est une matrice aléatoire à r lignes et n colonnes ayant une (matrice) espérance et $E({}^tZ) = {}^tE(Z)$ ... ce qui répond largement à la question !

Reprenons les notations et les hypothèses précédentes en supposant que $r = n$. Z est alors une matrice aléatoire à n lignes et n colonnes. $tr(Z) = \sum_{i=1}^{n} Z_{i,i}$ et pour tout $i\in[\![1,n]\!]$, $Z_{i,i}$ est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ qui possède une espérance.

Alors $E(tr(Z))$ existe et vaut $\sum_{i=1}^{n} E(Z_{i,i})$.

Rappelons que $E(Z)$ existe et que $E(Z) = (E(Z_{i,j}))_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq n}}$.

Alors $tr(E(Z)) = \sum_{i=1}^{n} E(Z_{i,i}) = E(tr(Z))$.

Si Z est une matrice aléatoire à n lignes et n colonnes qui possède une (matrice) espérance, $E(tr(Z))$ existe et $E(tr(Z)) = tr(E(Z))$.

(Q3) Notons que les formules qui suivent sont assez simples à établir mais il convient de justifier l'existence des variances et des espérances qui interviennent.

$Y=\begin{pmatrix}Y_1\\ \vdots\\ Y_n\end{pmatrix}$ possède une (matrice) espérance et une matrice-covariance

$V(Y)=E\left((Y-E(Y))\,{}^t(Y-E(Y))\right)$. Avant de commencer détaillons un peu cela.

$Y-E(Y)=\begin{pmatrix}Y_1\\ \vdots\\ Y_n\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}E(Y_1)\\ \vdots\\ E(Y_n)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}Y_1-E(Y_1)\\ \vdots\\ Y_n-E(Y_n)\end{pmatrix}$ donc ${}^t(Y-E(Y))=(Y_1-E(Y_1)\ \cdots\ Y_n-E(Y_n))$.

Alors $(Y-E(Y))\,{}^t(Y-E(Y))$ est la matrice aléatoire $\left((Y_i-E(Y_i))(Y_j-E(Y_j))\right)_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq n}}$.

$V(Y)$ existe donc l'espérance de cette matrice aléatoire existe.

Cela signifie que $E\left((Y_i-E(Y_i))(Y_j-E(Y_j))\right)$ existe pour tout $(i,j)\in[\![1,n]\!]^2$.

Par conséquent $\forall (i,j)\in[\![1,n]\!]^2$, $\mathrm{cov}(Y_i,Y_j)$ existe. En particulier pour tout $i\in[\![1,n]\!]$, $V(Y_i)=\mathrm{cov}(Y_i,Y_i)$ existe.

Notons encore que : $V(Y)=E\left((Y-E(Y))\,{}^t(Y-E(Y))\right)=\left(\mathrm{cov}(Y_i,Y_j)\right)_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq n}}$ ce qui n'est pas un scoop.

a) $Y\,{}^tY$ est la matrice aléatoire $(Y_iY_j)_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq n}}$.

Pour tout $(i,j)\in[\![1,n]\!]^2$, $E(Y_iY_j)$ existe car Y_i et Y_j possèdent une variance donc un moment d'ordre 2. Alors $Y\,{}^tY$ possède une (matrice) espérance qui est

$(E(Y_iY_j))_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq n}}$.

Pour tout $i\in[\![1,n]\!]$, $E(Y_i)$ existe donc $Y=\begin{pmatrix}Y_1\\ \vdots\\ Y_n\end{pmatrix}$ et ${}^tY=(Y_1\cdots Y_n)$ sont deux matrices aléatoires qui possèdent une (matrice) espérance.

Notons que $E(Y)=\begin{pmatrix}E(Y_1)\\ \vdots\\ E(Y_n)\end{pmatrix}$ et $E({}^tY)=(E(Y_1)\cdots E(Y_n))$.

Alors $E(Y)E({}^tY)=\begin{pmatrix}E(Y_1)\\ \vdots\\ E(Y_n)\end{pmatrix}(E(Y_1)\cdots E(Y_n))=\left(E(Y_i)E(Y_j)\right)_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq n}}$.

Ainsi $E(Y\,{}^tY)-E(Y)E({}^tY)=(E(Y_iY_j))_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq n}}-(E(Y_i)E(Y_j))_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq n}}$

$E(Y\,{}^tY)-E(Y)E({}^tY)=\left(E(Y_iY_j)-E(Y_i)E(Y_j)\right)_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq n}}=(\mathrm{cov}(Y_i,Y_j))_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq n}}=V(Y)$.

$V(Y) = E(Y{}^tY) - E(Y)\,E({}^tY)$.

<u>Remarque utile</u> : notons que l'existence de $E(Y{}^tY)$ assure l'existence de $V(Y)$. En effet l'existence de $E(Y{}^tY)$ donne l'existence de $E(Y_iY_j)$ pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, qui donne l'existence $E(Y_i^2)$ pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, qui donne l'existence de $\mathrm{cov}(Y_i, Y_j)$ pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ donc l'existence de $V(Y)$.

<u>b)</u> Montrons que $V(BY)$ existe. Il suffit de prouver l'existence de $E(BY{}^t(BY))$.
$Y{}^tY$ est une matrice aléatoire à n lignes et n colonnes ayant une espérance (car $V(Y)$ existe) et ${}^tB \in M_{n,r}(\mathbb{R})$ donc $Y{}^tY{}^tB$ est une matrice aléatoire à n lignes et r colonnes ayant une espérance d'après Q2 c).
Comme $B \in M_{r,n}(\mathbb{R})$, toujours d'après Q2 c), $BY{}^tY{}^tB$ est une matrice aléatoire à r lignes et à r colonnes ayant une espérance.
Ainsi $BY{}^t(BY) = BY{}^tY{}^tB$ possède une espérance.
Mieux Q2 a) nous permet de dire que $E(Y{}^tY{}^tB) = E(Y{}^tY){}^tB$ et que
$E(B\,Y{}^tY{}^tB) = B\,E(Y{}^tY{}^tB)$.

Alors $E(BY{}^t(BY)) = E(BY{}^tY{}^tB) = B\,E(Y{}^tY){}^tB$.

$BY{}^t(BY)$ possède une (matrice) espérance donc BY possède une matrice de variance-covariance.

De plus $V(BY) = E(BY{}^t(BY)) - E(BY)\,E({}^t(BY)) = B\,E(Y{}^tY){}^tB - E(BY)\,E({}^t(BY))$.

$\to$ ${}^t(BY) = {}^tY{}^tB$.

$\to$ ${}^tY$ est une matrice aléatoire ayant 1 ligne et n colonnes qui possède une (matrice) espérance qui vaut ${}^tE(Y)$ d'après notre extrapolation de Q2 b) et le fait que $E(Y)$ existe.

$\to$ ${}^tB \in M_{n,r}(\mathbb{R})$

Alors Q2 c) nous permet de dire que ${}^t(BY) = {}^tY{}^tB$ possède une (matrice) espérance qui vaut $E({}^tY){}^tB$.

Ainsi $E({}^t(BY)) = E({}^tY)\,{}^tB$.

Notre extrapolation de Q 2 b) nous permet alors de dire que $BY = {}^t({}^t(BY))$ possède une (matrice) espérance qui vaut ${}^tE({}^t(BY))$

Ainsi $E(BY) = {}^tE({}^t(BY)) = {}^t\left(E({}^tY)\,{}^tB\right) = B\,{}^tE({}^tY) = B\,{}^t({}^tE(Y)) = B\,E(Y)$

Donc $E(BY) = B\,E(Y)$!! ce que la Q 2 a) du texte nous autorise pas à dire immédiatement vu le type des matrices...

Finalement $V(BY) = E(BY\,{}^t(BY)) - E(BY)\,E({}^t(BY)) = B\,E(Y\,{}^tY)\,{}^tB - B\,E(Y)\,E({}^tY)\,{}^tB$

$V(BY) = B\left(E(Y\,{}^tY) - E(Y)\,E({}^tY)\right){}^tB = B\,V(Y)\,{}^tB$.

Si $B \in M_{r,n}(\mathbb{R})$, $V(BY)$ existe et $V(BY) = B\,V(Y)\,{}^tB$.

c) Posons $A = (a_{ij})_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le n}}$.

$${}^tYAY = \sum_{i=1}^n \left(Y_i \sum_{j=1}^n a_{ij}Y_j\right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}\,Y_iY_j$$

$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $E(Y_iY_j)$ existe donc $E({}^tYAY)$ existe et vaut $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}\,E(Y_iY_j)$

$$A\,E(Y\,{}^tY) = (a_{ij})_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le n}} \times \left(E(Y_iY_j)\right)_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le n}} = \left(\sum_{l=1}^n a_{il}\,E(Y_lY_j)\right)_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le n}}.$$

Alors $tr(A\,E(Y\,{}^tY)) = \sum_{i=1}^n \sum_{l=1}^n a_{il}\,E(Y_lY_i)$ ou $tr(A\,E(Y\,{}^tY)) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}\,E(Y_jY_i)$

ou encore $tr(A\,E(Y\,{}^tY)) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}\,E(Y_iY_j) = E({}^tYAY)$

Si $A \in M_n(\mathbb{R})$, $E({}^tYAY)$ existe et $E({}^tYAY) = tr(A\,E(Y\,{}^tY))$.

Proposons une seconde version qui utilise davantage ce qui précède + quelques explications...

$tr({}^tYAY) = tr(AY{}^tY)$ (propriété de la trace explicitée...)

$Y{}^tY$ est une matrice aléatoire à n lignes et n colonnes ayant une espérance.

Comme $A \in M_n(\mathbb{R})$, Q2 a) montre que $E(AY{}^tY)$ existe et vaut $AE(Y{}^tY)$.

Alors $E(tr(AY{}^tY))$ et vaut $tr(E(AY{}^tY))$ d'après Q 2 b)

Ainsi $E(tr({}^tYAY))$ existe et vaut $tr(E(AY{}^tY))$.

Or $E(AY{}^tY) = AE(Y{}^tY)$; ainsi $E(tr({}^tYAY))$ existe et vaut $tr(AE(Y{}^tY))$.

Ne reste plus qu'à observer que $tr({}^tYAY) = {}^tYAY$ car ${}^tYAY$ est une matrice aléatoire à 1 ligne et 1 colonne.

Ainsi $E({}^tYAY)$ existe et vaut $tr(AE(Y{}^tY))$.

Montrons la seconde égalité.

$E({}^tYAY) = tr(AE(Y{}^tY))$ et $E(Y{}^tY) = V(Y) + E(Y)E({}^tY) = J + E(Y){}^tE(Y) = J + m{}^tm$

Alors $E({}^tYAY) = tr(A(J + m{}^tm)) = tr(AJ + Am{}^tm) = tr(AJ) + tr(Am{}^tm)$.

Or $tr(Am{}^tm) = tr((Am){}^tm) = tr({}^tm(Am)) = tr({}^tmAm) = {}^tmAm$

${}^tmAm$ est une matrice carrée à 1 ligne et 1 colonne.

Ainsi $\underline{\underline{E({}^tYAY) = tr(AJ) + {}^tmAm}}$.

PARTIE II. Le modèle linéaire.

A. Quelques résultats algébrique

Q1) a) $X \in M_\ell(\mathbb{R})$ donc ${}^tX \in M_\ell(\mathbb{R})$. Alors $H = X\,{}^tX \in M_\ell(\mathbb{R})$.

De plus ${}^tH = {}^t({}^tXX) = {}^tX\,{}^t({}^tX) = {}^tXX = H$; H est symétrique.

<u>$H = {}^tXX$ est une matrice symétrique (carrée) de $M_\ell(\mathbb{R})$.</u>

b) Soit $t = (t_1, \dots, t_\ell) \in \mathrm{Ker}\, h$. $h(t) = 0_{\mathbb{R}^\ell}$; $H\begin{pmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_\ell \end{pmatrix} = 0_{M_{\ell,1}(\mathbb{R})}$.

Alors $Ht = 0_{M_{\ell,1}(\mathbb{R})}$ (on respecte ici comme dans toute la suite l'identification proposée).

Alors ${}^tXXt = 0_{M_{\ell,1}(\mathbb{R})}$ donc ${}^tt\,{}^tXXt = 0_{\mathbb{R}}$; ${}^t(Xt)Xt = 0$.

$\|Xt\| = 0$, ainsi $Xt = 0_{M_{n,1}(\mathbb{R})}$. Alors $f(t) = 0_{\mathbb{R}^n}$. Ainsi $t \in \mathrm{Ker}\, f$.

Le théorème du rang permet d'écrire que $k = \dim \mathbb{R}^k = \dim \mathrm{Ker}\, f + \mathrm{rg}\, f = \dim \mathrm{Ker}\, f + k$

Ainsi $\dim \mathrm{Ker}\, f = 0$; $\mathrm{Ker}\, f = \{0_{\mathbb{R}^\ell}\}$. Par conséquent $t = 0_{\mathbb{R}^\ell}$.

Ceci achève de prouver que $\mathrm{Ker}\, h = \{0_{\mathbb{R}^\ell}\}$.

h est un endomorphisme injectif de $\mathbb{R}^\ell$ et $\dim \mathbb{R}^\ell = k < +\infty$ donc h est un automorphisme de $\mathbb{R}^\ell$. Ce qui permet de dire que :

<u>H est inversible.</u>

Q2) Utilisons le théorème fondamental relatif à la méthode des moindres carrés.

$y \in M_{n,1}(\mathbb{R})$, $X \in M_{n,\ell}(\mathbb{R})$ et $\mathrm{rg}\, X = k$.

Alors → $\min\limits_{\alpha \in M_{\ell,1}(\mathbb{R})} \|X\alpha - y\|$ existe

→ $\exists!\ \hat{\alpha} \in M_{\ell,1}(\mathbb{R})$, $\|X\hat{\alpha} - y\| = \min\limits_{\alpha \in M_{\ell,1}(\mathbb{R})} \|X\alpha - y\|$

→ ${}^tXX$ est inversible et $\hat{\alpha} = ({}^tXX)^{-1}\,{}^tXy = H^{-1}\,{}^tX$

Les identifications proposées nous permettent d'écrire que :

1°.. $\min_{\alpha \in \mathbb{R}^k} \|X\alpha - y\|$ existe

2°.. $\exists! \ \hat{\alpha} \in \mathbb{R}^k, \ \|X\hat{\alpha} - y\| = \min_{\alpha \in \mathbb{R}^k} \|X\alpha - y\|$

3°.. $\hat{\alpha} = H^{-1}\,{}^tX y$.

Ainsi $\min_{\alpha \in \mathbb{R}^k} \|y - X\alpha\|$ existe, $\exists! \ \hat{\alpha} \in \mathbb{R}^k, \|y - X\hat{\alpha}\| = \min_{\alpha \in \mathbb{R}^k} \|y - X\alpha\|$ et $\hat{\alpha} = H^{-1}\,{}^tX y$.

<u>Remarque</u>.. Il est préférable d'écrire $\hat{\alpha} = \begin{pmatrix} \hat{\alpha}_1 \\ \vdots \\ \hat{\alpha}_k \end{pmatrix}$ que $\hat{\alpha} = \begin{pmatrix} \hat{\alpha}_1 \\ \vdots \\ \hat{\alpha}_n \end{pmatrix}$.

(Q3) <u>a]</u> $p(y)$ est la projection orthogonale de y sur $\operatorname{Im} f$.

Ainsi $p(y)$ est l'unique élément de $\mathbb{R}^n$ tel que $\|y - p(y)\| = \min_{\alpha \in \mathbb{R}^k} \|y - f(\alpha)\|$.

Donc $\|y - p(y)\| = \min_{\alpha \in \mathbb{R}^k} \|y - X\alpha\|$.

$p(y) \in \operatorname{Im} f$; $\exists \delta \in \mathbb{R}^k, \ p(y) = X\delta$. Alors $\|y - X\delta\| = \min_{\alpha \in \mathbb{R}^k} \|y - X\alpha\|$

D'après Q2 : $\delta = \hat{\alpha}$. Ainsi $p(y) = X\hat{\alpha}$.

$\underline{\underline{p(y) = X\hat{\alpha}}}$.

Alors $p(y) = X H^{-1}\,{}^tX y$. Notons que ceci vaut pour tout $y \in \mathbb{R}^n$.

Notons $\tilde{p}$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dont la matrice dans la base canonique est $X H^{-1}\,{}^tX$. $\forall y \in \mathbb{R}^n, \ p(y) = \tilde{p}(y)$. Alors $p = \tilde{p}$.

p et $\tilde{p}$ ont la même matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

Ainsi $\underline{\underline{P = X H^{-1}\,{}^tX}}$.

$p^2 = p$ car p est une projection donc $P^2 = P$.

$${}^tP = {}^t(X H^{-1}\,{}^tX) = {}^t({}^tX)\,{}^t(H^{-1})\,{}^tX = X\,({}^tH)^{-1}\,{}^tX \underset{\text{H est symétrique}}{=} X H^{-1}\,{}^tX = P$$

Finalement : $\underline{\underline{P = P^2 = {}^tP}}$ ... ce qui n'est pas un scoop car P est la matrice d'une projection orthogonale (donc d'un endomorphisme symétrique) dans une base orthonormale

b) $\mathbb{R}^n = \operatorname{Im} p \overset{\perp}{\oplus} \operatorname{Ker} p$ car p est un projecteur orthogonal.

$\operatorname{Im} p = \operatorname{Im} f$ par définition de p. Ainsi $\dim \operatorname{Im} p = \operatorname{rg} f = k > 0$.

Alors $\dim \operatorname{Ker} p = n - \dim \operatorname{Im} p = n - k > 0$.

Soit $\mathcal{B}_1 = (z_1, \dots, z_k)$ une base de $\operatorname{Im} p$ et $(z_{k+1}, \dots, z_n)$ une base de $\operatorname{Ker} p$.

Alors 1) $\mathcal{B} = (z_1, z_2, \dots, z_n)$ est une base de $\mathbb{R}^n$ car $\mathbb{R}^n = \operatorname{Im} p \oplus \operatorname{Ker} p$;

2) $\forall i \in [\![1, k]\!]$, $p(z_i) = z_i$ et $\forall i \in [\![k+1, n]\!]$, $p(z_i) = 0_{\mathbb{R}^n}$.

Alors la matrice de p dans $\mathcal{B}$ est $P' = \begin{pmatrix} I_k & 0_{\mathcal{M}_{k,n-k}(\mathbb{R})} \\ 0_{\mathcal{M}_{n-k,k}(\mathbb{R})} & 0_{\mathcal{M}_{n-k,n-k}(\mathbb{R})} \end{pmatrix}$

Ainsi $tr(P') = tr(I_k) = k = \dim \operatorname{Im} p$.

Donc $tr(P') = k = rg(p) = rg(P)$.

Or P et P' sont semblables car ce sont deux matrices de p.

Ainsi $tr(P) = tr(P') = k = rg(P)$.

$tr(P) = rg(P) = k$.

c) Pour tout i dans $[\![1, k]\!]$ notons $C_i(X)$ la $i^{ème}$ colonne de X.

Notons $(e_1, e_2, \dots, e_k)$ la base canonique de $\mathbb{R}^k$ ... ou de $\mathcal{M}_{k,1}(\mathbb{R})$.

$\forall i \in [\![1, k]\!]$, $C_i(X) = X e_i = f(e_i)$.

$\forall i \in [\![1, k]\!]$, $C_i(X) = 0 \Rightarrow f(e_i) = 0 \Rightarrow e_i \in \operatorname{Ker} f \Rightarrow e_i = 0$!!

Ainsi $\forall i \in [\![1, k]\!]$, $C_i(X) \neq 0$. De plus $\forall i \in [\![1, k]\!]$, $C_i(X) \in \operatorname{Im} p$.

Alors $\forall i \in [\![1, k]\!]$, $C_i(X) \neq 0$ et $p(C_i(X)) = C_i(X)$ ou $P C_i(X) = C_i(X)$.

Les colonnes de X sont des vecteurs propres de la matrice P associés à la valeur propre 1

Remarque... $(C_1(X), C_2(X), \dots, C_k(X))$ est une famille de cardinal k qui engendre $\operatorname{Im} f$ qui est de dimension k. Ainsi $(C_1(X), \dots, C_k(X))$ est une base de $\operatorname{Im} f$ donc une famille libre de $\mathbb{R}^n$... mais pas plus. " base de vecteurs propres..." n'a donc pas beaucoup de sens !

d] $\begin{cases} \mathbb{R}^n = \operatorname{Im} p \overset{\perp}{\oplus} \operatorname{Ker} p. \\ \dim \operatorname{Im} p = k \end{cases}$ Soit $(\mathfrak{z}'_1, \dots, \mathfrak{z}'_k)$ une base orthonormée de $\operatorname{Im} p$ et $(\mathfrak{z}'_{k+1}, \dots, \mathfrak{z}'_n)$ une base orthonormée de $\operatorname{Ker} p$.

$\mathcal{B}' = (\mathfrak{z}'_1, \mathfrak{z}'_2, \dots, \mathfrak{z}'_n)$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ et $M_{\mathcal{B}'}(p) = D = (d_{ij})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le n}}$

où $d_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ si } i = j \in [\![1, k]\!] \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$ car $\forall i \in [\![1, k]\!], p(\mathfrak{z}'_i) = \mathfrak{z}'_i$ et $\forall i \in [\![k+1, n]\!], p(\mathfrak{z}'_i) = 0_{\mathbb{R}^n}$

Soit S la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^n$ à la base $\mathcal{B}'$.

1) S est une matrice orthogonale comme matrice de passage d'une base orthonormée à une base orthonormée ; ainsi S est inversible et $S^{-1} = {}^tS$.

2) $S^{-1} P S = D$.

Alors $P = S D S^{-1} = S D \, {}^tS$.

<u>Il existe une matrice orthogonale S de $M_n(\mathbb{R})$ telle que $P = S D \, {}^tS$, où $D = (d_{ij})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le n}}$ est la matrice diagonale définie par $\begin{cases} d_{ij} = 1 \text{ si } i = j \in [\![1, k]\!] \\ d_{ij} = 0 \text{ sinon} \end{cases}$.</u>

<u>les k premières colonnes de S constituent une base orthonormée de $\operatorname{Im} p = \operatorname{Im} f$!!</u>

Q4 a] $\hat{u} = y - X\hat{\alpha} \overset{Q3\,a]}{=} y - Py = (I_n - P)y$. $\hat{u} = \varphi y = \varphi(u + X\alpha) = \varphi u + \varphi X\alpha$

$X\alpha \in \operatorname{Im} p$ donc $PX\alpha = X\alpha$. Alors $\varphi X\alpha = (I_n - P)X\alpha = X\alpha - PX\alpha = 0$.

Finalement <u>$\hat{u} = \varphi u$.</u> Notons aussi que <u>$\hat{u} = \varphi y$.</u>

b] ${}^t\varphi = {}^t(I_n - P) = {}^tI_n - {}^tP = I_n - P = \varphi$.

$\varphi^2 = (I_n - P)^2 \underset{I_nP = PI_n}{=} I_n^2 - 2I_nP + P^2 = I_n - 2P + P = I_n - P = \varphi$.

<u>$\varphi = \varphi^2 = {}^t\varphi$</u> (normal car φ est la matrice dans une base orthonormée du projecteur orthogonal de $\mathbb{R}^n$ sur $\operatorname{Ker} p$).

$\mathrm{tr}(Q)=\mathrm{tr}(I_n-P)=\mathrm{tr}(I_n)-\mathrm{tr}(P)=n-k$. $\quad \mathrm{tr}(Q)=n-k$.

b) $\hat{u}=Qu$ donc ${}^t\hat{u}\,\hat{u}={}^t(Qu)Qu={}^tu\,{}^tQQu={}^tu\,Q^2u={}^tu\,Qu$.

${}^t\hat{u}\hat{u}={}^tuQu$.

$${}^tyQy={}^ty\hat{u}={}^tyQu={}^t(u+X\alpha)Qu={}^tuQu+{}^t(X\alpha)Qu$$

$Qy=\hat{u}=Qu$

Or ${}^t(X\alpha)Qu=\langle X\alpha,Qu\rangle=0$ car $X\alpha\in\mathrm{Im}\,p$, $Qu\in\mathrm{Im}(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n}-p)\overset{ok?}{=}\mathrm{Ker}\,p$ et $\mathrm{Im}\,p$ et $\mathrm{Ker}\,p$ sont orthogonaux.

Ainsi ${}^tyQy={}^tuQu$.

Q5 a) Soit A une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- Supposons que A est positive. Alors $\forall z\in\mathbb{R}^n$, ${}^tzAz\geq 0$.

  Soit λ une valeur propre de A. $\exists\, z_0\in\mathbb{R}^n$, $z_0\neq 0_{\mathbb{R}^n}$ et $Az_0=\lambda z_0$.

  Alors $0\leq {}^tz_0Az_0={}^tz_0(\lambda z_0)=\lambda\,{}^tz_0z_0=\lambda\|z_0\|^2$

  Ainsi $\|z_0\|^2$ et $\lambda\|z_0\|^2\geq 0$ donc $\lambda\geq 0$.

  Les valeurs propres de A sont positives.

- Réciproquement supposons les valeurs propres de A positives.

  Montrons que A est positive.

  A est symétrique et $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ donc il existe une base orthonormée $(z_1,z_2,\dots,z_n)$ de $\mathbb{R}^n$ constituée de vecteurs propres de A respectivement associés aux valeurs propres $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n$. Notons que $\forall i\in[\![1,n]\!]$, $\lambda_i\geq 0$.

  Soit $z\in\mathbb{R}^n$. $z=\sum_{i=1}^n\langle z,z_i\rangle z_i$. Donc $Az=\sum_{i=1}^n\langle z,z_i\rangle Az_i=\sum_{i=1}^n\langle z,z_i\rangle\lambda_i z_i$

$$\text{Alors } {}^tzAz=\langle z,Az\rangle\underbrace{=}_{(z_1,z_2,\dots,z_n)\text{ est orthonormée}}\sum_{i=1}^n\langle z,z_i\rangle\langle z,z_i\rangle\lambda_i=\sum_{i=1}^n(\langle z,z_i\rangle)^2\lambda_i\underbrace{\geq}_{\forall i\in[\![1,n]\!],\ \lambda_i\geq 0}0$$

Ainsi $\forall z\in\mathbb{R}^n$, ${}^tzAz\geq 0$. A est positive.

Soit A une matrice symétrique de $M_n(\mathbb{R})$. A est positive, c'est-à-dire $\forall y \in \mathbb{R}^n,\ {}^t y A y \geq 0$ si et seulement si ses valeurs propres sont positives.

b) $L \in M_{n,\ell}(\mathbb{R})$ donc ${}^tL \in M_{\ell,n}(\mathbb{R})$. Alors ${}^tL L \in M_\ell(\mathbb{R})$.

${}^t({}^tL\,L) = {}^tL\,{}^t({}^tL) = {}^tL L$; ${}^tLL$ est donc symétrique

$\forall y \in \mathbb{R}^\ell,\ {}^ty({}^tL L)y = {}^t(Ly)Ly = \|Ly\|^2 \geq 0$. $\forall y \in \mathbb{R}^\ell,\ {}^ty({}^tLL)y \geq 0$.

${}^tLL$ est une matrice symétrique réelle positive de $M_\ell(\mathbb{R})$.

B. Estimation des paramètres $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_\ell$ et σ^2

(Q1) a) Rappelons que $U_1, U_2, \dots, U_n$ sont indépendantes, que $E(U) = 0_n$ et $V(U) = \sigma^2 I_n$.

Alors → $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $E(U_i)$ existe et vaut 0

→ $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $\mathrm{cov}(U_i, U_j)$ existe et vaut σ^2 si $i=j$, 0 si $i \neq j$.

$X\alpha \in M_{n,1}(\mathbb{R})$. Posons $X\alpha = \begin{pmatrix}\beta_1\\ \beta_2\\ \vdots\\ \beta_n\end{pmatrix}$. Alors $Y = X\alpha + U = \begin{pmatrix}U_1+\beta_1\\ \vdots\\ U_n+\beta_n\end{pmatrix}$.

D'après ce qui précède : → pour tout i dans $[\![1,n]\!]$, $E(U_i+\beta_i)$ existe et vaut β_i

→ pour tout (i,j) dans $[\![1,n]\!]^2$, $\mathrm{cov}(U_i+\beta_i, U_j+\beta_j)$ existe et vaut $\mathrm{cov}(U_i, U_j)$ donc σ^2 si $i=j$ et 0 si $i\neq j$.

Ainsi Y possède une (matrice) espérance qui est $\begin{pmatrix}\beta_1\\ \vdots\\ \beta_n\end{pmatrix}$ donc $X\alpha$ et

Y possède une matrice de variance-covariance qui est $\sigma^2 I_n$.

Par conséquent $E(Y)$ et $V(Y)$ existent, $E(Y) = X\alpha$ et $V(Y) = \sigma^2 I_n$.

~~$H^{-1}\,{}^tX \in \mathcal{M}_{\ell,n}(\mathbb{R})$ et Y est une matrice aléatoire à n lignes et 1 colonne qui~~ possède une espérance.

D'après I Q 2 a) (...admis), $H^{-1}\,{}^tX\,Y$ est une matrice aléatoire à ℓ lignes et 1 colonne qui possède une (matrice) espérance égale à $H^{-1}\,{}^tX\,E(Y)$.

Ainsi $\widehat{G} = H^{-1}\,{}^tX\,Y$ possède une matrice espérance égale à $H^{-1}\,{}^tX\,X\alpha$.

Or $H^{-1}\,{}^tX X\alpha = H^{-1}H\alpha = \alpha$.

Donc <u>$E(\widehat{G})$ existe et vaut α.</u>

b) Posons $B = H^{-1}\,{}^tX$. $B \in \mathcal{M}_{\ell,n}(\mathbb{R})$ et Y est un vecteur aléatoire de $\mathbb{R}^n$ qui possède une matrice de variance-covariance qui vaut $\sigma^2 I_n$.

D'après Q3 b), BY possède une matrice de variance-covariance qui vaut $B\,V(Y)\,{}^tB$

Ainsi $\widehat{G} = H^{-1}\,{}^tX\,Y = BY$ possède une matrice de vaut $B\,V(Y)\,{}^tB$.

$V(\widehat{G}) = B\,V(Y)\,{}^tB = H^{-1}\,{}^tX\,\sigma^2 I_n\,{}^t(H^{-1}\,{}^tX) = \sigma^2 H^{-1}\,{}^tXX({}^tH)^{-1} = \sigma^2 H^{-1}HH^{-1} = \sigma^2 H^{-1}$.

<u>$\widehat{G}$ possède une matrice de variance-covariance et $V(\widehat{G}) = \sigma^2 H^{-1}$.</u>

Q2 a) ${}^tB \in \mathcal{M}_{\ell,n}(\mathbb{R})$ et Y est un vecteur aléatoire de $\mathbb{R}^n$ qui possède une (matrice) espérance valant $X\alpha$.

Alors ${}^tBY$ est un vecteur aléatoire de $\mathbb{R}^\ell$ qui possède une (matrice) espérance valant ${}^tBX\alpha$.

On veut donc trouver une condition sur B pour que $\forall \alpha \in \mathbb{R}^\ell$, ${}^tBX\alpha = \alpha$.

$\forall \alpha\in\mathbb{R}^\ell,\ {}^tBX\alpha = \alpha \iff \forall \alpha\in\mathbb{R}^\ell,\ ({}^tBX - I_\ell)\alpha = 0_{\mathbb{R}^\ell} \iff {}^tBX - I_\ell = 0_{\mathcal{M}_\ell(\mathbb{R})}$.

$\forall \alpha\in\mathbb{R}^\ell,\ {}^tBX\alpha = \alpha \iff {}^tBX = I_\ell$.

Si B est une matrice non nulle de $\mathcal{M}_{n,\ell}(\mathbb{R})$, pour tout $\alpha\in\mathbb{R}^\ell$ $\widehat{C} = {}^tBY$ est un estimateur sans biais de α si et seulement si ${}^tBX = I_\ell$ ou ${}^tXB = I_\ell$

⚠ Il est prié de ne pas parler d'inversibilité... $B \in \mathcal{M}_{n,\ell}(\mathbb{R})$!!

<u>Remarque</u>.. $\hat{G} = H^{-1}\,{}^tX Y = {}^t(X\,{}^tH^{-1}) Y = {}^t(XH^{-1})Y$ car H^{-1} est symétrique dans la mesure où H est symétrique.

Notons alors que $XH^{-1} \in \mathcal{M}_{n,\ell}(\mathbb{R})$ et que ${}^t(XH^{-1})X = {}^tH^{-1}\,{}^tXX = H^{-1}H = I_\ell$

de toute évidence XH^{-1} n'est pas nulle car ${}^t(XH^{-1})X = I_\ell$.

<u>b)</u> ${}^tF = {}^tB - H^{-1}\,{}^tX$ donc ${}^tFX = {}^tBX - H^{-1}\,{}^tXX \underset{{}^tBX = I_\ell \text{ car } B \text{ vérifie la condition de a)}}{=} I_\ell - I_\ell = 0_{\mathcal{M}_\ell(\mathbb{R})}$.

${}^tFX = 0_{\mathcal{M}_\ell(\mathbb{R})}$.

$\hat{C} = {}^tBY$ et $V(Y)$ existe et vaut $\sigma^2 I_n$.

Alors $V(\hat C)$ existe et vaut ${}^tB\,V(Y)\,{}^t({}^tB)$ d'après I Q3 b.

Ainsi $V(\hat C) = {}^tB\sigma^2 I_n B = \sigma^2\,{}^tBB$. <u>$V(\hat C) = \sigma^2\,{}^tBB$.</u>

Donc $V(\hat C) - V(\hat G) = \sigma^2({}^tBB - H^{-1})$.

Notons que $\sigma^2({}^tBB - H^{-1})$ est une matrice symétrique de $\mathcal M_\ell(\mathbb R)$ car ${}^tBB$ et H^{-1} sont deux matrices symétriques de $\mathcal M_\ell(\mathbb R)$. Il en est de même de ${}^tBB - H^{-1}$.

Pour montrer que $V(\hat C)-V(\hat G)$ est positive il suffit de montrer que ${}^tBB - H^{-1}$ est positive car $\sigma^2 \in \mathbb{R}_+^*$.

Comme cela, rien que pour voir, calculons ${}^tFF$.

${}^tF = {}^tB - H^{-1}\,{}^tX$ donc $F = B - {}^t({}^tX)\,{}^t(H^{-1}) = B - XH^{-1}$.

Alors ${}^tFF = {}^tF(B - XH^{-1}) = {}^tFB - {}^tFXH^{-1} \underset{{}^tFX = 0_{\mathcal M_\ell(\mathbb R)}}{=} {}^tFB = ({}^tB - H^{-1}\,{}^tX)B = {}^tBB - H^{-1}\,{}^tXB \underset{{}^tXB = I_\ell}{=} {}^tBB - H^{-1}$!!

Ainsi ${}^tBB - H^{-1} = {}^tFF$ avec $F \in \mathcal M_{n,\ell}(\mathbb R)$

d'après II A Q5 <u>b)</u> ${}^tFF$ est symétrique réelle et surtout positive.

Ainsi ${}^tBB - H^{-1}$ est positive, $\sigma^2({}^tBB-H^{-1})$ aussi.

<u>$V(\hat C) - V(\hat G)$ est positive.</u>

Q3 a) $\hat{U} = Y - X\hat{G} = Y - XH^{-1}\,{}^tXY = Y - PY = \varphi Y = \varphi(X\alpha + U) = \varphi X\alpha + \varphi U$.

Or $PX\alpha = X\alpha$ donc $\varphi X\alpha = 0$. Ainsi $\underline{\hat{U} = \varphi U}$.

$PX\alpha = XH^{-1}\,{}^tXX\alpha = XH^{-1}H\alpha = X\alpha$.

b) $E(\hat{U}) = \varphi E(U)$ ($E(\hat{U})$ existe car $E(U)$ existe) et $E(U) = 0$.

Ainsi $\underline{E(\hat{U}) = 0}$.

$V(U)$ existe et $\hat{U} = \varphi U$ donc $\underline{V(\hat{U})\text{ existe}}$ et vaut : $\varphi V(U)\,{}^t\varphi$ d'après I Q3 b). Rappelons que $V(U) = \sigma^2 I_n$.

Ainsi $V(\hat{U}) = \varphi\sigma^2 I_n\,{}^t\varphi = \sigma^2\varphi\,{}^t\varphi \underset{{}^t\varphi=\varphi}{=} \sigma^2\varphi^2 \underset{\varphi^2=\varphi}{=} \sigma^2\varphi$. $\underline{V(\hat{U}) = \sigma^2\varphi}$.

Supposons $(\hat{U}_1, \hat{U}_2, \dots, \hat{U}_n)$ indépendantes. Alors $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $i \neq j \Rightarrow \mathrm{cov}(\hat{U}_i, \hat{U}_j) = 0$.

Ainsi $V(\hat{U}) = \mathrm{Diag}(V(\hat{U}_1), \dots, V(\hat{U}_n))$.

De plus $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $V(\hat{U}_i) > 0$.

Alors $\mathrm{rg}\,V(\hat{U}) = n$. Or $V(\hat{U}) = \sigma^2\varphi$ et $\mathrm{rg}\,\varphi = n-k < n$.

D'où la contradiction.

$\underline{\hat{U}_1, \hat{U}_2, \dots, \hat{U}_n \text{ ne sont pas indépendantes.}}$

c) $\hat{U} = \begin{pmatrix} \hat{U}_1 \\ \vdots \\ \hat{U}_n \end{pmatrix}$ donc ${}^t\hat{U}\hat{U} = (\hat{U}_1 \cdots \hat{U}_n)\begin{pmatrix} \hat{U}_1 \\ \vdots \\ \hat{U}_n \end{pmatrix}$; $\underline{{}^t\hat{U}\hat{U} = \sum_{i=1}^{n} \hat{U}_i^2}$.

${}^t\hat{U}\hat{U} = {}^t(\varphi U)\varphi U = {}^tU\,{}^t\varphi\varphi U = {}^tU\varphi^2 U = {}^tU\varphi U$; $\underline{{}^t\hat{U}\hat{U} = {}^tU\varphi U}$.

${}^tY\varphi Y = {}^tY\varphi(X\alpha + U) = {}^tY\varphi X\alpha + {}^tY\varphi U \underset{\varphi X\alpha = 0}{=} {}^tY\varphi U = {}^t(X\alpha + U)\varphi U = {}^t\alpha\,{}^tX\varphi U + {}^tU\varphi U$.

Or ${}^t\alpha\,{}^tX\varphi U \underset{\varphi = {}^t\varphi}{=} {}^t\alpha\,{}^tX\,{}^t\varphi U = {}^t(\varphi X\alpha)U \underset{\varphi X\alpha = 0}{=} 0$. Alors $\underline{{}^tY\varphi Y = {}^tU\varphi U}$

Finalement : $\underline{\underline{{}^t\hat{U}\hat{U} = \sum_{i=1}^{n} \hat{U}_i^2 = {}^tUQU = {}^tYQU.}}$

d) $E(U)$ existe et vaut 0, $V(U)$ existe et vaut $\sigma^2 I_n$.

D'après I Q3 c) $E({}^tUQU)$ existe et vaut : $tr(QV(U)) + {}^tE(U)QE(U)$.

Donc $\underline{\underline{E({}^t\hat{U}\hat{U}) \text{ existe}}}$ et vaut : $tr(Q\sigma^2 I_n) + 0 = \sigma^2 tr(Q) = \sigma^2(n-k)$.

$\underline{\underline{E({}^t\hat{U}\hat{U}) = \sigma^2(n-k).}}$

$E({}^t\hat{U}\hat{U})$ existe et vaut $\sigma^2(n-k)$ donc $E(\Delta_n)$ existe et vaut $\frac{1}{n-k}\sigma^2(n-k) = \sigma^2$

$\underline{\underline{\Delta_n \text{ est un estimateur sans biais de } \sigma^2.}}$

C. Etude d'une suite d'estimateurs.

Q1 Posons $QU = \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \\ \vdots \\ T_n \end{pmatrix}$ et $Q = (q_{ij})$.

Alors ${}^tUQU = \sum_{i=1}^{n} U_i T_i = \sum_{i=1}^{n} U_i \sum_{j=1}^{n} q_{ij} U_j = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} q_{ij} U_i U_j$

Ainsi $\underline{\underline{{}^tUQU = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} q_{ij} U_i U_j \,.}}$

Q2 $({}^tUQU)^2 = ({}^tUQU)({}^tUQU) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} q_{ij} U_i U_j \times \sum_{k=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{n} q_{k\ell} U_k U_\ell$

$({}^tUQU)^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{n} q_{ij} q_{k\ell} U_i U_j U_k U_\ell$

" En envisageant plusieurs cas nous allons montrer que $U_iU_jU_kU_\ell$ possède une espérance et la calculer ".

Soit $(i,j,k,\ell) \in [\![1,n]\!]^4$. càd $\{i,j,k,\ell\} \in [\![1,4]\!]$!

1er Cas.. card $\{i,j,k,\ell\}=4$.

U_i, U_j, U_k, U_ℓ sont quatre variables aléatoires indépendantes ayant une espérance nulle. Alors $E(U_iU_jU_kU_\ell)$ existe et vaut $E(U_i)E(U_j)E(U_k)E(U_\ell)$ donc 0 !

2e Cas.. card $\{i,j,k,\ell\}=3$

$\exists(s_1,s_2,s_3)\in[\![1,n]\!]^3$, tel que $\begin{cases}\{i,j,k,\ell\}=\{s_1,s_2,s_3\} \text{ et}\\ U_iU_jU_kU_\ell = U_{s_1}^2\, U_{s_2}\, U_{s_3}.\end{cases}$

$U_{s_1}, U_{s_2}, U_{s_3}$ sont indépendantes donc $U_{s_1}^2$, U_{s_2} et U_{s_3} sont indépendantes et possèdent une espérance. Alors $E(U_{s_1}^2U_{s_2}U_{s_3})$ existe et vaut $E(U_{s_1}^2)E(U_{s_2})E(U_{s_3})$ donc vaut 0. $E(U_iU_jU_kU_\ell)$ existe et vaut 0.

3e Cas.. card $\{i,j,k,\ell\}=2$

a) $\exists(s_1,s_2)\in[\![1,n]\!]^2$, tel que $\begin{cases}\{i,j,k,\ell\}=\{s_1,s_2\}\\ U_iU_jU_kU_\ell = U_{s_1}^2\,U_{s_2}^2\end{cases}$

$U_{s_1}^2$ et $U_{s_2}^2$ sont indépendantes et possèdent une espérance alors $E(U_iU_jU_kU_\ell)$ existe et vaut $E(U_{s_1}^2)E(U_{s_2}^2)=\sigma^2\times\sigma^2=\sigma^4$

$(\forall s\in[\![1,n]\!],\ E(U_s^2)=V(U_s)+(E(U_s))^2=\sigma^2+0=\sigma^2)$.

b) $\exists(s_1,s_2)\in[\![1,n]\!]^2$, tel que $\begin{cases}\{i,j,k,\ell\}=\{s_1,s_2\}\\ U_iU_jU_kU_\ell = U_{s_1}^3\,U_{s_2}.\end{cases}$

$U_{s_1}^3$ et U_{s_2} sont indépendantes et possèdent une espérance. $E(U_{s_1}^3U_{s_2})$ existe et vaut $E(U_{s_1}^3)E(U_{s_2})$ donc 0.

$E(U_iU_jU_kU_\ell)$ existe et vaut 0.

4e Cas card $\{i,j,k,\ell\}=1$. $i=j=k=\ell$. $U_iU_jU_kU_\ell=U_i^4$ et U_i^4 possède une espérance qui vaut $3\sigma^4$. $E(U_iU_jU_kU_\ell)$ existe et vaut $3\sigma^4$.

Finalement $\forall (i,j,k,\ell) \in [\![1,n]\!]^4$, $E(U_iU_jU_kU_\ell)$ existe.

Ainsi $E(({}^tU\varphi U)^2) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{n} q_{ij}\,q_{k\ell}\;E(U_iU_jU_kU_\ell)$.

Nous avons aussi vu que si $(i,j,k,\ell) \in [\![1,n]\!]^4$, $E(U_iU_jU_kU_\ell)$ est non nul que si : $((i=j)$ et $(k=\ell))$ ou $((i=k)$ et $(j=\ell))$ ou $((i=\ell)$ et $(j=k))$.

Soit $(i,j,k,\ell) \in [\![1,n]\!]^4$.

Si $i \neq j$ $\quad E(U_iU_jU_kU_\ell) = \begin{cases} \sigma^4 & \text{si } (k=i \text{ et } \ell=j) \text{ ou } (k=j \text{ et } \ell=i) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

$\boxed{{}^t\varphi=\varphi}$

Alors $\sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{n} q_{ij}\,q_{k\ell}\,E(U_iU_jU_kU_\ell) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} \sigma^4 q_{ij}\,[q_{ij}+q_{ji}] = 2\sigma^4 \times \sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} q_{ij}^2$

Si $i=j$ $\quad E(U_iU_jU_kU_\ell) = E(U_i^2U_kU_\ell) = \begin{cases} 3\sigma^4 & \text{si } k=\ell=i \\ \sigma^4 & \text{si } k=\ell\neq i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Alors $\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{n} q_{ii}\,q_{k\ell}\,E(U_i^2U_kU_\ell) = \sum_{i=1}^{n} q_{ii}^2 \times 3\sigma^4 + \sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{k=1\\ k\neq i}}^{n} q_{ii}\,q_{kk}\times\sigma^4$

$$= \sum_{i=1}^{n} q_{ii}^2 \times 2\sigma^4 + \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} q_{ii}\,q_{kk}\,\sigma^4$$

$$= \sum_{i=1}^{n} q_{ii}^2 \times 2\sigma^4 + \sum_{i=1}^{n} q_{ii}\sum_{k=1}^{n} q_{\ell\ell}\,\sigma^4$$

$$= 2\sigma^4 \sum_{i=1}^{n} q_{ii}^2 + (\mathrm{tr}(\varphi))^2\sigma^4$$

Alors $E(({}^tU\varphi U)^2) = \sigma^4\left[2\sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} q_{ij}^2 + 2\sum_{i=1}^{n} q_{ii}^2 + (\mathrm{tr}(\varphi))^2\right]$

$$E(({}^tU\varphi U)^2) = \sigma^4\Big[2\underbrace{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} q_{ij}^2}_{=\,\mathrm{tr}({}^t\varphi\varphi)=\mathrm{tr}(\varphi^2)} + \mathrm{tr}(\varphi)^2\Big] = \sigma^4\left[2\,\mathrm{tr}(\varphi^2) + (\mathrm{tr}(\varphi))^2\right]$$

$\mathbb{E}(({}^tU\varphi U)^2) = \sigma^4\left[(tr(\varphi))^2 + 2\,tr(\varphi^2)\right].$

$tr(\varphi) = n-\ell$ et $tr(\varphi^2) = tr\,\varphi = n-\ell$.

Ainsi $\mathbb{E}(({}^tU\varphi U)^2) = \sigma^4[(n-\ell)^2 + 2(n-\ell)] = \sigma^4(n-\ell)(n-\ell+2)$.

$\mathbb{E}(({}^tU\varphi U)^2) = \sigma^4(n-\ell)(n-\ell+2).$

Q3 $V(\Delta_n) = V\left(\frac{{}^t\hat{U}\hat{U}}{n-\ell}\right) = \frac{1}{(n-\ell)^2}V({}^t\hat{U}\hat{U}) = \frac{1}{(n-\ell)^2}\left[\mathbb{E}(({}^t\hat{U}\hat{U})^2) - (\mathbb{E}({}^t\hat{U}\hat{U}))^2\right]$

$V(\Delta_n) = \frac{1}{(n-\ell)^2}\left[\mathbb{E}(({}^tU\varphi U)^2) - (\sigma^2(n-\ell))^2\right] = \frac{1}{(n-\ell)^2}\left[\sigma^4(n-\ell)(n-\ell+2) - \sigma^4(n-\ell)^2\right]$

$V(\Delta_n) = \frac{\sigma^4}{n-\ell}\left[n-\ell+2-(n-\ell)\right] = \frac{2\sigma^4}{n-\ell}$. $V(\Delta_n) = \frac{2\sigma^4}{n-\ell}$.

$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, $0 \leq P(|\Delta_n - \sigma^2| \geq \varepsilon) = P(|\Delta_n - E(\Delta_n)| \geq \varepsilon) \leq \frac{V(\Delta_n)}{\varepsilon^2} = \frac{2\sigma^4}{(n-\ell)\varepsilon^2}$ d'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev. Le théorème d'encadrement donne alors : $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, $\lim_{n\to+\infty} P(|\Delta_n - \sigma^2| \geq \varepsilon) = 0$.

$(\Delta_n)_{n\geq \ell+1}$ converge en probabilité vers la variable aléatoire certaine égale à σ^2.

La suite d'estimateurs $(\Delta_n)_{n\geq\ell+1}$ de σ^2 est convergente.