PARTIE I Un résultat d'analyse

Q1 $n \in \mathbb{N}^*$, $x \in]0,1[$, $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ et $0 < x-\varepsilon < x < x+\varepsilon < 1$.

Rappelons que si a est un réel et b un réel strictement positifs :

$|a| \geqslant b \Leftrightarrow a \leqslant -b$ ou $a \geqslant b$ donc $a \geqslant b \overset{(1)}{\Rightarrow} |a| \geqslant b$ et $a \leqslant -b \overset{(2)}{\Rightarrow} |a| \geqslant b$

a) Soit v un élément de $[x+\varepsilon, 1]$. Notons que $v-x \geqslant \varepsilon$; en particulier $n(v-x)>0$

$\{Y_{n,v} \leqslant nx\} = \{Y_{n,v} - nv \leqslant n(x-v)\} = \{Y_{n,v} - nv \leqslant -n(x-v)\}$

(1) donne alors $\{Y_{n,v} \leqslant nx\} = \{Y_{n,v} - nv \leqslant -n(x-v)\} \subset \{|Y_{n,v} - nv| \geqslant n(x-v)\}$

$\underline{\{Y_{n,v} \leqslant nx\} \subset \{|Y_{n,v} - nv| \geqslant n(v-x)\}}$.

La croissance de P donne alors $P(Y_{n,v} \leqslant nx) \leqslant P(|Y_{n,v} - nv| \geqslant n(v-x))$

$nv = E(Y_{n,v})$ et $n(v-x)>0$. L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev donne alors :

$$P(Y_{n,v} \leqslant nx) \leqslant P(|Y_{n,v} - E(Y_{n,v})| \geqslant n(v-x)) \leqslant \frac{V(Y_{n,v})}{(n(v-x))^2} = \frac{nv(1-v)}{n^2(v-x)^2} = \frac{v(1-v)}{n(v-x)^2}.$$

Or $v-x \geqslant \varepsilon > 0$ donc $(v-x)^2 \geqslant \varepsilon^2 > 0$ et ainsi $0 < \frac{1}{(v-x)^2} \leqslant \frac{1}{\varepsilon^2}$.

$v \in [0,1]$ donc $0 \leqslant v(1-v) = v - v^2 = \frac{1}{4} - (v-\frac{1}{2})^2 \leqslant \frac{1}{4}$; $0 \leqslant v(1-v) \leqslant \frac{1}{4}$.

↳ de plus il est de notoriété publique que $\max_{v\in[0,1]} v(1-v) = \frac{1}{4}$.

Alors $\frac{v(1-v)}{n(v-x)^2} \leqslant \frac{v(1-v)}{n\varepsilon^2} \leqslant \frac{1}{4n\varepsilon^2}$.

Par conséquent $\underline{P(Y_{n,v} \leqslant nx) \leqslant \frac{v(1-v)}{n\varepsilon^2} \leqslant \frac{1}{4n\varepsilon^2}}$ pour tout v dans $[x+\varepsilon, 1]$.

b) $\forall v \in [0, x-\varepsilon]$ $\{Y_{n,v} \geqslant nx\} = \{Y_{n,v} - nv \geqslant n(x-v)\} \underset{(1) \text{ et } n(x-v)>0}{\subset} \{|Y_{n,v} - nv| \geqslant n(x-v)\}$.

Or $\{Y_{n,v} > nx\} \subset \{Y_{n,v} \geqslant nx\} \subset \{|Y_{n,v} - nv| \geqslant n(x-v)\} = \{|Y_{n,v} - E(Y_{n,v})| \geqslant n(x-v)\}$

$$P(Y_{n,v} > nx) \leqslant P(|Y_{n,v} - E(Y_{n,v})| \geqslant n(x-v)) \leqslant \frac{V(Y_{n,v})}{(n(x-v))^2} = \frac{nv(1-v)}{n^2(x-v)^2} = \frac{v(1-v)}{n(x-v)^2}.$$

B.T.

$v \in [0, x-\varepsilon]$. $v \leq x-\varepsilon$; $0 < \varepsilon \leq x-v$; $0 < \varepsilon^2 \leq (x-v)^2$. Donc : $0 < \frac{1}{(x-v)^2} \leq \frac{1}{\varepsilon^2}$.

$v \in [0,1]$. $0 \leq v(1-v) = \frac{1}{4} - \left(v - \frac{1}{2}\right)^2 \leq \frac{1}{4}$.

Alors $\frac{v(1-v)}{n(x-v)^2} \leq \frac{1}{4n\varepsilon^2}$.

donc $\forall v \in [0, x-\varepsilon]$, $P(Y_{n,v} > nx) \leq \frac{1}{4n\varepsilon^2}$.

c) $\forall v \in [x+\varepsilon, 1]$, $0 \leq |\varphi(v)| \leq \Pi$ et $0 \leq P(Y_{n,v} \leq nx) \leq \frac{1}{4n\varepsilon^2}$.

Alors $\forall v \in [x+\varepsilon, 1]$, $0 \leq |\varphi(v) P(Y_{n,v} \leq nx)| = |\varphi(v)| P(Y_{n,v} \leq nx) \leq \frac{\Pi}{4n\varepsilon^2}$.

$$\left|\int_{x+\varepsilon}^{1} \varphi(v) P(Y_{n,v} \leq nx)\, dv\right| \underset{x+\varepsilon \leq 1}{\leq} \int_{x+\varepsilon}^{1} |\varphi(v) P(Y_{n,v} \leq nx)|\, dv \underset{x+\varepsilon \leq 1}{\leq} \int_{x+\varepsilon}^{1} \frac{\Pi}{4n\varepsilon^2}\, dv = \frac{\Pi}{4n\varepsilon^2}(1-x-\varepsilon) \underset{\frac{\Pi}{4n\varepsilon^2} \geq 0 \text{ et } -\varepsilon < 0}{\leq} \frac{\Pi(1-x)}{4n\varepsilon^2}$$

donc $\left|\int_{x+\varepsilon}^{1} \varphi(v) P(Y_{n,v} \leq nx)\, dv\right| \leq \frac{\Pi(1-x)}{4n\varepsilon^2}$.

$$\left|\int_{0}^{x-\varepsilon} \varphi(v)(1 - P(Y_{n,v} \leq nx))\, dv\right| = \left|\int_{0}^{x-\varepsilon} \varphi(v) P(Y_{n,v} > nx)\, dv\right| \underset{x-\varepsilon > 0}{\leq} \int_{0}^{x-\varepsilon} |\varphi(v) P(Y_{n,v} > nx)|\, dv$$

$\forall v \in [0, x-\varepsilon]$, $|\varphi(v) P(Y_{n,v} > n\varepsilon)| = |\varphi(v)| P(Y_{n,v} > n\varepsilon) \leq \Pi \times \frac{1}{4n\varepsilon^2} = \frac{\Pi}{4n\varepsilon^2}$.

Alors $\int_{0}^{x-\varepsilon} |\varphi(v) P(Y_{n,v} > n\varepsilon)|\, dv \leq \int_{0}^{x-\varepsilon} \frac{\Pi}{4n\varepsilon^2}\, dv = \frac{\Pi}{4n\varepsilon^2}(x-\varepsilon) \underset{\left\{\begin{array}{l} -\varepsilon < 0 \\ \frac{\Pi}{4n\varepsilon^2} \geq 0 \end{array}\right.}{\leq} \frac{\Pi x}{4n\varepsilon^2}$

Par conséquent $\left|\int_{0}^{x-\varepsilon} \varphi(v)(1 - P(Y_{n,v} \leq nx))\, dv\right| \leq \frac{\Pi x}{4n\varepsilon^2}$.

d) Pour faciliter les écritures, posons $A = \{Y_{n,v} \leq nx\}$.

$$\int_0^x \varphi(v)dv - \int_0^1 \varphi(v)P(A)\,dv = \int_0^{x-\varepsilon}\varphi(v)dv + \int_{x-\varepsilon}^{x}\varphi(v)dv - \int_0^{x-\varepsilon}\varphi(v)P(A)dv - \int_{x-\varepsilon}^{x}\varphi(v)P(A)dv - \int_x^{x+\varepsilon}\varphi(v)P(A)dv - \int_{x+\varepsilon}^{1}\varphi(v)P(A)dv$$

Par conséquent :

$$\left|\int_0^x \varphi(v)dv - \int_0^1 \varphi(v)P(A)dv\right| \leq \left|\int_0^{x-\varepsilon}\varphi(v)(1-P(A))dv\right| + \left|\int_{x-\varepsilon}^{x}\varphi(v)(1-P(A))dv\right| + \left|\int_x^{x+\varepsilon}\varphi(v)P(A)dv\right| + \left|\int_{x+\varepsilon}^{1}\varphi(v)P(A)dv\right|$$

$$\left|\int_0^x \varphi(v)dv - \int_0^1 \varphi(v)P(A)dv\right| \leq \frac{\Pi x}{4n\varepsilon^2} + \int_{x-\varepsilon}^{x}|\varphi(v)P(\bar{A})|dv + \int_x^{x+\varepsilon}|\varphi(v)P(A)|dv + \frac{\Pi(1-x)}{4n\varepsilon^2}.$$

Or $\displaystyle\int_{x-\varepsilon}^{x}|\varphi(v)P(\bar{A})|dv = \int_{x-\varepsilon}^{x}|\varphi(v)|P(\bar{A})dv \leq \int_{x-\varepsilon}^{x}\Pi\,dv = \Pi\varepsilon$.

$x-\varepsilon < x$

De même $\displaystyle\int_x^{x+\varepsilon}|\varphi(v)P(A)|dv = \int_x^{x+\varepsilon}|\varphi(v)|P(A)dv \leq \int_x^{x+\varepsilon}\Pi\,dv = \Pi\varepsilon$.

$x < x+\varepsilon$

Par conséquent : $\displaystyle\left|\int_0^x \varphi(v)dv - \int_0^1 \varphi(v)P(A)dv\right| \leq \frac{\Pi x}{4n\varepsilon^2} + \Pi\varepsilon + \Pi\varepsilon + \frac{\Pi(1-x)}{4n\varepsilon^2} = \left(\frac{1}{4n\varepsilon^2} + 2\varepsilon\right)\Pi$

$$\left|\int_0^x \varphi(v)dv - \int_0^1 \varphi(v)P(Y_{n,v} \leq nx)dv\right| \leq \left(\frac{1}{4n\varepsilon^2} + 2\varepsilon\right)\Pi.$$

Q2 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Posons $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^*_+$, $\psi_n(\varepsilon) = \dfrac{1}{4n\varepsilon^2} + 2\varepsilon$. ψ_n est dérivable sur $\mathbb{R}^*_+$

et $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^*_+$, $\psi_n'(\varepsilon) = \dfrac{1}{4n}\left(-\dfrac{2}{\varepsilon^3}\right) + 2 = \dfrac{2}{\varepsilon^3}\left(\varepsilon^3 - \dfrac{1}{4n}\right)$.

Alors $\forall \varepsilon \in \left]0, \sqrt[3]{\frac{1}{4n}}\right]$, $\psi_n'(\varepsilon) \leq 0$ et $\forall \varepsilon \in \left[\sqrt[3]{\frac{1}{4n}}, +\infty\right[$, $\psi_n'(\varepsilon) \geq 0$.

ψ_n admet donc un minimum en $\sqrt[3]{\frac{1}{4n}}$.

Notons que $\psi_n\left(\sqrt[3]{\frac{1}{4n}}\right) = \dfrac{1}{4n}\sqrt[3]{(4n)^2} + 2\sqrt[3]{\frac{1}{4n}} = \sqrt[3]{\frac{1}{4n}} + 2\sqrt[3]{\frac{1}{4n}} = \dfrac{3}{\sqrt[3]{4}}\dfrac{1}{\sqrt[3]{n}}$.

Fixons alors x dans $]0,1[$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\sqrt[3]{\frac{1}{4n}}\right)=0$, $x>0$ et $1-x>0$.

Alors $\exists n_0\in\mathbb{N}^*$, $\forall n\in [\![n_0,+\infty[\![$, $\sqrt[3]{\frac{1}{4n}} < \min(x,1-x)$.

Soit $n\in[\![n_0,+\infty[\![$. Posons $\varepsilon=\sqrt[3]{\frac{1}{4n}}$. $0<\varepsilon<\min(x,1-x)$.

$0<\varepsilon<x$ et $\varepsilon<1-x$; $0<x-\varepsilon<x<x+\varepsilon<1$.

Alors $\left|\int_0^x \varphi(v)dv-\int_0^1\varphi(v)\,P(Y_{n,v}\leqslant nx)dv\right| \leqslant \left(\frac{1}{4n\varepsilon^2}+2\varepsilon\right)M=\varphi_n(\varepsilon)M=\varphi_n\left(\sqrt[3]{\frac{1}{4n}}\right)M$

Or $\varphi_n\left(\sqrt[3]{\frac{1}{4n}}\right)M=\frac{3}{\sqrt[3]{4}}\frac{1}{\sqrt[3]{n}}M=\frac{9}{3\sqrt[3]{4}}\frac{1}{\sqrt[3]{n}}M \leqslant \frac{9M}{4\sqrt[3]{n}}$.

$3\geqslant\sqrt[3]{16}$ car $27\geqslant 16$

Alors $\left|\int_0^x\varphi(v)dv-\int_0^1\varphi(v)\,P(Y_{n,v}\leqslant nx)dv\right|\leqslant\frac{9M}{4\sqrt[3]{n}}$ et ceci pour $n\geqslant n_0$.

$\forall x\in]0,1[,\exists n_0\in\mathbb{N}^*, \forall n\in[\![n_0,+\infty[\![, \left|\int_0^x\varphi(v)dv-\int_0^1\varphi(v)\,P(Y_{n,v}\leqslant nx)dv\right|\leqslant\frac{9M}{4\sqrt[3]{n}}$.

Q3 a) Soit $\hat{P}\in\mathbb{R}[X]$. $\exists r\in\mathbb{N}$, $\exists(a_0,a_1,\dots,a_r)\in\mathbb{R}^{r+1}$, $\hat{P}=\sum\limits_{\ell=0}^{r}a_\ell X^\ell$.

$\int_0^1\varphi(v)\hat{P}(v)dv=\int_0^1\varphi(v)\left(\sum\limits_{\ell=0}^{r}a_\ell v^\ell\right)dv=\sum\limits_{\ell=0}^{r}a_\ell\int_0^1\varphi(v)v^\ell dv=\sum\limits_{\ell=0}^{r}a_\ell\times 0=0$.

Ainsi $\forall\hat{P}\in\mathbb{R}[X]$, $\int_0^1\varphi(v)\hat{P}(v)dv=0$.

---

b) Soit $x\in]0,1[$. $\exists n_0\in\mathbb{N}^*$, $\forall n\in[\![n_0,+\infty[\![$, $\left|\int_0^x\varphi(v)dv-\int_0^1\varphi(v)\,P(Y_{n,v}\leqslant nx)dv\right|\leqslant\frac{9M}{4\sqrt[3]{n}}$.
Soit $n\in[\![n_0,+\infty[\![$.

$\forall v\in[0,1]$, $P(Y_{n,v}\leqslant nx)=\sum\limits_{\ell=0}^{E(nx)}C_n^\ell v^\ell(1-v)^{n-\ell}$. $v\mapsto P(Y_{n,v}\leqslant nx)$ est donc polynomiale.

Alors $\int_0^1\varphi(v)\,P(Y_{n,v}\leqslant nx)dv=0$ donc $\left|\int_0^x\varphi(v)dv\right|\leqslant\frac{9M}{4\sqrt[3]{n}}$.

Ainsi $\forall x \in [x_0, +\infty[$, $\left|\int_0^x \varphi(v)dv\right| \leq \frac{9\pi}{4\sqrt[3]{n}}$.

En faisant tendre n vers $+\infty$ il vient : $\left|\int_0^x \varphi(v)dv\right| = 0$ ou $\int_0^x \varphi(v)dv = 0$.

Ainsi $\underline{\underline{\forall x \in]0,1[,\ \int_0^x \varphi(v)dv = 0}}$; et alors $\underline{\forall x \in \underset{=}{[}0,1[,\ \int_0^x \varphi(v)dv = 0}$.

c) φ est continue sur $[0,1]$. $x \mapsto \int_0^x \varphi(v)dv$ est la primitive de φ sur $[0,1]$ qui prend la valeur 0 en 0. $\forall x \in [0,1[$, $\int_0^x \varphi(v)dv = 0$; en dérivant on obtient alors :

$\forall x \in [0,1[$, $\varphi(x) = 0$. Alors $\lim_{x \mapsto 1^-} \varphi(x) = 0$. Comme φ est continue (à gauche)

en 1 : $\varphi(1) = \lim_{x \mapsto 0^-} \varphi(x) = 0$.

Finalement $\underline{\underline{\varphi \text{ est nulle sur } [0,1]}}$.

__Remarque__ .. On trouvera dans le rapport ORAL-HEC-2002 p.148 un exercice (analyse 3) qui donne une autre preuve de ce résultat... qui peut aussi s'obtenir en deux lignes avec le théorème de Weierstrass.

PARTIE II Caractérisation de la loi exponentielle à l'aide du minimum d'un n-échantillon.

Q1 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $x \in \mathbb{R}$. $P(I_n \leq x) = P(\min_{1 \leq i \leq n} X_i \leq x) = 1 - P(\min_{1 \leq i \leq n} X_i > x)$

$P(I_n \leq x) = 1 - P(\{X_1 > x\} \cap \dots \cap \{X_n > x\}) \underset{\uparrow}{=} 1 - P(X_1 > x)P(X_2 > x) \dots P(X_n > x)$

$X_1, X_2, \dots, X_n$ sont indépendantes

Or $X_1, X_2, \dots, X_n$ ont même loi. Par conséquent : $P(I_n \leq x) = 1 - (P(X_1 > x))^n$.

$P(I_n \leq x) = 1 - (1 - P(X_1 \leq x))^n$. Or $P(X_1 \leq x) = \begin{cases} F(x) & \text{si } x \in [0, +\infty[\\ 0 & \text{si } x \in]-\infty, 0] \end{cases}$

Ainsi $\underline{\underline{\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, P(I_n \leq x) =}}$ $\underline{\underline{\begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-\infty, 0[\\ 1 - (1 - F(x))^n & \text{si } x \in [0, +\infty[\end{cases}}}$

Q2 Ici $n \in \mathbb{N}^*$.

a) $\forall x \in \mathbb{R}$, $P(nI_n \leq x) = P(I_n \leq \frac{x}{n}) = \begin{cases} 1 - \left(1 - F(\frac{x}{n})\right)^n & \text{si } x \in [0, +\infty[\\ 0 & \text{si } x \in]-\infty, 0[. \end{cases}$

Or $\forall x \in [0, +\infty[$, $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$.

donc $\forall x \in [0, +\infty[$, $P(nI_n \leq x) = 1 - \left(1 - (1 - e^{-\lambda \frac{x}{n}})\right)^n = 1 - \left(e^{-\lambda \frac{x}{n}}\right)^n = 1 - e^{-\lambda x} = F(x)$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $P(nI_n \leq x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-\infty, 0[\\ F(x) & \text{si } x \in [0, +\infty[\end{cases}$.

ceci suffit pour dire que nI_n a même loi que X_1. $nI_n \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$.

b) $I_n = \frac{1}{n}(nI_n)$ et nI_n possède une espérance qui vaut $\frac{1}{\lambda}$.

Alors I_n possède une espérance qui vaut $\frac{1}{n} \times \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{n\lambda}$.

$E(I_n)$ existe et vaut $\frac{1}{n\lambda}$.

Remarque.. Normal car en fait $I_n \hookrightarrow \mathcal{E}(n\lambda)$.

Q3 a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Q1 donne $\forall x \in [0, +\infty[$, $P(nI_n \leq x) = 1 - \left(1 - F(\frac{x}{n})\right)^n$

Or l'hypothèse nous indique que nI_n a même loi que X_1.

Alors $\forall x \in [0, +\infty[$, $F(x) = P(X_1 \leq x) = P(nI_n \leq x) = 1 - \left(1 - F(\frac{x}{n})\right)^n$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in [0, +\infty[$, $F(x) = 1 - \left(1 - F(\frac{x}{n})\right)^n$.

b) Soit $x \in [0, +\infty[$. $\lim\limits_{n \to +\infty} F(\frac{x}{n}) = F(0) \overset{X_1(\Omega) = [0, +\infty[}{=} 0$

$\uparrow$ F est continue en 0

Alors $n \ln\left(1 - F(\frac{x}{n})\right) \underset{n \to +\infty}{\sim} n\left(-F(\frac{x}{n})\right) = -x \dfrac{F(\frac{x}{n}) - F(0)}{\frac{x}{n} - 0}$

F est dérivable à droite en 0 et $F'_d(0) = f(0)$ (ou $F'(0) = f(0)$!) car f est continue sur $[0, +\infty[$. $\uparrow D_F = [0, +\infty[$!

Ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{F(\frac{x}{n})-F(0)}{\frac{x}{n}-0}\right)=F'_d(0)=f(0)$.

Par conséquent $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(n\ln(1-F(\frac{x}{n})\right)=-f(0)x=-F'(0)x$

c) Soit $x\in[0,+\infty[$.

$\forall n\in\mathbb{N}^*$, $F(x)=1-\left(1-F(\frac{x}{n})\right)^n=1-e^{n\ln(1-F(\frac{x}{n}))}$

En faisant tendre n vers $+\infty$ on obtient $F(x)=1-e^{-F'(0)x}$

Alors $\forall x\in\mathbb{R}$, $P(X_1\leq x)=\begin{cases}0 & \text{si } x\in]-\infty,0[\\ 1-e^{-F'(0)x} & \text{si } x\in[0,+\infty[\end{cases}$.

X_1 suit la loi exponentielle de paramètre $F'(0)$.

Q4 a) • F est continue sur $[0,+\infty[$

• F est dérivable sur $[0,+\infty[$ et $\forall x\in[0,+\infty[$, $F'(x)=f(x)>0$ donc F est strictement croissante sur $[0,+\infty[$

• $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=1$

Ainsi F définit une bijection de $[0,+\infty[$ sur $[F(0),\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)[=[0,1[$.

F réalise une bijection de $[0,+\infty[$ sur $[0,1[$.

b) Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Notons H_n la fonction de répartition de I_n.

$\forall x\in\mathbb{R}$, $H_n(x)=\begin{cases}0 \text{ si } x\in]-\infty,0[\text{ ou }]-\infty,0]\\ 1-(1-F(x))^n \text{ si } x\in[0,+\infty[\end{cases}$

H_n est de classe C^1 sur $]-\infty,0]$ et sur $[0,+\infty[$ (F est de classe C^1 sur $[0,+\infty[$)

Ainsi H_n est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$ au moins.

Ceci confirme que I_n est une variable aléatoire à densité.

$\forall x\in]-\infty,0[$, $H'_n(x)=0$ et $\forall x\in]0,+\infty[$, $H'_n(x)=nf(x)\,(1-F(x))^{n-1}$.

Posons $\forall x\in]-\infty,0[$, $h_n(x)=0$ et $\forall x\in[0,+\infty[$, $h_n(x)=nf(x)\,(1-F(x))^{n-1}$.

h_n est une application positive de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui coïncide avec H_n' sur $\mathbb{R}^*$ donc sur $\mathbb{R}$ privé d'un ensemble fini de points ; h_n est une densité de I_n.

. $\int_{-\infty}^{0} t\,h_n(t)\,dt$ existe et vaut 0 car $\forall t \in]-\infty, 0[,\ h_n(t) = 0$.

. $\forall t \in [0, +\infty[,\ 0 \leq t\,h_n(t) = n t f(t)(1-F(t))^{n-1} \leq n t f(t)$.

Or X_1 possède une espérance donc $\int_0^{+\infty} t f(t)\,dt$ converge. Les règles de comparaison des intégrales généralisées de fonctions positives donnent alors la convergence de $\int_0^{+\infty} t\,h_n(t)\,dt$. Ceci achève de prouver que I_n possède une espérance.

$E(I_n) = \int_0^{+\infty} t\,h_n(t)\,dt = \int_0^{+\infty} n t f(t)(1-F(t))^{n-1}\,dt$.

Soit $A \in \mathbb{R}_+^*$. $\int_0^A n t f(t)(1-F(t))^{n-1}\,dt \underset{\uparrow}{=} \int_{F(0)}^{F(A)} n F^{-1}(u)(1-u)^{n-1}\,du$.

$\Big\|\ u = F(t)\quad du = F'(t)dt = f(t)dt$
$\ \ \ \ t = F^{-1}(u)$

$F(0) = 0$ et $\lim_{A \to +\infty} F(A) = 1$.

Ainsi $\underline{E(I_n) = \int_0^1 n F^{-1}(u)(1-u)^{n-1}\,du}$.

<u>c)</u> Ce qui précède indique que (faire $n = 1$) $\int_0^1 F^{-1}(u)\,du$ converge.

Alors pour tout $u \in [0,1[$, $\int_u^1 F^{-1}(t)\,dt$ existe.

Soit $u \in [0,1[$. Soit $A \in [u, 1[$.

$\forall t \in [u, A],\ F^{-1}(u) \leq F^{-1}(t)$ car F^{-1} est croissante (F est croissante).

$\int_u^A F^{-1}(u)\,dt \leq \int_u^A F^{-1}(t)\,dt$; $(A-u)\,F^{-1}(u) \leq \int_u^A F^{-1}(t)\,dt$.

En faisant tendre A vers 1 il vient $(1-u)\,F^{-1}(u) \leq \int_u^1 F^{-1}(t)\,dt$

Notons également que $1-u \in [0, +\infty[$ et $F^{-1}(u) \in [0, +\infty[$ donc $(1-u)\,F^{-1}(u) \geq 0$.

$\forall u \in [0,1[,\ 0 \leq (1-u)F^{-1}(u) \leq \int_u^1 F^{-1}(t)dt.$

F est continue sur $[0,+\infty[$ donc F^{-1} est continue sur $[0,1[$. De plus $u \mapsto 1-u$ est continue sur $\mathbb{R}$. Par conséquent G est continue sur $[0,1[$.

$\forall u \in [0,1[,\ 0 \leq G(u) = (1-u)F^{-1}(u) \leq \int_u^1 F^{-1}(t)dt = \int_0^1 F^{-1}(t)dt - \int_0^u F^{-1}(t)dt.$

Or $\lim_{u \to 1^-} \int_0^u F^{-1}(t)dt = \int_0^1 F^{-1}(t)dt$ donc $\lim_{u\to 1^-} \left(\int_0^1 F^{-1}(t)dt - \int_0^u F^{-1}(t)dt\right) = 0.$

Alors, par encadrement il vient $\lim_{u \to 1^-} G(u) = 0 = G(1)$; G est continue en 1.

Finalement G est continue sur $[0,1]$.

Soit $n \in [\![2,+\infty[\![$. $E(I_n) = n\int_0^1 F^{-1}(u)(1-u)^{n-1}du = n\int_0^1 G(u)(1-u)^{n-2}du.$

$E(I_n) = n\int_0^1 G(u)(1-u)^{n-2}du \underset{v=1-u}{=} n\int_1^0 G(1-v)v^{n-2}(-dv) = n\int_0^1 G(1-v)v^{n-2}dv.$

$\forall n \in [\![2,+\infty[\![,\ E(I_n) = n\int_0^1 G(u)(1-u)^{n-2}du = n\int_0^1 G(1-v)v^{n-2}dv.$

d) i) Considérons une suite $(X'_n)_{n\geq 1}$ de variables aléatoires indépendantes qui suivent la loi exponentielle de paramètre λ.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $I'_n = \min_{1\leq i\leq n} X'_i$ suit une loi exponentielle de paramètre $\frac{1}{n\lambda}$.

Posons $\forall x \in \mathbb{R},\ f_\lambda(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-\infty,0[\\ \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \in [0,+\infty[\end{cases}$. f_λ est nulle sur $]-\infty,0[$, continue

et strictement positive sur $[0,+\infty[$. Ainsi pouvons-nous appliquer ce qui précède et dire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ E(I'_n) = n\int_0^1 G_\lambda(1-v)v^{n-2}dv.$

$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ n\int_0^1 G_\lambda(1-v)v^{n-2}dv = \frac{1}{n\lambda}.$

ii) $\forall n \in [\![2,+\infty[\![,\ n\int_0^1 G_\lambda(1-v)\,v^{n-2}\,dv = \frac{1}{n\lambda} = E(I_n) = n\int_0^1 G(1-v)\,v^{n-2}\,dv$.

$\forall n \in [\![2,+\infty[\![,\ \int_0^1 G_\lambda(1-v)\,v^{n-2}\,dv = \int_0^1 G(1-v)\,v^{n-2}\,dv$.

Alors $\forall n \in \mathbb{N},\ \int_0^1 G_\lambda(1-v)\,v^{n}\,dv = \int_0^1 G(1-v)\,v^{n}\,dv$.

$\forall n \in \mathbb{N},\ \int_0^1 (G_\lambda - G)(1-v)\,v^{n}\,dv = 0$.

G_λ, G et $v \mapsto 1-v$ sont continues sur $[0,1]$ et $\forall v \in [0,1],\ 1-v \in [0,1]$.

Ainsi $v \mapsto (G_\lambda - G)(1-v)$ est continue sur $[0,1]$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ \int_0^1 (G_\lambda - G)(1-v)\,v^{n}\,dv = 0$.

I5 indique alors que $\forall v \in [0,1],\ (G_\lambda - G)(1-v) = 0$.

Comme $v \mapsto 1-v$ réalise une bijection de $[0,1]$ sur $[0,1]$: $\forall u \in [0,1],\ (G_\lambda - G)(u) = 0$.

Alors $\underline{\underline{G = G_\lambda}}$.

iii) $\forall u \in [0,1[,\ (1-u)F^{-1}(u) = G(u) = G_\lambda(u) = (1-u)\,F_\lambda^{-1}(u)$

$\forall u \in [0,1[,\ F^{-1}(u) = F_\lambda^{-1}(u)\ ;\quad F^{-1} = F_\lambda^{-1}$.

Soit $x \in [0,+\infty[$. $F^{-1}(F(x)) = x = F_\lambda^{-1}(F_\lambda(x)) \overset{\downarrow}{=} F^{-1}(F_\lambda(x))$.

$F^{-1}(F(x)) = F^{-1}(F_\lambda(x))$ et F^{-1} est injective donc $F(x) = F_\lambda(x)$.

$\forall x \in [0,+\infty[,\ F(x) = F_\lambda(x)$.

$\forall x \in [0,+\infty[,\ F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$ et $\forall x \in]-\infty, 0[,\ P(X_1 \leq x) = 0$.

Donc $\underline{\underline{X_1 \text{ suit la loi exponentielle de paramètre } \lambda}}$.

PARTIE III Caractérisation de la loi exponentielle à l'aide des deux premiers records

A. Préliminaire

Q1 $\{R_2=R_1\}=\{R_2=X_1\}=\bigcap_{\ell=2}^{+\infty}\{X_\ell\leq X_1\}=\bigcap_{\ell=1}^{+\infty}\{X_\ell\leq X_1\}$.

Ainsi $\{R_2=R_1\}=\bigcap_{\ell=1}^{+\infty}\{X_\ell\leq X_1\}$

Q2 Soit $t\in[0,+\infty[$ et $n\in\mathbb{N}^*$. $(\{X_1\leq t\},\{X_1>t\})$ est un système complet d'événements.

Alors $P(\bigcap_{\ell=2}^{n+1}\{X_\ell\leq X_1\})=P(\bigcap_{\ell=2}^{n+1}\{X_\ell\leq X_1\}\cap\{X_1\leq t\})+P(\bigcap_{\ell=2}^{n+1}\{X_\ell\leq X_1\}\cap\{X_1>t\})$.

Observons que $\bigcap_{\ell=2}^{n+1}\{X_\ell\leq X_1\}\cap\{X_1\leq t\}\subset\bigcap_{\ell=1}^{n+1}\{X_\ell\leq t\}$

et $\bigcap_{\ell=2}^{n+1}\{X_\ell\leq X_1\}\cap\{X_1>t\}\subset\{X_1>t\}$.

La croissance de P donne alors : $P(\bigcap_{\ell=2}^{n+1}\{X_\ell\leq X_1\})\leq P(\bigcap_{\ell=1}^{n+1}\{X_\ell\leq t\})+P(X_1>t)$.

Par indépendance $P(\bigcap_{\ell=1}^{n+1}\{X_\ell\leq t\})\leq\prod_{\ell=1}^{n+1}P(X_\ell\leq t)=\prod_{\ell=1}^{n+1}F(t)=(F(t))^{n+1}$.

De plus $P(X_1>t)=1-P(X_1\leq t)=1-F(t)$.

Alors $\forall t\in[0,+\infty[$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $P(\bigcap_{\ell=2}^{n+1}\{X_\ell\leq X_1\})\leq(F(t))^{n+1}+1-F(t)$.

Q3 $\lim_{t\to+\infty}F(t)=1$; $\lim_{t\to+\infty}(1-F(t))=0$. $\exists A\in\mathbb{R}_+^*$, $\forall t\in]A,+\infty[$, $|1-F(t)|<\varepsilon$.

Alors $\forall t\in]A,+\infty[$, $1-F(t)<\varepsilon$. Fixons t dans $]A,+\infty[$. $1-F(t)<\varepsilon$.

De plus $F(t)\in[0,1[$ donc $\lim_{n\to+\infty}(F(t))^n=0$.

Ainsi $\exists n_0\in\mathbb{N}^*$, $\forall n\in[\![n_0,+\infty[\![$, $|(F(t))^n|<\varepsilon$; $\forall n\in[\![n_0,+\infty[\![$, $(F(t))^n<\varepsilon$.

Par conséquent $\forall n\in[\![n_0,+\infty[\![$, $P(\bigcap_{\ell=2}^{n+1}\{X_\ell\leq X_1\})<\varepsilon+\varepsilon=2\varepsilon$

Ainsi $\forall\varepsilon\in\mathbb{R}_+^*$, $\exists n_0\in\mathbb{N}^*$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $n\geq n_0\Rightarrow P(\bigcap_{\ell=2}^{n+1}\{X_\ell\leq X_1\})<2\varepsilon$ ou $\leq2\varepsilon$

Comme $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $P\left(\bigcap_{\ell=2}^{n+1}\{X_\ell \le X_1\}\right) \geq 0$ on peut dire que : $\lim_{n\to+\infty} P\left(\bigcap_{\ell=2}^{n+1}\{X_\ell\le X_1\}\right) = 0$.

Q4 La suite $\left(\bigcap_{\ell=2}^{n+1}\{X_\ell\le X_1\}\right)_{n\ge1}$ est décroissante donc :

$$P\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty}\left(\bigcap_{\ell=2}^{n+1}\{X_\ell\le X_1\}\right)\right) = \lim_{n\to+\infty} P\left(\bigcap_{\ell=2}^{n+1}\{X_\ell\le X_1\}\right) = 0$$

Or $\bigcap_{n=1}^{+\infty}\left(\bigcap_{\ell=2}^{n+1}\{X_\ell\le X_1\}\right) = \bigcap_{\ell=2}^{+\infty}\{X_\ell\le X_1\}$; ainsi $P\left(\bigcap_{\ell=2}^{+\infty}\{X_\ell\le X_1\}\right)=0$.

Rappelons que $\{R_2=R_1\} = \bigcap_{\ell=1}^{+\infty}\{X_\ell\le X_1\} = \bigcap_{\ell=2}^{+\infty}\{X_\ell\le X_1\}$.

Par conséquent $P(R_2=R_1)=0$. Or $\overline{\{R_2=R_1\}} = \{R_2>R_1\}$

Donc $P(R_2>R_1) = 1-P(R_2=R_1)=1$. Presque sûrement $R_2>R_1$.

B. La caractérisation

Q1 Soit $(x,y)\in\mathbb{R}_+^2$ et soit $\ell\in\mathbb{R}_+^*$.

$\varphi(x+\ell,y)-\varphi(x,y) = P(\{R_1\le x+\ell\}\cap\{R_2-R_1>y\}) - P(\{R_1\le x\}\cap\{R_2-R_1>y\})$

$\varphi(x+\ell,y)-\varphi(x,y) = P(\{x<R_1\le x+\ell\}\cap\{R_2-R_1>y\}) = P(\{x<X_1\le x+\ell\}\cap\{R_2-X_1>y\})$

$\{R_2-X_1>y\} = \{R_2-R_1>y\} \subset \{R_2>R_1\} = \bigcup_{j=1}^{+\infty}\left(\bigcap_{i=1}^{j}\{X_i\le X_1\}\cap\{X_{j+1}>X_1\}\right)$

Posons pour tout $j\in\mathbb{N}^*$, $A_j = \left(\bigcap_{i=1}^j\{X_i\le X_1\}\right)\cap\{X_{j+1}>X_1\}$. $\{R_2>R_1\} = \bigcup_{j=1}^{+\infty} A_j$.

Notons que $(A_j)_{j\ge1}$ est un système quasi-complet d'événements (... A_j).

Alors $\varphi(x+\ell,y)-\varphi(x,y) = P(\{x<X_1\le x+\ell\}\cap\{R_2-X_1>y\}) = \sum_{j=1}^{+\infty} P(\{x<X_1\le x+\ell\}\cap\{R_2-X_1>y\}\cap A_j)$.

Soit $j\in[\![1,+\infty[\![$. $A_j\cap\{R_2-X_1>y\} = \{X_1\le X_1\}\cap\{X_2\le X_1\}\cap\dots\cap\{X_j\le X_1\}\cap\{X_{j+1}-X_1>y\}$

$\{x<X_1\le x+\ell\}\cap\{R_2-X_1>y\}\cap A_j = \{x<X_1\le x+\ell\}\cap\left(\bigcap_{i=1}^j\{X_i\le X_1\}\right)\cap\{X_{j+1}>y+X_1\}$.

Alors $\varphi(x+\ell,y)-\varphi(x,y) = \sum_{j=1}^{+\infty}P\left(\{x<X_1\le x+\ell\}\cap\left(\bigcap_{i=1}^j\{X_i\le X_1\}\right)\cap\{X_{j+1}>y+X_1\}\right)$.

b) Soit $j \in \mathbb{N}^*$. Remarquons que :

1°. $\{x < X_1 \le x+\ell\} \cap (\bigcap_{i=1}^{j} \{X_i \le X_1\}) \subset \{x < X_1 \le x+\ell\} \cap \bigcap_{i=2}^{j} \{X_i \le x+\ell\}$ (à un abus près : $j=1$).

2°. $\{x < X_1 \le x+\ell\} \cap \{X_{j+1} > y+X_1\} \subset \{X_{j+1} > x+y\}$

Alors $\{x<X_1\le x+\ell\} \cap (\bigcap_{i=1}^{j}\{X_i \le X_1\}) \cap \{X_{j+1} > y+X_1\} \subset \{x<X_1\le x+\ell\} \cap (\bigcap_{i=2}^{j}\{X_i \le x+\ell\}) \cap \{X_{j+1} > y+x\}$

$X_1, X_2, \dots, X_{j+1}$ étant indépendantes et P croissante il vient :

$$P(\{x<X_1\le x+\ell\} \cap (\bigcap_{i=1}^{j}\{X_i\le X_1\}) \cap \{X_{j+1} > y+X_1\}) \le \underbrace{P(x<X_1\le x+\ell)\left(\prod_{i=2}^{j} P(X_i \le x+\ell)\right) P(X_{j+1} > x+y)}_{\alpha_j}$$

$$\alpha_j = (F(x+\ell)-F(x))\left(\prod_{i=2}^{j} F(x+\ell)\right)(1-F(x+y))$$

$$\alpha_j = (F(x+\ell)-F(x))\,(1-F(x+y))\,(F(x+\ell))^{j-1}.$$

Remarque.. Si $j=1$:

$$P(\{x<X_1\le x+\ell\} \cap (\bigcap_{i=1}^{j}\{X_i\le X_1\}) \cap \{X_{j+1} > y+X_1\}) = P(\{x<X_1\le x+\ell\} \cap \{X_2 > y+X_1\})$$
$$\le P(\{x<X_1\le x+\ell\} \cap \{X_2 > y+x\})$$
$$\le (F(x+\ell)-F(x))(1-F(x+y)) = \alpha_1.$$

Alors ce qui était abusif devient raisonnable.

On peut noter que $\sum_{j=1}^{+\infty}\left[(F(x+\ell)-F(x))(1-F(x+y))(F(x+\ell))^{j-1}\right]$ existe et

vaut $(F(x+\ell)-F(x))(1-F(x+y))\dfrac{1}{1-F(x+\ell)}$ car $F(x+\ell) \in [0,1[$.

Alors : $\varphi(x+\ell)-\varphi(x) = \sum_{j=1}^{+\infty} P(\{x<X_1\le x+\ell\} \cap (\bigcap_{i=1}^{j}\{X_i\le X_1\}) \cap \{X_{j+1} > y+X_1\}) \le \sum_{j=1}^{+\infty}\alpha_j$

Donc $\varphi(x+\ell)-\varphi(x) \le \dfrac{F(x+\ell)-F(x)}{1-F(x+\ell)}\,(1-F(x+y))$.

Soit $j \in \mathbb{N}^*$.

$\{x<X_1\leq x+\ell\} \cap \left(\bigcap_{i=2}^{j}\{X_i\leq X_1\}\right) \cap \{X_{j+1}>y+X_1\}$ contient l'événement

$B_j=\{x<X_1\leq x+\ell\}\cap\left(\bigcap_{i=2}^{j}\{X_i\leq x\}\right)\cap\{X_{j+1}>y+x+\ell\}$. De plus

$P(B_j)=P(x<X_1\leq x+\ell)\left(\prod_{i=2}^{j}P(X_i\leq x)\right)P(X_{j+1}>y+x+\ell)$ car $X_1, X_2, \dots, X_{j+1}$ sont indépendantes.

$$P(B_j)=(F(x+\ell)-F(x))\left(\prod_{i=2}^{j}F(x)\right)(1-F(x+y+\ell))\leq P\left(\{x<X_1\leq x+\ell\}\cap\left(\bigcap_{i=2}^{j}\{X_i\leq X_1\}\right)\cap\{X_{j+1}>y+X_1\}\right)$$

Donc $(F(x+\ell)-F(x))(1-F(x+y+\ell))(F(x))^{j-1}\leq P\left(\{x<X_1\leq x+\ell\}\cap\left(\bigcap_{i=2}^{j}\{X_i\leq X_1\}\right)\cap\{X_{j+1}>y+X_1\}\right)$

Notons que $\sum_{j=1}^{+\infty}(F(x+\ell)-F(x))(1-F(x+y+\ell))(F(x))^{j-1}$ existe et vaut :

$(F(x+\ell)-F(x))(1-F(x+y+\ell))\dfrac{1}{1-F(x)}$ car $F(x)\in[0,1[$.

Alors $\dfrac{F(x+\ell)-F(x)}{1-F(x)}(1-F(x+y+\ell))\leq\sum_{j=1}^{+\infty}P\left(\{x<X_1\leq x+\ell\}\cap\left(\bigcap_{i=2}^{j}\{X_i\leq X_1\}\right)\cap\{X_{j+1}>y+X_1\}\right)$

Par conséquent $\underline{\dfrac{F(x+\ell)-F(x)}{1-F(x)}(1-F(x+y+\ell))\leq\varphi(x+\ell)-\varphi(x)}$.

$$\dfrac{F(x+\ell)-F(x)}{1-F(x)}(1-F(x+y+\ell))\leq\varphi(x+\ell,y)-\varphi(x,y)\leq\dfrac{F(x+\ell)-F(x)}{1-F(x+\ell)}(1-F(x+y)).$$

(Q2) Soit $(x,y)\in\mathbb{R}_+^2$. Ce qui précède donne :

$$\forall \ell\in\mathbb{R}_+^*,\quad \frac{F(x+\ell)-F(x)}{\ell}\,\frac{1-F(x+y+\ell)}{1-F(x)}\leq\frac{\varphi(x+\ell,y)-\varphi(x,y)}{\ell}\leq\frac{F(x+\ell)-F(x)}{\ell}\,\frac{1-F(x+y)}{1-F(x+\ell)}$$

f est continue sur $[0,+\infty[$ donc F est dérivable à droite en x et $F'_d(x)=f(x)$.

Ainsi $\lim_{\ell\to 0}\dfrac{F(x+\ell)-F(x)}{\ell}=f(x)$. De plus F est continue à droite en tout point de $[0,+\infty[$ donc $\lim\limits_{h\to 0^+} F(x+y+h) = F(x+y)$ et $\lim\limits_{h\to 0^+} F(x+h) = 0$.

Ainsi $\lim\limits_{h\to 0^+}\left(\frac{F(x+h)-F(x)}{h}\,\frac{1-F(x+y+h)}{1-F(x)}\right) = f(x)\,\frac{1-F(x+y)}{1-F(x)}$ et $\lim\limits_{h\to 0^+}\left(\frac{F(x+h)-F(x)}{h}\,\frac{1-F(x+y)}{1-F(x+h)}\right) = f(x)\,\frac{1-F(x+y)}{1-F(x)}$. Alors par encadrement on obtient : $\lim\limits_{h\to 0^+}\frac{\varphi(x+h,y)-\varphi(x,y)}{h} = f(x)\,\frac{1-F(x+y)}{1-F(x)}$.

En admettant que : $\lim\limits_{h\to 0^-}\frac{\varphi(x+h,y)-\varphi(x,y)}{h} = f(x)\,\frac{1-F(x+y)}{1-F(x)}$ on peut dire que φ admet une dérivée partielle d'ordre 1, par rapport à la première variable, en (x,y) qui vaut $f(x)\,\frac{1-F(x+y)}{1-F(x)}$.

$$\forall (x,y)\in \mathbb{R}_+^2,\quad \frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,y) = \frac{f(x)}{1-F(x)}\,(1-F(x+y)).$$

(Q3) $X_1 \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$.

a) $\forall x\in\mathbb{R}_+, F(x) = 1-e^{-\lambda x}$ et $\forall x\in\mathbb{R}_+,\ f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$

$\forall (x,y)\in\mathbb{R}_+^2,\ \frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,y) = \frac{\lambda e^{-\lambda x}}{1-(1-e^{-\lambda x})}\times\left(1-(1-e^{-\lambda(x+y)})\right) = \lambda e^{-\lambda(x+y)}$.

Soit $y\in\mathbb{R}_+$. $\forall x\in\mathbb{R}_+,\ \frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,y) = \lambda e^{-\lambda(x+y)} = \lambda e^{-\lambda x}e^{-\lambda y}$.

Donc $\exists\, \underline{\underline{\delta_y}}\in\mathbb{R},\ \forall x\in\mathbb{R}_+,\ \varphi(x,y) = -e^{-\lambda x}e^{-\lambda y} + \underline{\underline{\delta_y}}$.

En particulier $-e^{-\lambda\times 0}e^{-\lambda y} + \delta_y = \varphi(0,y) = P(\{R_1\leq 0\}\cap\{R_2-R_1>y\}) \underset{P(R_1\leq 0)=0}{=} 0$

donc $\delta_y = e^{-\lambda y}$

Alors $\forall x\in\mathbb{R}_+,\ \varphi(x,y) = (1-e^{-\lambda x})e^{-\lambda y}$.

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}_+^2,\quad \varphi(x,y) = (1-e^{-\lambda x})e^{-\lambda y}.$$

b) Soit $y \in \mathbb{R}_+^*$. Observons que $\{R_2 - R_1 > y\} = \bigcup_{n=0}^{+\infty} \left(\{R_1 \leq n\} \cap \{R_2 - R_1 > y\} \right)$

De plus la suite $\left(\{R_1 \leq n\} \cap \{R_2 - R_1 > y\} \right)_{n \geq 0}$ est croissante.

Alors $P(R_2 - R_1 > y) = \lim\limits_{n \to +\infty} P(\{R_1 \leq n\} \cap \{R_2 - R_1 > y\}) = \lim\limits_{n \to +\infty} \varphi(n, y) = \lim\limits_{n \to +\infty} \left[(1 - e^{-\lambda n}) e^{-\lambda y} \right] = e^{-\lambda y}$.

Ainsi $P(R_2 - R_1 \leq y) = 1 - e^{-\lambda y}$.

Alors $\forall y \in \mathbb{R}$, $P(R_2 - R_1 \leq y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y \in]-\infty, 0[\\ 1 - e^{-\lambda y} & \text{si } y \in [0, +\infty[\end{cases}$.

$R_2 - R_1$ suit une loi exponentielle de paramètre λ.

$\forall (x,y) \in \mathbb{R}_+^2$, $P(\{R_1 \leq x\} \cap \{R_2 - R_1 \leq y\}) = P(R_1 \leq x) - P(\{R_1 \leq x\} \cap \{R_2 - R_1 > y\})$.

$\forall (x,y) \in \mathbb{R}_+^2$, $P(\{R_1 \leq x\} \cap \{R_2 - R_1 \leq y\}) = 1 - e^{-\lambda x} - \varphi(x,y) = 1 - e^{-\lambda x} - (1 - e^{-\lambda x}) e^{-\lambda y}$.

$\forall (x,y) \in \mathbb{R}_+^2$. $P(\{R_1 \leq x\} \cap \{R_2 - R_1 \leq y\}) = (1 - e^{-\lambda x})(1 - e^{-\lambda y}) = P(R_1 \leq x) P(R_2 - R_1 \leq y)$.

b) $\forall y \in \mathbb{R}_+,\ 1 - G(y) = \dfrac{1 - F(0+y)}{1 - F(0)} \underset{F(0)=0}{=} 1 - F(y)$. $\forall y \in \mathbb{R}_+,\ G(y) = F(y)$.

Alors $\underline{\underline{F = G_{|[0,+\infty[}}}$ (et non pas $G = F$!).

$\forall (x,y) \in \mathbb{R}_+^2,\ \dfrac{1 - F(x+y)}{1 - F(x)} = 1 - G(y) = 1 - F(y)$.

Alors $\forall (x,y) \in \mathbb{R}_+^2,\ \dfrac{P(X_1 > x+y)}{P(X_1 > x)} = P(X_1 > y)$.

$\forall (x,y) \in \mathbb{R}_+^2,\ P(X_1 > y) = \dfrac{P(X_1 > x+y)}{P(X_1 > x)} = \dfrac{P(\{X_1 > x+y\} \cap \{X_1 > x\})}{P(X_1 > x)} = P(\{X_1 > x+y\} / (X_1 > x))$.

$\underline{\underline{\forall (x,y) \in \mathbb{R}_+^2,\ P(\{X_1 > x+y\} / (X_1 > x)) = P(X_1 > y)}}$.

Ainsi **X_1 suit une loi exponentielle** (propriété d'absence de mémoire).