CHAMBRE DE COMMERCE ET D'INDUSTRIE DE PARIS
DIRECTION DE L'ENSEIGNEMENT
Direction des Admissions et Concours

ECOLE DES HAUTES ETUDES COMMERCIALES
E.S.C.P. - E.A.P.
ECOLE SUPERIEURE DE COMMERCE DE LYON

CONCOURS D'ADMISSION SUR CLASSES PREPARATOIRES

OPTION SCIENTIFIQUE

MATHEMATIQUES II

Mercredi 9 Mai 2001, de 8h. à 12h.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document ; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

L'objet du problème est l'étude de quelques aspects de la théorie classique du risque dont le contexte et les notations sont introduits au fur et à mesure.

Dans tout le problème, on considère deux suites de variables aléatoires réelles $(\Delta_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(C_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbf{P})$, vérifiant les conditions suivantes :

i) les variables aléatoires $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n, \ldots, C_1, C_2, \ldots, C_n, \ldots$ sont indépendantes,

ii) les variables aléatoires $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n, \ldots$ sont strictement positives et ont toutes la même densité égale sur $]0, +\infty[$ à la densité d'une variable aléatoire exponentielle d'espérance égale à 1,

iii) les variables aléatoires $C_1, C_2, \ldots, C_n, \ldots$ ont toutes la même densité qu'une variable aléatoire exponentielle d'espérance égale à c.

On pose $T_0 = 0$ et, pour tout entier naturel n non nul, on note T_n la variable aléatoire définie par :

$$T_n = \sum_{i=1}^{n} \Delta_i$$

On observera que la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante et que, pour tout entier naturel n, on a l'égalité : $\Delta_{n+1} = T_{n+1} - T_n$.

On notera $\mathrm{E}(X)$ l'espérance d'une variable aléatoire X définie sur $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbf{P})$.

Partie I Étude d'une variable aléatoire

1) Pour tout entier naturel n, déterminer l'espérance et la variance de la variable aléatoire T_n.

2) Soit t un réel positif ou nul.

a) Pour tout entier naturel n strictement supérieur à t, justifier l'inclusion entre événements :

$$[T_n < t] \subset [|T_n - n| \geqslant n - t]$$

b) À l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, en déduire la valeur de $\lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}([T_n < t])$.

c) En déduire que l'événement $\bigcap_{k=1}^{+\infty} [T_k < t]$ est de probabilité nulle.

3) Soit t un réel positif ou nul. Étant donné un élément ω de Ω, on note $N(t)(\omega)$ le plus grand élément de l'ensemble $\{n \in \mathbb{N};\ T_n(\omega) \leqslant t\}$ (*qui contient* 0) si cet ensemble est fini, et $N(t)(\omega) = 0$ sinon.

On observera que, pour tout entier naturel n non nul, $N(t)$ est égal à n si et seulement si : $T_n \leqslant t < T_{n+1}$.
Montrer que l'application $N(t)$ est une variable aléatoire réelle vérifiant : $\mathbf{P}\left(\left[N(t)=0\right]\right) = \mathbf{P}\left(\left[T_1 > t\right]\right)$.

4) a) Pour tout entier naturel n non nul, reconnaître la loi de la variable aléatoire T_n.

b) Soit t un réel strictement positif. Pour tout entier naturel n non nul, justifier l'égalité :

$$1 = \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k\,\mathrm{e}^{-t}}{k!} + \mathrm{e}^{-t}\int_0^t \frac{(t-u)^n}{n!}\,\mathrm{e}^{u}\,\mathrm{d}u$$

En déduire l'égalité : $\mathbf{P}\left(\left[N(t) \leqslant n\right]\right) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{t^k\,\mathrm{e}^{-t}}{k!}$.

c) Pour tout réel t positif ou nul, reconnaître la loi de la variable aléatoire $N(t)$.

Partie II Étude de la probabilité d'être en déficit après le premier ou le second sinistre

Dans cette partie on considère deux réels a et r, r étant strictement positif et, pour tout réel positif t, on note $K_a(t)$ la variable aléatoire définie par l'égalité : $K_a(t) = a + rt - \displaystyle\sum_{i=1}^{N(t)} C_i$ en convenant que la somme $\displaystyle\sum_{i=1}^{N(t)} C_i$ est nulle lorsque $N(t)$ est nul.
En particulier, $K_a(T_0) = K_a(0) = a$ et, pour tout entier naturel n non nul, puisque $N(T_n) = n$,

$$K_a(T_n) = a + rT_n - \sum_{i=1}^{n} C_i$$

Par exemple, $K_a(t)$ pourrait représenter le capital (aléatoire) au temps t d'une compagnie d'assurance disposant d'un capital initial (de montant a éventuellement négatif), percevant des primes (de montant égal à r par unité de temps), et indemnisant des assurés victimes de sinistres de coûts aléatoires (les C_i) survenant à des dates elles-mêmes aléatoires (les T_i).

Dans cette partie, le réel a étant fixé, la variable aléatoire $K_a(t)$ sera notée plus simplement $K(t)$.

1) a) Déterminer une densité de probabilité de la variable aléatoire $-r\Delta_1$.

b) Déterminer une densité de probabilité f, continue sur $\mathbb{R}$, de la variable aléatoire $L_1 = C_1 - r\Delta_1$.

c) En déduire l'expression de la fonction de répartition F de la variable L_1 puis l'égalité :

$$\mathbf{P}\left(\left[K(T_1) < 0\right]\right) = \begin{cases} 1 - \dfrac{r}{c+r}\exp\left(\dfrac{a}{r}\right) & \text{si } a \leqslant 0 \\[2mm] \dfrac{c}{c+r}\exp\left(\dfrac{-a}{c}\right) & \text{si } a > 0 \end{cases}$$

2) On pose $L_2 = C_2 - r\Delta_2$ et on considère la fonction g associant à tout réel x le réel

$$g(x) = \mathbf{P}([L_1 \leqslant x] \cap [L_1 + L_2 \leqslant a])$$

a) Pour tout réel h strictement positif, justifier les inégalités :

$$g(x+h) - g(x) \geqslant \mathbf{P}([x < L_1 \leqslant x+h])\mathbf{P}([L_2 \leqslant a - x - h])$$

et

$$g(x+h) - g(x) \leqslant \mathbf{P}([x < L_1 \leqslant x+h])\mathbf{P}([L_2 < a - x])$$

b) En déduire que la fonction g est dérivable à droite sur $\mathbb{R}$ avec, pour tout réel x, $g'_d(x) = f(x)F(a-x)$.
On admet que g est dérivable sur $\mathbb{R}$ avec, pour tout réel x, $g'(x) = f(x)F(a-x)$.

3) a) Prouver l'égalité

$$\mathbf{P}([L_1 \leqslant a] \cap [L_1 + L_2 \leqslant a]) = \lim_{n \to +\infty} \mathbf{P}([-n < L_1 \leqslant a] \cap [L_1 + L_2 \leqslant a])$$

b) En déduire l' égalité :

$$\mathbf{P}([L_1 \leqslant a] \cap [L_1 + L_2 \leqslant a]) = \int_{-\infty}^{a} f(x)F(a-x)\,\mathrm{d}x$$

c) Établir les égalités :

$$\mathbf{P}([K(T_1) < 0] \cup [K(T_2) < 0]) = 1 - \int_{-\infty}^{a} f(x)F(a-x)\,\mathrm{d}x$$

et

$$\mathbf{P}([K(T_1) < 0] \cup [K(T_2) < 0]) = \mathbf{P}([L_1 > a]) + \int_{-\infty}^{a} f(x)\,\mathbf{P}([L_2 > a-x])\,\mathrm{d}x$$

4) En déduire, dans le cas où a est un réel positif ou nul, l'égalité :

$$\mathbf{P}([K(T_1) < 0] \cup [K(T_2) < 0]) = \frac{c}{c+r}\Big(1 + \frac{a}{c+r} + \frac{rc}{(c+r)^2}\Big)\exp(\frac{-a}{c})$$

Partie III Étude de la probabilité d'être en déficit au cours du temps : deux premiers cas

Dans cette partie, le réel a n'étant plus nécessairement fixé, on utilisera la notation $K_a(t)$.

Pour tout réel a, on note $\Pi(a)$ la probabilité suivante :

$$\Pi(a) = \mathbf{P}\Big(\bigcup_{n=0}^{+\infty}[K_a(T_n) < 0]\Big)$$

Dans le contexte décrit plus haut, $\Pi(a)$ représenterait la probabilité que la compagnie d'assurance (disposant d'un capital initial de montant a) soit en déficit après un sinistre. En particulier $\Pi(a) = 1$ si $a < 0$.

1) Montrer que la fonction Π est décroissante.

2) Pour tout réel a, quelles minorations de $\Pi(a)$ peut-on déduire de la partie II ?

3) On admet que la fonction Π est continue sur $\mathbb{R}_+$ et vérifie, pour tout réel a positif ou nul l'égalité :

$$\Pi(a) = \mathbf{P}([L_1 > a]) + \int_{-\infty}^{a} f(x)\,\Pi(a-x)\,\mathrm{d}x$$

Pourquoi, intuitivement, peut-on conjecturer cette égalité ?

4) Soit a un réel et n un entier naturel.

a) Calculer l'espérance de $K_a(T_n)$ en fonction de n, a, c et r. Trouver sa limite quand n tend vers l'infini, selon les valeurs comparées de c et r.

b) Calculer la variance de $K_a(T_n)$ en fonction de n, r et c.

5) Dans cette question, on suppose que c est strictement plus grand que r et on considère un réel a positif ou nul.

a) Pour tout entier n strictement supérieur à $\dfrac{a}{c-r}$, établir l'inégalité :

$$\mathbf{P}\ ([K_a(T_n) < 0\,]) \geqslant 1 - \frac{n(c^2+r^2)}{(a+nr-nc)^2}$$

b) En déduire l'égalité : $\Pi(a) = 1$.

6) Dans cette question, on suppose que c est égal à r et on considère un réel a positif ou nul.

a) Soit y un nombre réel. En remarquant que, pour tout entier naturel n non nul, on a l'égalité

$$K_a(T_n) = a - \sum_{i=1}^{n}(C_i - r\Delta_i)$$

et, à l'aide du théorème de la limite centrée, exprimer le réel $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbf{P}\ \left([K_a(T_n) \leqslant a + y\sqrt{n}\,]\right)$, en utilisant la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.

b) Pour tout nombre réel y strictement positif fixé, établir, pour tout entier naturel n assez grand, la double inégalité :

$$\mathbf{P}\left([K_a(T_n) \leqslant a - y\sqrt{n}]\right) \leqslant \mathbf{P}\left([K_a(T_n) < 0]\right) \leqslant \mathbf{P}\left([K_a(T_n) \leqslant a + y\sqrt{n}]\right)$$

c) En déduire la limite de la probabilité $\mathbf{P}\left([K_a(T_n) < 0]\right)$ quand n tend l'infini puis l'inégalité : $\Pi(a) \geqslant \dfrac{1}{2}$.

Partie IV Étude de la probabilité d'être en déficit au cours du temps : le dernier cas

Dans cette partie, on suppose que c est strictement plus petit que r.

1) a) En procédant par récurrence, établir, pour tout entier naturel n et tout réel a positif ou nul, l'inégalité :

$$\Pi(a) \geqslant \frac{c}{c+r}\exp\left(\frac{-a}{c}\right)\sum_{k=0}^{n}\frac{a^k}{k!(c+r)^k}$$

b) En déduire, pour tout réel a positif ou nul, la minoration :

$$\Pi(a) \geqslant \frac{c}{c+r}\exp\left(\frac{-ar}{c(c+r)}\right)$$

2) a) Montrer que pour tout réel positif λ vérifiant $\lambda < \dfrac{1}{c}$, la variable $\exp(\lambda L_1)$ possède une espérance qu'on calculera.

b) Soit n un entier naturel non nul. On pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}(C_k - r\Delta_k)$. Pour tout réel positif λ vérifiant $\lambda < \dfrac{1}{c}$, justifier l'égalité :

$$\mathbf{E}\big(\exp(\lambda S_n)\big) = \frac{1}{(1+r\lambda)^n(1-c\lambda)^n}$$

3) a) Pour tout réel positif λ vérifiant $\lambda < \dfrac{1}{c}$, tout réel a positif ou nul et tout entier naturel n non nul, établir l'inégalité :

$$\mathbf{P}\left([S_n > a]\right) \leqslant e^{-\lambda a}\,\mathbf{E}\big(\exp(\lambda S_n)\big)$$

b) En déduire que tout réel λ élément de $\left]0, \dfrac{1}{c} - \dfrac{1}{r}\right[$, la série de terme général $\dfrac{1}{(1+r\lambda)^n(1-c\lambda)^n}$ converge et qu'on a l'inégalité :

$$\mathbf{P}\Big(\bigcup_{n=1}^{+\infty}[S_n > a]\Big) \leqslant e^{-\lambda a}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(1+r\lambda)^n(1-c\lambda)^n}$$

4) En remarquant que, pour tout réel a positif ou nul, $\Pi(a) = \mathbf{P}\Big(\displaystyle\bigcup_{n=1}^{+\infty}[S_n > a]\Big)$, établir les résultats suivants :

i) $\displaystyle\lim_{a\to+\infty}\Pi(a) = 0$,

ii) Pour tout réel λ vérifiant $0 < \lambda < \dfrac{1}{c} - \dfrac{1}{r}$, et tout réel a assez grand, on a l'inégalité : $\Pi(a) \leqslant e^{-\lambda a}$
(on introduira un réel μ vérifiant $\lambda < \mu < \dfrac{1}{c} - \dfrac{1}{r}$).

5) a) Montrer que si une fonction ψ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et de limite nulle en $+\infty$, alors la fonction $|\psi|$ a un maximum sur $\mathbb{R}_+$.

b) Soit Π_1 et Π_2 deux fonctions continues sur $\mathbb{R}_+$, toutes deux de limite nulle en $+\infty$, vérifiant pour tout réel a positif ou nul, les égalités :

$$\Pi_1(a) = \mathbf{P}([L_1 > a]) + \int_{-\infty}^{a} f(x)\,\Pi_1(a-x)\,\mathrm{d}x \qquad \text{et} \qquad \Pi_2(a) = \mathbf{P}([L_1 > a]) + \int_{-\infty}^{a} f(x)\,\Pi_2(a-x)\,\mathrm{d}x$$

Montrer que les fonctions Π_1 et Π_2 coïncident sur $\mathbb{R}_+$.

c) Établir, pour tout réel a positif ou nul, l'égalité suivante :

$$\Pi(a) = \frac{c}{r}\exp\Big(-a\big(\frac{1}{c} - \frac{1}{r}\big)\Big)$$

Partie I : Étude d'une variable aléatoire

Q1. $T_0=0$ donc $E(T_0)=0$ et $V(T_0)=0$

. Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$. $T_n=\sum_{i=1}^{n}\Delta_i$ et $\forall i\in[\![1,n]\!]$, $\Delta_i \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$.

Alors la linéarité de l'espérance donne : $E(T_n)=\sum_{i=1}^{n}E(\Delta_i)=\sum_{i=1}^{n}1=n$.

De plus $\Delta_1,\Delta_2,\dots,\Delta_n$ sont indépendantes donc : $V(T_n)=\sum_{i=1}^{n}V(\Delta_i)=\sum_{i=1}^{n}1=n$.

Finalement : $\underline{\underline{\forall n\in\mathbb{N},\ E(T_n)=n \text{ et } V(T_n)=n.}}$ Remarque.. $T_n\hookrightarrow\gamma(1,n)$

Q2 t est un réel positif ou nul.

a) Soit n un élément de $\mathbb{N}\cap]t,+\infty[$.

$$[T_n<t]=[T_n-n<-(n-t)]\subset[T_n-n<-(n-t)]\cup[T_n-n>n-t]\overset{n-t>0}{=}[|T_n-n|>n-t]$$

" $|a|>\varepsilon \Leftrightarrow a>\varepsilon$ ou $a<-\varepsilon$ "

$[T_n<t]\subset[|T_n-n|>n-t]\subset[|T_n-n|\geqslant n-t]$.

$\underline{\underline{\forall n\in\mathbb{N}\cap]t,+\infty[,\ [T_n<t]\subset[|T_n-n|\geqslant n-t].}}$

b) Soit $n\in\mathbb{N}\cap]t,+\infty[$.

$$0\leqslant P(T_n<t)\underset{a)}{\leqslant}P(|T_n-n|\geqslant n-t)=P(|T_n-E(T_n)|\geqslant n-t)\leqslant\frac{V(T_n)}{(n-t)^2}=\frac{n}{(n-t)^2}$$

Bienaymé-Tchebychev et $n-t>0$

$\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{(n-t)^2}=0$ et le théorème d'encadrement donne alors : $\underline{\underline{\lim_{n\to+\infty}P(T_n<t)=0.}}$

c) Pour tout ℓ dans $\mathbb{N}^*$, $[T_{\ell+1}<t]\subset[T_\ell<t]$ car $T_{\ell+1}=T_\ell+\Delta_{\ell+1}$ et $\Delta_{\ell+1}$ prend des valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$.

Ainsi la suite $([T_\ell<t])_{\ell\geqslant1}$ est décroissante au sens de l'inclusion.

Le théorème de la limite monotone donne alors $P\left(\bigcap_{\ell=1}^{+\infty}[T_\ell<t]\right)=\lim_{n\to+\infty}P(T_n<t)$.

Comme $\lim_{n\to+\infty}P(T_n<t)=0$: $\underline{\underline{P\left(\bigcap_{\ell=1}^{+\infty}[T_\ell<t]\right)=0.}}$ Notons que l'on a également $\underline{\underline{P\left(\bigcap_{\ell=1}^{+\infty}[T_\ell\leqslant t]\right)=0.}}$

(Q3) Soit t un réel positif ou nul. $N(t)$ est une application de Ω dans $\mathbb{N}$ et $\mathbb{N}$ est dénombrable. Ainsi pour montrer que $N(t)$ est une variable aléatoire, il suffit de prouver que $\forall \ell \in \mathbb{N}, \quad N(t)^{-1}(\{\ell\}) \in \mathcal{B}$.

. Soit $\ell \in \mathbb{N}^*$. $\quad N(t)^{-1}(\{\ell\}) = \{\omega \in \Omega \mid N(t)(\omega) = \ell\} = \{\omega \in \Omega \mid T_\ell(\omega) \leq t < T_{\ell+1}(\omega)\}$

$$(N(t))^{-1}(\{\ell\}) = [T_\ell \leq t] \cap [t < T_{\ell+1}] = [T_\ell \leq t] \cap \overline{[T_{\ell+1} \leq t]}$$

$$(N(t))^{-1}(\{\ell\}) = T_\ell^{-1}(]-\infty, t]) \cap \overline{T_{\ell+1}^{-1}(]-\infty, t])}.$$

T_ℓ et $T_{\ell+1}$ sont des variables aléatoires donc $T_\ell^{-1}(]-\infty,t])$ et $T_{\ell+1}^{-1}(]-\infty,t])$ sont dans $\mathcal{B}$. $\overline{T_{\ell+1}^{-1}(]-\infty,t])}$ est encore dans $\mathcal{B}$ ($\mathcal{B}$ est stable par passage au complémentaire).

Ainsi $(N(t))^{-1}(\{\ell\})$ est un élément de $\mathcal{B}$ comme intersection de deux éléments de $\mathcal{B}$.

. $\underline{\ell = 0}$: Soit $\omega \in \Omega$.

$N(t)(\omega) = 0 \iff T_0(\omega) \leq t < T_1(\omega)$ ou $\{n \in \mathbb{N} \mid T_n(\omega) \leq t\}$ est infini

$N(t)(\omega) = 0 \iff t < T_1(\omega)$ ou $\forall n \in \mathbb{N}, \ T_n(\omega) \leq t$ $\quad \Big\}$ OK !

$\uparrow$ $T_0(\omega) = 0$ // $t \geq 0$ // $\forall i \in \mathbb{N}, \ T_{i+1}(\omega) \leq t \Rightarrow T_i(\omega) \leq t$

$$N(t)(\omega) = 0 \iff \omega \in [t < T_1] \cup \left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} [T_n \leq t]\right)$$

$$N(t)(\omega) = 0 \iff \omega \in [t < T_1] \cup \left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} [T_n \leq t]\right) \qquad ([T_0 \leq t] = \Omega \,!)$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $[T_n \leq t] \in \mathcal{B}$ donc $\bigcap_{n=1}^{+\infty} [T_n \leq t] \in \mathcal{B}$ car $\mathcal{B}$ est stable par intersection dénombrable.

$[t < T_1] = \overline{[T_1 \leq t]}$ et $[T_1 \leq t] \in \mathcal{B}$ donc $[t < T_1] \in \mathcal{B}$.

Ainsi $(N(t))^{-1}(\{0\}) = [t < T_1] \cup \left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} [T_n \leq t]\right) \in \mathcal{B}$ comme réunion de deux éléments de $\mathcal{B}$.

Finalement : $N(t)(\Omega) \subset \mathbb{N}$ et $\forall \ell \in \mathbb{N}, \ (N(t))^{-1}(\{\ell\}) \in \mathcal{B}$.

Alors $\underline{N(t) \text{ est une variable aléatoire discrète sur } (\Omega, \mathcal{B}, P).}$

$P(N(t)=0) = P\left([t<T_1] \cup \left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} [T_n \leq t] \right) \right)$. Cette union étant disjointe

il vient $P(N(t)=0) = P(t<T_1) + P\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} [T_n \leq t] \right) \underset{2) c)}{=} P(t<T_1) = P(T_1>t)$.

$\underline{P(N(t)=0) = P(T_1>t)}$.

(Q4) a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. T_n est la somme de n variables aléatoires indépendantes qui suivent une loi exponentielle de paramètre 1.

D'après le cours, $\underline{T_n \text{ suit une loi gamma de paramètres } 1 \text{ et } n.}$

b) Posons $\forall x \in \mathbb{R}, \varphi(x) = e^x$. φ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et $\forall k \in \mathbb{N}$, $\varphi^{(k)} = \varphi$. Soit $n \in \mathbb{N}$.

La formule de Taylor avec reste intégral appliquée à φ à l'ordre n permet d'écrire que :

$\forall x \in \mathbb{R}, \ \varphi(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-0)^k}{k!} \varphi^{(k)}(0) + \int_0^x \frac{(x-u)^n}{n!} \varphi^{(n+1)}(u) \, du$

$\forall x \in \mathbb{R}, \ e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \int_0^x \frac{(x-u)^n}{n!} e^u \, du$.

Alors $\forall t \in \mathbb{R}$, $e^t = \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!} + \int_0^t \frac{(t-u)^n}{n!} e^u \, du$.

Ainsi $\forall t \in \mathbb{R}$, $1 = \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k e^{-t}}{k!} + e^{-t} \int_0^t \frac{(t-u)^n}{n!} e^u \, du$.

$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}}, \boxed{\forall t \in \mathbb{R}}, \ 1 = \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k e^{-t}}{k!} + e^{-t} \int_0^t \frac{(t-u)^n}{n!} e^u \, du$ ... ce qui répond très largement à la question !

Soit $\boxed{n \in \mathbb{N}}$ et soit $t \in \mathbb{R}_+$. Soit $\omega \in \Omega$.

$N(t)(\omega) \leq n \Leftrightarrow \{k \in \mathbb{N} \mid T_k(\omega) \leq t\}$ est infini ou $T_{n+1}(\omega) > t$

$N(t)(\omega) \leq n \Leftrightarrow \omega \in \bigcap_{k=0}^{+\infty} [T_k \leq t] = \bigcap_{k=1}^{+\infty} [T_k \leq t]$ ou $\omega \in [T_{n+1} > t]$.

$[N(t) \leq n] = \left(\bigcap_{k=1}^{+\infty} [T_k \leq t] \right) \cup [T_{n+1} > t]$. L'union étant disjointe :

$P(N(t) \leq n) = P\left(\bigcap_{k=1}^{+\infty} [T_k \leq t] \right) + P(T_{n+1} > t) = 0 + 1 - P(T_{n+1} \leq t)$.

$T_{n+1} \hookrightarrow \Gamma(1, n+1)$. Ainsi $P(T_{n+1} \leq t) = \int_0^t \frac{e^{-x} x^{(n+1)-1}}{1^{n+1}\,\Gamma(n+1)} dx$.

$$P(T_{n+1} \leq t) = \int_0^t \frac{e^{-x} x^n}{n!} dx \underset{u = t-x}{\overset{\uparrow}{=}} \int_t^0 \frac{e^{-(t-u)} (t-u)^n}{n!} (-du) = \int_0^t \frac{e^{-t} e^{u} (t-u)^n}{n!} du.$$

$$P(T_{n+1} \leq t) = e^{-t} \int_0^t \frac{(t-u)^n}{n!} e^u du.$$

Dans ce qui précède nous avons vu que :

$$1 = \sum_{\ell=0}^{n} \frac{t^\ell e^{-t}}{\ell!} + e^{-t} \int_0^t \frac{(t-u)^n}{n!} e^u du, \quad P(T_{n+1} \leq t) = 1 - \sum_{\ell=0}^{n} \frac{t^\ell e^{-t}}{\ell!}.$$

Ainsi $P(N(t) \leq n) = 1 - P(T_{n+1} \leq t) = \sum_{\ell=0}^{n} \frac{t^\ell e^{-t}}{\ell!}$.

$\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in \mathbb{R}_+, \; P(N(t) \leq n) = \sum_{\ell=0}^{n} \frac{t^\ell e^{-t}}{\ell!}$.

c) Soit $t \in \mathbb{R}^+$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \; P(N(t) = n) = P(N(t) \leq n) - P(N(t) \leq n-1) = \sum_{\ell=0}^{n} \frac{t^\ell e^{-t}}{\ell!} - \sum_{\ell=0}^{n-1} \frac{t^\ell e^{-t}}{\ell!} = \frac{t^n}{n!} e^{-t}$.

$P(N(t) = 0) = P(N(t) \leq 0) = \sum_{\ell=0}^{0} \frac{t^\ell e^{-t}}{\ell!} = e^{-t}$.

Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}, \; P(N(t) = n) = \frac{t^n}{n!} e^{-t}$.

Pour tout réel t strictement positif, $N(t)$ suit une loi de Poisson de paramètre t.

$N(0)$ est la variable quasi certaine nulle.

Partie II Étude de la probabilité d'être en déficit après le premier ou le second sinistre

(Q1) a) Posons $U = -r\Delta_1$. Notons F_{Δ_1} et F_U les fonctions de répartition de Δ_1 et U.

$\forall x \in \mathbb{R},\ F_{\Delta_1}(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \in]-\infty, 0[\\ 1 - e^{-x} \text{ si } x \in [0, +\infty[\end{cases}$.

$\forall x \in \mathbb{R},\ F_U(x) = P(U \leq x) = P(-r\Delta_1 \leq x) = P(\Delta_1 \geq -\frac{x}{r}) = 1 - P(\Delta_1 < -\frac{x}{r}) = 1 - P(\Delta_1 \leq -\frac{x}{r})$.

$\forall x \in \mathbb{R},\ F_U(x) = 1 - F_{\Delta_1}(-\frac{x}{r}) = \begin{cases} 1 - 0 \text{ si } -\frac{x}{r} < 0 \\ 1 - (1 - e^{-(-\frac{x}{r})}) \text{ si } -\frac{x}{r} \geq 0 \end{cases}$.

$\forall x \in \mathbb{R},\ F_U(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \in]0, +\infty[\\ e^{x/r} \text{ si } x \in]-\infty, 0] \end{cases}$.

Notons également que : $\forall x \in]-\infty, 0],\ F_U(x) = e^{x/r}$ et $\forall x \in [0, +\infty[,\ F_U(x) = 1$.

Ainsi F_U est de classe C^1 sur $]-\infty, 0]$ et sur $[0, +\infty[$.

Alors F_U est continue sur $\mathbb{R}$ et au moins de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$; U est alors une variable aléatoire à densité.

$\forall x \in]-\infty, 0[,\ F'_U(x) = \frac{1}{r} e^{x/r}$ et $\forall x \in]0, +\infty[,\ F'_U(x) = 0$.

Posons alors $\forall x \in]-\infty, 0],\ f_U(x) = \frac{1}{r} e^{x/r}$ et $\forall x \in]0, +\infty[,\ f_U(x) = 0$. f_U est une densité de $U = -r\Delta_1$.

b) C_1 et Δ_1 étant indépendantes, C_1 et $U = -r\Delta_1$ le sont également.

Posons $\forall x \in \mathbb{R},\ f_{C_1}(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \in]-\infty, 0[\\ \frac{1}{c} e^{-\frac{x}{c}} \text{ si } x \in [0, +\infty[\end{cases}$. f_{C_1} est une densité de C_1 car $C_1 \hookrightarrow \mathcal{E}(\frac{1}{c})$.

C_1 et U sont deux variables aléatoires à densité et indépendantes donc

$f : x \mapsto \int_{-\infty}^{x} f_{C_1}(t) f_U(x-t)\,dt$ est une densité de $C_1 + U = C_1 - r\Delta_1$.

Déterminons f.

Soit $x\in\mathbb{R}$. $f(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_{C_1}(t) f_U(x-t)\,dt=\int_0^{+\infty}\frac{1}{c}e^{-t/c} f_U(x-t)\,dt \underset{u=x-t}{=} \int_x^{-\infty}\frac{1}{c}e^{-\frac{x-u}{c}} f_U(u)(-du)$.

$$f(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{c}e^{-\frac{x-u}{c}} f_U(u)\,du=\int_{-\infty}^{\min(x,0)}\frac{1}{c}e^{-\frac{x-u}{c}}\frac{1}{r}e^{\frac{u}{r}}\,du=\frac{1}{cr}e^{-\frac{x}{c}}\int_{-\infty}^{\min(0,x)}e^{(\frac{1}{c}+\frac{1}{r})u}.$$

$$f(x)=\frac{1}{cr}e^{-\frac{x}{c}}\lim_{A\to-\infty}\left[\frac{e^{(\frac{1}{c}+\frac{1}{r})u}}{\frac{1}{c}+\frac{1}{r}}\right]_A^{\min(0,x)}=\frac{1}{c+r}e^{-\frac{x}{c}+(\frac{1}{c}+\frac{1}{r})\min(0,x)}.$$

si $x\in[0,+\infty[$, $f(x)=\frac{1}{c+r}e^{-\frac{x}{c}}$ et si $x\in]-\infty,0[$, $f(x)=\frac{1}{c+r}e^{-\frac{x}{c}+(\frac{1}{c}+\frac{1}{r})x}=\frac{1}{c+r}e^{\frac{x}{r}}$

$$\forall x\in\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}\frac{1}{c+r}e^{\frac{x}{r}} & \text{si } x\in]-\infty,0[\text{ ou }]-\infty,0]\\ \frac{1}{c+r}e^{-\frac{x}{c}} & \text{si } x\in[0,+\infty[\end{cases}$$

f est une densité de $L_1=C_1-r\Delta_1$.

On remarque que f est continue sur $]-\infty,0]$ et sur $[0,+\infty[$ donc f est continue sur $\mathbb{R}$.

f est une densité continue de $L_1=C_1-r\Delta_1$.

c) $\forall x\in\mathbb{R}$, $F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)\,dt$.

$$\forall x\in]-\infty,0],\ F(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{c+r}e^{\frac{t}{r}}dt=\lim_{A\to-\infty}\frac{1}{c+r}\left[\frac{e^{t/r}}{1/r}\right]_A^x=\frac{r}{c+r}e^{x/r}.$$

$$\forall x\in[0,+\infty[,\ F(x)=F(0)+\int_0^x\frac{1}{c+r}e^{-\frac{t}{c}}dt=\frac{r}{c+r}+\frac{1}{c+r}\left[-\frac{e^{-t/c}}{1/c}\right]_0^x$$

$$\forall x\in[0,+\infty[,\ F(x)=\frac{r}{c+r}+\frac{c}{c+r}\left(1-e^{-x/c}\right)=1-\frac{c}{c+r}e^{-x/c}$$

$$\forall x\in\mathbb{R},\ F(x)=\begin{cases}\frac{r}{c+r}e^{x/r} & \text{si } x\in]-\infty,0]\\ 1-\frac{c}{c+r}e^{-x/c} & \text{si } x\in[0,+\infty[\end{cases}$$

$P([K(T_1)<0]) = P(a+rT_1-C_1<0) = P(a<C_1-rT_1) = P(a<L_1) = 1-P(L_1\leq a)$.

$P([K(T_1)<0]) = 1-F(a)$.

Ainsi $P(K(T_1)<0) = \begin{cases} 1-\dfrac{r}{c+r}e^{a/r} & \text{si } a\leq 0 \\ \dfrac{c}{c+r}e^{-a/c} & \text{si } a>0 \end{cases}$.

(Q2) a) Soit $x\in\mathbb{R}$ et soit $h\in\mathbb{R}_+^*$.

$[L_1\leq x+h] = [L_1\leq x]\cup[x<L_1\leq x+h]$. Ainsi :

$[L_1\leq x+h]\cap[L_1+L_2\leq a] = ([L_1\leq x]\cap[L_1+L_2\leq a])\cup([x<L_1\leq x+h]\cap[L_1+L_2\leq a])$

L'union étant disjointe il vient :

$P([L_1\leq x+h]\cap[L_1+L_2\leq a]) = P([L_1\leq x]\cap[L_1+L_2\leq a]) + P([x<L_1\leq x+h]\cap[L_1+L_2\leq a])$.

Alors $g(x+h) = g(x) + P([x<L_1\leq x+h]\cap[L_1+L_2\leq a])$.

$g(x+h)-g(x) = P([x<L_1\leq x+h]\cap[L_1+L_2\leq a])$.

Posons $S = [x<L_1\leq x+h]\cap[L_1+L_2\leq a]$.

Soit $\omega\in S$. $x<L_1(\omega)\leq x+h$ et $L_2(\omega)\leq a-L_1(\omega)<a-x$; $\omega\in[x<L_1\leq x+h]\cap[L_2<a-x]$

Ainsi $S\subset[x<L_1\leq x+h]\cap[L_2<a-x]$.

Alors $P(S)\leq P([x<L_1\leq x+h]\cap[L_2<a-x])$.

$L_1 = C_1-r\Delta_1$ et $L_2 = C_2-r\Delta_2$. Comme $C_1,\Delta_1,C_2,\Delta_2$ sont indépendantes, L_1 et L_2 le sont également. Ainsi $P(S)\leq P([x<L_1\leq x+h]\cap[L_2<a-x]) = P(x<L_1\leq x+h)P(L_2<a-x)$.

Donc $g(x+h)-g(x)\leq P(x<L_1\leq x+h)P(L_2<a-x)$.

Soit $\omega\in[x<L_1\leq x+h]\cap[L_2\leq a-x-h]$.

$x<L_1(\omega)\leq x+h$ et $(L_1+L_2)(\omega) = L_1(\omega)+L_2(\omega)\leq x+h+a-x-h\leq a$.

Donc $\omega\in[x<L_1\leq x+h]\cap[L_1+L_2\leq a] = S$,

Par conséquent $[x<L_1\leq x+h]\cap[L_2\leq a-x-h]\subset S$.

Par conséquent : $g(x+h)-g(x)=P(S)\geq P([x<L_1\leq x+h]\cap[L_2\leq a-x-h])$.

L'indépendance de L_1 et L_2 donne alors : $\underline{g(x+h)-g(x)\geq P(x<L_1\leq x+h)\,P(L_2\leq a-x-h)}$.

b) Soit $x\in\mathbb{R}$ et soit $h\in\mathbb{R}_+^*$. Notons F_2 la fonction de répartition de L_2.

$P(x<L_1\leq x+h)\,P(L_2\leq a-x-h)\leq g(x+h)-g(x)\leq P(x<L_1\leq x+h)\,P(L_2\leq a-x)$

$(F(x+h)-F(x))\,F_2(a-x-h)\leq g(x+h)-g(x)\leq(F(x+h)-F(x))\,F_2(a-x)$.

Comme h est strictement positif : $\dfrac{F(x+h)-F(x)}{h}\times F_2(a-x-h)\leq\dfrac{g(x+h)-g(x)}{h}\leq\dfrac{F(x+h)-F(x)}{h}F_2(a-x)$

f est une densité de L_1 continue sur $\mathbb{R}$. Ainsi la fonction de répartition F de L_1 est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et $F'=f$.

Alors $\displaystyle\lim_{h\to0^+}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=f(x)$.

F_2 est la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité ($L_2=C_2+\Delta_2$ et C_2 et Δ_2 sont deux variables aléatoires à densité indépendantes) donc F_2 est continue sur $\mathbb{R}$.

Alors $\displaystyle\lim_{h\to0^+}\left(\frac{F(x+h)-F(x)}{h}\,F_2(a-x-h)\right)=\lim_{h\to0^+}\left(\frac{F(x+h)-F(x)}{h}\times F_2(a-x)\right)=f(x)F_2(a-x)$

Par encadrement il vient : $\displaystyle\lim_{h\to0^+}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}=f(x)F_2(a-x)$; g est dérivable à droite en x et $g'_d(x)=f(x)\,F_2(a-x)$.

Remarquons alors que C_1 et C_2 ont même loi et que Δ_1 et Δ_2 ont même loi, alors $L_1=C_1-r\Delta_1$ et $L_2=C_2-r\Delta_2$ ont même loi ; ainsi $F_2=F$!

Pour tout réel x, g est dérivable à droite en x et $g'_d(x)=f(x)F(a-x)$.

<u>Exercice</u> – Montrer que, pour tout réel x, g est dérivable à gauche en x et $g'_g(x)=f(x)F(a-x)$.

Q3) a) Pour pour tout $n \in \mathbb{N}$, $H_n = [-n < L_1 \leq a] \cap [L_1 + L_2 \leq a]$ ($H_n = \emptyset$ si $-n \geq a$ ...).

$\forall n \in \mathbb{N}$, $[-n < L_1 \leq a] \cap [L_1 + L_2 \leq a] \subset [-(n+1) < L_1 \leq a] \cap [L_1 + L_2 \leq a]$.

$\forall n \in \mathbb{N}$, $H_n \subset H_{n+1}$.

Le théorème de la limite monotone donne alors : $P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} H_n\right) = \lim_{n \to +\infty} P(H_n)$

$$\bigcup_{n=0}^{+\infty} H_n = \bigcup_{n=0}^{+\infty}\left([-n < L_1 \leq a] \cap [L_1 + L_2 \leq a]\right) = \left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} [-n < L_1 \leq a]\right) \cap [L_1 + L_2 \leq a]$$

$$= [L_1 \leq a] \cap [L_1 + L_2 \leq a].$$

Alors $P([L_1 \leq a] \cap [L_1 + L_2 \leq a]) = P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} H_n\right) = \lim_{n \to +\infty} P(H_n)$.

Finalement $\underline{P([L_1 \leq a] \cap [L_1 + L_2 \leq a]) = \lim_{n \to +\infty} P([-n < L_1 \leq a] \cap [L_1 + L_2 \leq a])}$.

b) $x \mapsto f(x) F(a-x)$ est continue sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $0 \leq f(x) F(a-x) \leq f(x)$.

La convergence de $\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx$ et les règles de comparaison des intégrales généralisées de fonctions positives montrent que $\int_{-\infty}^{a} f(x) F(a-x)\,dx$ existe.

De plus : $\int_{-\infty}^{a} f(x) F(a-x)\,dx = \lim_{n \to +\infty} \int_{-n}^{a} f(x) F(a-x)\,dx = \lim_{n \to +\infty} \int_{-n}^{a} g'(x)\,dx$

$$\int_{-\infty}^{a} f(x) F(a-x)\,dx = \lim_{n \to +\infty} (g(a) - g(-n)) = \lim_{n \to +\infty} \left(P([L_1 \leq a] \cap [L_1 + L_2 \leq a]) - P([L_1 \leq -n] \cap [L_1 + L_2 \leq a])\right)$$

$$\int_{-\infty}^{a} f(x) F(a-x)\,dx = \lim_{n \to +\infty} P([-n < L_1 \leq a] \cap [L_1 + L_2 \leq a]) = P(L_1 \leq a \cap [L_1 + L_2 \leq a]).$$

Donc $\underline{\int_{-\infty}^{a} f(x) F(a-x)\,dx \text{ existe et vaut } P(L_1 \leq a \cap [L_1 + L_2 \leq a])}$

c) $[K(T_1)<0]\cup[K(T_2)<0] = [a+rT_1-C_1<0]\cup[a+rT_2-C_1-C_2<0]$

$[K(T_1)<0]\cup[K(T_2)<0] = [a+r\Delta_1-C_1<0]\cup[a+r\Delta_1+r\Delta_2-C_1-C_2<0]$

$[K(T_1)<0]\cup[K(T_2)<0] = [a-L_1<0]\cup[a-(L_1+L_2)<0]$

$\overline{[K(T_1)<0]\cup[K(T_2)<0]} = [a-L_1\geq 0]\cap[a-(L_1+L_2)\geq 0] = [L_1\leq a]\cap[L_1+L_2\leq a]$

Alors $P([K(T_1)<0]\cup[K(T_2)<0]) = 1-P(\overline{[K(T_1)<0]\cup[K(T_2)<0]}) = 1-P([L_1\leq a]\cap[L_1+L_2\leq a])$

$$P([K(T_1)<0]\cup[K(T_2)<0]) = 1-\int_{-\infty}^{a} f(x)F(a-x)\,dx .$$

$$1-\int_{-\infty}^{a} f(x)F(a-x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx - \int_{-\infty}^{a} f(x)F(a-x)\,dx = \int_{a}^{+\infty} f(x)\,dx + \int_{-\infty}^{a} f(x)(1-F(a-x))\,dx .$$

Rappelons que f est une densité de L_1 et que F est la fonction de répartition de L_2.

Alors $1-\int_{-\infty}^{a} f(x)F(a-x)\,dx = P(L_1>a)+\int_{-\infty}^{a} f(x)P(L_2>a-x)\,dx .$

$$P([K(T_1)<0]\cup[K(T_2)<0]) = P(L_1>a)+\int_{-\infty}^{a} f(x)P(L_2>a-x)\,dx .$$

(Q4) Soit $a\in\mathbb{R}_+$.

$P(L_1>a) = 1-F(a) = 1-\left(1-\frac{c}{c+r}e^{-a/c}\right) = \frac{c}{c+r}e^{-a/c}.$

$\forall x\in\,]-\infty,a]$, $P(L_2>a-x) = 1-F(a-x) \underset{\substack{\uparrow \\ a-x\geq 0}}{=} 1-\left(1-\frac{c}{c+r}e^{-(a-x)/c}\right) = \frac{c}{c+r}e^{-\frac{a-x}{c}}.$

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)P(L_2>a-x)\,dx = \int_{-\infty}^{0}\frac{1}{c+r}e^{\frac{x}{r}}\frac{c}{c+r}e^{-\frac{a-x}{c}}\,dx + \int_{0}^{a}\frac{1}{c+r}\frac{c\,e^{-\frac{x}{c}}}{c+r}e^{-\frac{a-x}{c}}\,dx .$$

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)P(L_2>a-x)\,dx = \frac{c\,e^{-\frac{a}{c}}}{(c+r)^2}\left[\lim_{A\to-\infty}\left[\frac{e^{x(\frac{1}{r}+\frac{1}{c})}}{\frac{1}{r}+\frac{1}{c}}\right]_{A}^{0} + \int_{0}^{a}dx\right]$$

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)P(L_2>a-x)\,dx = \frac{c\,e^{-a/c}}{(c+r)^2}\left(\frac{rc}{r+c}+a\right).$$

Donc $P([K(T_1)<0] \cup [K(T_2)<0]) = \frac{c}{c+r} e^{-a/c} + \frac{c e^{-a/c}}{c+r}\left(\frac{rc}{(c+r)^2} + \frac{a}{c+r}\right)$.

$$P([K(T_1)<0] \cup [K(T_2)<0]) = \frac{c}{c+r}\left(1 + \frac{a}{c+r} + \frac{rc}{(c+r)^2}\right) e^{-a/c}.$$

Partie III Etude de la probabilité d'être en déficit au cours du temps : deux premiers cas

(Q1) Soient a et a' deux réels tels que : $a \leq a'$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall \omega \in \Omega, (K_a(T_n))(\omega) = a + rT_n(\omega) - \sum_{i=1}^{n} C_i(\omega) \leq a' + rT_n(\omega) - \sum_{i=1}^{n} C_i(\omega) = (K_{a'}(T_n))(\omega)$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall \omega \in \Omega, (K_a(T_n))(\omega) \leq (K_{a'}(T_n))(\omega)$.

ceci vaut encore pour $n=0$ car $K_a(T_0) = a$ et $K_{a'}(T_0) = a'$.

Ainsi si $n \in \mathbb{N}$ et si l'événement $[K_{a'}(T_n)<0]$ est réalisé alors l'événement $[K_a(T_n)<0]$ est réalisé. Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $[K_{a'}(T_n)<0] \subset [K_a(T_n)<0]$.

Alors $\bigcup_{n=0}^{+\infty} [K_{a'}(T_n)<0] \subset \bigcup_{n=0}^{+\infty} [K_a(T_n)<0]$.

Par conséquent $\pi(a') = P(\bigcup_{n=0}^{+\infty} [K_{a'}(T_n)<0]) \leq P(\bigcup_{n=0}^{+\infty} [K_a(T_n)<0]) = \pi(a)$.

$\forall (a,a') \in \mathbb{R}^2$, $a \leq a' \Rightarrow \pi(a') \leq \pi(a)$. π est décroissante.

(Q2) Soit a un réel. $\bigcup_{n=0}^{+\infty} [K_a(T_n)<0] \supset [K_a(T_1)<0] \cup [K_a(T_2)<0]$.

Ainsi $\pi(a) = P(\bigcup_{n=0}^{+\infty} [K_a(T_n)<0]) \geq P([K_a(T_1)<0] \cup [K_a(T_2)<0])$

Si $a \in]-\infty, 0[$, $\pi(a) = 1$

Si $a \in [0, +\infty[$, $\pi(a) \geq \frac{c}{c+r}\left(1 + \frac{a}{c+r} + \frac{rc}{(c+r)^2}\right) e^{-\frac{a}{c}}$ d'après II Q4.

De toute évidence $\forall a \in \mathbb{R}$, $\bigcup_{n=0}^{+\infty} [K_a(T_n)<0] \supset [K_a(T_1)<0]$.

$\forall a \in \mathbb{R}$, $\pi(a) = P(\bigcup_{n=0}^{+\infty} [K_a(T_n)<0]) \geq P(K_a(T_1)<0)$.

Si $a \in [0, +\infty[$, $\pi(a) \geq \frac{c}{c+r} e^{-\frac{a}{c}}$.

Q3

$\{\bigcup_{n=0}^{+\infty} K_a(T_n)<0\}$ se réalise si $\{L_1>a\}$ se réalise ou $\{L_1\leq a\}$ se réalise et on est en déficit strictement après le premier sinistre, notons H ce dernier événement. $\pi(a)=P(L_1>a)+P(L_1\leq a\cap H)$.

Si L_1 prend une valeur entre x et $x+dx$ ($x<a$ et dx très petit), ce qui se produit avec la probabilité $f(x)dx$, alors la probabilité pour que l'on soit en déficit est $\pi(a-x)$. Ainsi $P(\{L_1\leq a\}\cap H)$ est "la somme" des $\pi(a-x)f(x)dx$ lorsque x décrit $]-\infty,a[$. Ce qui s'écrit raisonnablement : $P(\{L_1\leq a\}\cap H)=\int_{-\infty}^{a}\pi(a-x)f(x)dx$.

Ainsi $\pi(a)=P(L_1>a)+\int_{-\infty}^{a}\pi(a-x)f(x)dx$.

Q4 $a\in\mathbb{R}$ et $n\in\mathbb{N}$.

a) Si $n=0$, $E(K_a(T_0))=a$ car $K_a(T_0)=a$

Si $n\geq 1$: $E(K_a(T_n))=E(a+rT_n-\sum_{i=1}^{n}C_i)=a+rE(T_n)-\sum_{i=1}^{n}E(C_i)=a+rn-nc$

Finalement $\underline{\underline{\forall a\in\mathbb{R},\ \forall n\in\mathbb{N},\ E(K_a(T_n))=a+n(r-c).}}$

$$\lim_{n\to+\infty}E(K_a(T_n))=\begin{cases}a & \text{si } r=c\\ +\infty & \text{si } r>c\\ -\infty & \text{si } r<c\end{cases}$$

b) $V(K_a(T_0))=0$ car $K_a(T_0)=a$.

Supposons n dans $\mathbb{N}^*$.

T_n possède une variance qui vaut n donc rT_n possède une variance qui vaut r^2n. $a+rT_n$ possède une variance valant nr^2.

$C_1, C_2, \dots, C_n$ sont indépendantes et admettent une variance égale à c^2, par conséquent $\sum_{i=1}^{n}C_i$ possède une variance qui vaut $\sum_{i=1}^{n}V(C_i)$ c'est-à-dire nc^2

$-\sum_{i=1}^{n}C_i$ possède également une variance qui vaut nc^2.

$a+rT_n=a+r\sum_{i=1}^{n}\Delta_i$ et $\Delta_1,\Delta_2,\dots,\Delta_n,C_1,C_2,\dots,C_n$ sont indépendantes.

Par conséquent $a+rT_n$ et $-\sum_{i=1}^{n}C_i$ sont indépendantes et possèdent une variance.

Alors $K_a(T_n) = a + r\,T_n - \sum_{i=1}^{n} C_i$ possède une variance qui vaut :

$V(a + rT_n) + V(-\sum_{i=1}^{n} C_i) = n(r^2+c^2)$.

Pour tout a dans IR pour tout n dans IN, $V(K_a(T_n))$ existe et vaut $n(r^2+c^2)$.

(Q5) a) Ici $a \geqslant 0$ et $c > r$

a) Soit n un élément de IN tel que : $n > \frac{a}{c-r}$.

$P(K_a(T_n)<0) = P\big(K_a(T_n) - E(K_a(T_n)) < -(E(K_a(T_n)))\big)$.

$P(K_a(T_n)<0) = 1 - P\big(K_a(T_n) - E(K_a(T_n)) \geqslant -E(K_a(T_n))\big)$.

$-E(K_a(T_n)) = -a - n(r-c) = (c-r)\left[n - \frac{a}{c-r}\right] > 0$.

Alors $[K_a(T_n) - E(K_a(T_n)) \geqslant -E(K_a(T_n))] \subset [|K_a(T_n) - E(K_a(T_n))| \geqslant -E(K_a(T_n))]$.

Ainsi $P(K_a(T_n) - E(K_a(T_n)) \geqslant -E(K_a(T_n))) \leqslant P(|K_a(T_n) - E(K_a(T_n))| \geqslant -E(K_a(T_n)))$

L'inégalité de Bienaymé Tchebychev donne alors :

$$P(K_a(T_n) - E(K_a(T_n)) \geqslant -E(K_a(T_n))) \leqslant \frac{V(K_a(T_n))}{(-E(K_a(T_n)))^2} = \frac{n(r^2+c^2)}{(-a-n(r-c))^2}.$$

Alors $P(K_a(T_n)<0) = 1 - P(K_a(T_n) - E(K_a(T_n)) \geqslant -E(K_a(T_n))) \geqslant 1 - \frac{n(r^2+c^2)}{(a+n(r-c))^2}$.

Si $n \in \mathbb{N} \cap \left]\frac{a}{c-r}, +\infty\right[$: $P(K_a(T_n)<0) \geqslant 1 - \frac{n(c^2+r^2)}{(a+nr-nc)^2}$.

b) Soit $n \in \mathbb{N} \cap \left]\frac{a}{c-r}, +\infty\right[$. $[K_a(T_n)<0] \subset \bigcup_{\ell=0}^{+\infty} [K_a(T_\ell)<0]$.

$$1 \geqslant \Pi(a) = P\left(\bigcup_{\ell=0}^{+\infty} [K_a(T_\ell)<0]\right) \geqslant P(K_a(T_n)<0) \geqslant 1 - \frac{n(c^2+r^2)}{(a+nr-nc)^2}.$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \cap \left]\frac{a}{c-r}, +\infty\right[, \quad 1 \geqslant \Pi(a) \geqslant 1 - \frac{n(c^2+r^2)}{(a+nr-nc)^2}$$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n(c^2+r^2)}{(a+nr-nc)^2} = 0$ car $\dfrac{n(c^2+r^2)}{(a+nr-nc)^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{c^2+r^2}{(r-c)^2} \times \dfrac{1}{n}$.

Il vient alors, en faisant tendre n vers $+\infty$ dans l'encadrement de $\pi(a)$: $1 \geq \pi(a) \geq 1-0$.

Ainsi si $c>r$: $\underline{\pi(a)=1}$ et ceci pour tout réel a non ?

Q6 a) Posons pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, $V_i = r\Delta_i - C_i$.

Soit y un réel.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P(K_a(T_n) \leq a + y\sqrt{n}) = P(a + \sum_{i=1}^{n} V_i \leq a + y\sqrt{n}) = P(V_1+V_2+\dots+V_n \leq y\sqrt{n})$

Cherchons alors $\lim\limits_{n\to+\infty} P(V_1+V_2+\dots+V_n \leq y\sqrt{n})$ en utilisant le théorème de la limite centrée.

→ $\forall i \in \mathbb{N}^*$, $C_i \hookrightarrow \mathcal{E}(\frac{1}{c})$, $\Delta_i \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$ et C_i et Δ_i sont indépendantes. Alors :

- toutes les variables de la suite $(V_i)_{i\geq 1}$ suivent la même loi ;
- $E(V_i)$ existe et vaut $rE(\Delta_i) - E(C_i) = r - c = 0$, pour tout i dans $\mathbb{N}^*$.
- $V(V_i)$ existe et vaut $r^2 1^2 + c^2 = r^2+c^2$, pour tout i dans $\mathbb{N}^*$ ($r\Delta_i$ et $-C_i$ sont indépendantes, $V(r\Delta_i) = r^2V(\Delta_i) = r^2$, $V(-C_i) = V(C_i) = c^2$).

→ $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n, \dots, C_1, C_2, \dots, C_n, \dots$ sont indépendantes donc $(V_i)_{i\geq 1}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes.

Le tout suffit pour dire que : $\left(\dfrac{V_1+\dots+V_n - E(V_1+\dots+V_n)}{\sqrt{V(V_1+V_2+\dots+V_n)}}\right)_{n\geq 1}$ converge en loi vers une variable aléatoire qui suit une loi normale centrée réduite.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $E(V_1+\dots+V_n) = \sum_{i=1}^{n} E(V_i) = 0$ et $V(V_1+\dots+V_n) = \sum_{i=1}^{n} V(V_i) = n(r^2+c^2) \overset{r=c}{=} 2nr^2$

Notons ϕ la fonction de répartition d'une variable aléatoire qui suit une loi normale centrée réduite.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} P\left(\dfrac{V_1+V_2+\dots+V_n - 0}{\sqrt{2nr^2}} \leq x\right) = \phi(x)$; donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} P\left(V_1+\dots+V_n \leq x\sqrt{2nr^2}\right) = \phi(x)$

Ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} P(V_1+V_2+\dots+V_n \leq y\sqrt{n}) = \lim\limits_{n\to+\infty} P\left(V_1+V_2+\dots+V_n \leq \dfrac{y}{\sqrt{2}\,r}\sqrt{2nr^2}\right) = \phi\left(\dfrac{y}{\sqrt{2}\,r}\right)$.

Finalement : $\forall y\in\mathbb{R}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} P(K_a(T_n)\leqslant a+y\sqrt{n}) = \phi\left(\frac{y}{\sqrt{2}r}\right) = \phi\left(\frac{y}{\sqrt{2}c}\right)$.

Soit y un réel strictement positif.

b) $\lim\limits_{n\to+\infty}(a-y\sqrt{n}) = -\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}(a+y\sqrt{n}) \overset{\blacktriangle}{=} +\infty$.

▲ l'égalité inutile car $a\geqslant 0$!

Alors $\exists n_1\in\mathbb{N}^*,\ \forall n\in\mathbb{N}^*,\ n\geqslant n_1 \Rightarrow a-y\sqrt{n}<0$.

$\exists n_2\in\mathbb{N}^*,\ \forall n\in\mathbb{N}^*,\ n\geqslant n_2 \Rightarrow a+y\sqrt{n}>0$. ▲

En posant $n_3=\mathrm{Max}(n_1,n_2)$ on a : $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ n\geqslant n_3 \Rightarrow a-y\sqrt{n}<0<a+y\sqrt{n}$.

Alors $[K_a(T_n)\leqslant a-y\sqrt{n}]\subset[K_a(T_n)<0]\subset[K_a(T_n)\leqslant a+y\sqrt{n}]$ si $n\in\mathbb{N}^*$ et si $n\geqslant n_3$.

Par croissance de P on obtient alors :

$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ n\geqslant n_3 \Rightarrow P(K_a(T_n)\leqslant a-y\sqrt{n})\leqslant P(K_a(T_n)<0)\leqslant P(K_a(T_n)\leqslant a+y\sqrt{n})$.

Remarque.. Important de remarquer que n_3 dépend de y.

c) Soit $y\in\mathbb{R}^*$. $\lim\limits_{n\to+\infty}P(K_a(T_n)\leqslant a-y\sqrt{n}) = \phi\left(-\frac{y}{\sqrt{2}r}\right)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}P(K_a(T_n)\leqslant a+y\sqrt{n}) = \phi\left(\frac{y}{\sqrt{2}r}\right)$

C'est raté pour le théorème d'encadrement !

Observons cependant que $\lim\limits_{y\to0}\phi\left(-\frac{y}{\sqrt{2}r}\right) = \lim\limits_{y\to0}\phi\left(\frac{y}{\sqrt{2}r}\right) = \phi(0) = \frac{1}{2}$!

Il semble raisonnable d'imaginer que $\lim\limits_{n\to+\infty}P(K_a(T_n)<0) = \frac{1}{2}$. Montrons le en utilisant la définition.

Montrons que : $\forall\varepsilon\in\mathbb{R}_+^*,\ \exists n_0\in\mathbb{N}^*,\ \forall n\in\mathbb{N}^*,\ n\geqslant n_0 \Rightarrow \left|P(K_a(T_n)<0)-\frac{1}{2}\right|<\varepsilon$.

Soit $\varepsilon\in\mathbb{R}_+^*$.

$\lim\limits_{x\to0}\phi(x)=\frac{1}{2}$. $\exists\eta\in\mathbb{R}_+^*,\ \forall x\in\mathbb{R},\ |x|<\eta \Rightarrow \left|\phi(x)-\frac{1}{2}\right|<\frac{\varepsilon}{2}$.

Soit y un réel tel que : $\left|\frac{y}{\sqrt{2}r}\right|<\eta$. Alors $\left|\phi\left(\frac{y}{\sqrt{2}r}\right)-\frac{1}{2}\right|<\frac{\varepsilon}{2}$ et $\left|\phi\left(-\frac{y}{\sqrt{2}r}\right)-\frac{1}{2}\right|<\frac{\varepsilon}{2}$

Ainsi $\frac{1}{2}-\frac{\varepsilon}{2}<\phi\left(-\frac{y}{\sqrt{2}r}\right)$ et $\phi\left(\frac{y}{\sqrt{2}r}\right)<\frac{1}{2}+\frac{\varepsilon}{2}$.

D'après b), $\exists n_3 \in \mathbb{N}^*, \forall n \in \mathbb{N}^*, n \geq n_3 \Rightarrow P(K_a(T_n) \leq a - y\sqrt{n}) \leq P(K_a(T_n)<0) \leq P(K_a(T_n) \leq a+y\sqrt{n})$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} P(K_a(T_n) \leq a+y\sqrt{n}) = \phi\left(\frac{y}{\sqrt{2r}}\right)$.

Alors $\exists n_4 \in \mathbb{N}^*, \forall n \in \mathbb{N}^*, n \geq n_4 \Rightarrow \left| P(K_a(T_n) \leq a+y\sqrt{n}) - \phi\left(\frac{y}{\sqrt{2r}}\right)\right| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}^*, n \geq n_4 \Rightarrow P(K_a(T_n) \leq a+y\sqrt{n}) < \phi\left(\frac{y}{\sqrt{2r}}\right) + \frac{\varepsilon}{2} < \frac{1}{2} + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \frac{1}{2} + \varepsilon$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*, n \geq n_4 \Rightarrow P(K_a(T_n) \leq a+y\sqrt{n}) < \frac{1}{2} + \varepsilon$.

De même on montre que : $\exists n_5 \in \mathbb{N}^*, \forall n \in \mathbb{N}^*, n \geq n_5 \Rightarrow \frac{1}{2} - \varepsilon \leq P(K_a(T_n) \leq a - y\sqrt{n})$.

Posons alors $n_0 = \operatorname{Max}(n_3, n_4, n_5)$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*, n \geq n_0 \Rightarrow \frac{1}{2} - \varepsilon \leq P(K_a(T_n) \leq a-y\sqrt{n}) \leq P(K_a(T_n)<0) \leq P(K_a(T_n) \leq a+y\sqrt{n}) < \frac{1}{2}+\varepsilon$.

Alors $\forall n \in \mathbb{N}^*, n \geq n_0 \Rightarrow \left| P(K_a(T_n)<0) - \frac{1}{2}\right| < \varepsilon$.

$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists n_0 \in \mathbb{N}^*, \forall n \in \mathbb{N}^*, n \geq n_0 \Rightarrow \left| P(K_a(T_n)<0) - \frac{1}{2}\right| < \varepsilon$.

Alors $\underline{\underline{\lim\limits_{n\to+\infty} P(K_a(T_n)<0) = \frac{1}{2}}}$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \bigcup\limits_{\ell=0}^{+\infty} [K_a(T_\ell)<0] \supset [K_a(T_n)<0]$.

Par croissance de P : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \pi(a) = P\left(\bigcup\limits_{\ell=0}^{+\infty} [K_a(T_\ell)<0]\right) \geq P(K_a(T_n)<0)$.

En faisant tendre n vers $+\infty$ il vient : $\underline{\underline{\pi(a) \geq \frac{1}{2}}}$.

Partie IV Étude de la probabilité d'être en déficit au cours du temps : le dernier cas.

Q1 a) Nous avons vu que : $\forall a \in \mathbb{R}_+, \pi(a) \geq \frac{c}{c+r} e^{-\frac{a}{c}}\left(1 + \frac{a}{c+r} + \frac{rc}{(c+r)^2}\right)$.

Ainsi $\forall a \in \mathbb{R}_+, \pi(a) \geq \frac{c}{c+r} e^{-\frac{a}{c}}$ et $\pi(a) \geq \frac{c}{c+r} e^{-\frac{a}{c}}\left(1 + \frac{a}{c+r}\right)$ $(r>0, c>0, \ldots)$

Ainsi la propriété vaut déjà pour $n=0$ et $n=1$.

Supposons la propriété vraie pour n élément de $\mathbb{N}$ et montrons la pour $n+1$.

L'hypothèse de récurrence est : $\forall a \in \mathbb{R}^+,\ \pi(a) \geq \frac{c}{c+r} e^{-\frac{a}{c}} \sum_{\ell=0}^{n} \frac{a^\ell}{\ell!\,(c+r)^\ell}$.

Fixons a dans $\mathbb{R}^+$.

Alors $\forall x \in]-\infty, a],\ \pi(a-x) \geq \frac{c}{c+r} e^{-\frac{a-x}{c}} \sum_{\ell=0}^{n} \frac{(a-x)^\ell}{\ell!\,(c+r)^\ell}$.

$\forall x \in]-\infty, a],\ f(x)\,\pi(a-x) \geq \frac{c}{c+r} e^{-\frac{a-x}{c}} f(x) \sum_{\ell=0}^{n} \frac{(a-x)^\ell}{\ell!\,(c+r)^\ell}$ (positivité de f).

Observons que $\pi(a) \overset{\text{III Q3}}{=} P(L_1 > a) + \int_{-\infty}^{a} f(x)\,\pi(a-x)\,dx \geq P(L_1 > a) + \int_0^a f(x)\,\pi(a-x)\,dx$.

$\forall x \in]-\infty, 0],\ f(x)\,\pi(a-x) \geq 0$

$\forall x \in [0,a],\ f(x)\,\pi(a-x) \geq \frac{c}{c+r} e^{-\frac{a-x}{c}} f(x) \sum_{\ell=0}^{n} \frac{(a-x)^\ell}{\ell!\,((c+r)^\ell} = \frac{c}{c+r}\,\frac{e^{-\frac{x}{c}}}{c+r}\, e^{-\frac{a-x}{c}} \sum_{\ell=0}^{n} \frac{(a-x)^\ell}{\ell!\,(c+r)^\ell}$.

II Q3 b)

$\forall x \in [0,a],\ f(x)\,\pi(a-x) \geq \frac{c}{c+r} e^{-\frac{a}{c}} \sum_{\ell=0}^{n} \frac{(a-x)^\ell}{\ell!\,(c+r)^{\ell+1}}$.

Alors $\pi(a) \geq P(L_1 > a) + \int_0^a f(x)\,\pi(a-x)\,dx \geq P(L_1>a) + \frac{c}{c+r} e^{-\frac{a}{c}} \sum_{\ell=0}^{n} \frac{1}{\ell!\,(c+r)^{\ell+1}} \int_0^a (a-x)^\ell\,dx$

$\pi(a) \geq P(L_1 > a) + \frac{c}{c+r} e^{-\frac{a}{c}} \sum_{\ell=0}^{n} \frac{1}{\ell!\,(c+r)^{\ell+1}} \left[-\frac{(a-x)^{\ell+1}}{\ell+1}\right]_0^a$

$\pi(a) \geq \frac{c}{c+r} e^{-\frac{a}{c}} + \frac{c}{c+r} e^{-\frac{a}{c}} \sum_{\ell=0}^{n} \frac{a^{\ell+1}}{(\ell+1)!\,(c+r)^{\ell+1}}$

$\pi(a) \geq \frac{c}{c+r} e^{-\frac{a}{c}} \left(1 + \sum_{\ell=0}^{n} \frac{a^{\ell+1}}{(\ell+1)!\,(c+r)^{\ell+1}}\right) = \frac{c}{c+r} e^{-\frac{a}{c}} \sum_{\ell=0}^{n+1} \frac{a^\ell}{\ell!\,(c+r)^\ell}$

c'est la propriété à l'ordre $n+1$ et la fin de la récurrence.

$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall a \in \mathbb{R}_+,\ \pi(a) \geq \frac{c}{c+r} e^{-\frac{a}{c}} \sum_{\ell=0}^{n} \frac{a^\ell}{\ell!\,(c+r)^\ell}$.

---

b) Soit $a \in \mathbb{R}_+$. $\lim_{n\to+\infty} \sum_{\ell=0}^{n} \frac{a^\ell}{\ell!\,(c+r)^\ell} = e^{\frac{a}{c+r}}$.

En faisant tendre n vers $+\infty$ dans l'inégalité obtenue dans a) il vient :

$$\pi(a) \geq \frac{c}{c+r} e^{-\frac{a}{c}} e^{\frac{a}{c+r}} = \frac{c}{c+r} e^{\frac{a}{c(c+r)}(-c-r+c)} = \frac{c}{c+r} e^{-\frac{ar}{c(c+r)}}.$$

$$\forall a \in \mathbb{R}_+,\ \pi(a) \geq \frac{c}{c+r} e^{-\frac{ar}{c(c+r)}}.$$

Soit λ un réel positif tel que $\lambda < 1/c$.

Q2 a) Rappelons que f est une densité de L_1. Le Théorème de transfert indique que $e^{\lambda L_1}$ possède une espérance dès que $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\lambda t} f(t)\,dt$ converge.

$$\forall t \in]-\infty, 0],\quad e^{\lambda t} f(t) = \frac{1}{c+r} e^{\lambda t} e^{\frac{t}{r}} = \frac{1}{c+r} e^{(\lambda + \frac{1}{r})t}.$$

$$\forall t \in [0, +\infty[,\quad e^{\lambda t} f(t) = \frac{1}{c+r} e^{\lambda t} e^{-t/c} = \frac{1}{c+r} e^{-(\frac{1}{c} - \lambda)t}$$

Il est de notoriété publique que si α est un réel strictement positif, $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}\,dt$ existe et vaut $\frac{1}{\alpha}$ et que $\int_{-\infty}^{0} e^{\alpha t}\,dt$ existe et vaut également $\frac{1}{\alpha}$.

Notons que $\lambda + \frac{1}{r} > 0$ et $\frac{1}{c} - \lambda > 0$ car $\lambda < \frac{1}{c}$, $\lambda \geq 0$, $r > 0$.

Alors $\int_{-\infty}^{0} e^{\lambda t} f(t)\,dt$ existe et vaut $\frac{1}{c+r} \frac{1}{\lambda + \frac{1}{r}}$ et $\int_0^{+\infty} e^{\lambda t} f(t)\,dt$ existe et vaut $\frac{1}{c+r} \times \frac{1}{\frac{1}{c} - \lambda}$.

Alors $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\lambda t} f(t)\,dt$ existe et vaut $\frac{1}{c+r} \frac{r}{\lambda r + 1} + \frac{1}{c+r} \frac{c}{1 - \lambda c} = \frac{1}{c+r} \frac{r - \lambda c r + \lambda c r + c}{(\lambda r + 1)(1 - \lambda c)}$

Ainsi $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\lambda t} f(t)\,dt$ et vaut $\frac{1}{(1 + r\lambda)(1 - c\lambda)}$.

Alors $e^{\lambda L_1}$ possède une espérance qui vaut $\frac{1}{(1 + r\lambda)(1 - c\lambda)}$.

---

b) Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$ et soit λ un réel positif vérifiant $\lambda < \frac{1}{c}$.

Posons pour tout k dans $\mathbb{N}^*$, $L_k = C_k - T\Delta_k$.

$C_1, C_2, \dots, C_n, \Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$ sont indépendantes donc $L_1, L_2, \dots, L_n$ le sont également.

Alors $e^{\lambda L_1}, e^{\lambda L_2}, \dots, e^{\lambda L_n}$ sont des variables aléatoires indépendantes.

Pour tout k dans $\mathbb{N}^*$, $e^{\lambda L_k}$ a même loi que $e^{\lambda L_1}$ qui est une variable aléatoire admettant pour espérance $\frac{1}{(1+r\lambda)(1-c\lambda)}$.

Ainsi pour tout k dans $\mathbb{N}^*$, $e^{\lambda L_k}$ admet $\frac{1}{(1+r\lambda)(1-c\lambda)}$ pour espérance.

$e^{\lambda L_1}, e^{\lambda L_2}, \dots, e^{\lambda L_n}$ étant indépendantes, $e^{\lambda L_1} \times e^{\lambda L_2} \times \dots \times e^{\lambda L_n}$ possède alors

pour espérance : $\frac{1}{(1+r\lambda)(1-c\lambda)} \frac{1}{(1+r\lambda)(1-c\lambda)} \times \dots \times \frac{1}{(1+r\lambda)(1-c\lambda)} = \frac{1}{(1+r\lambda)^n(1-c\lambda)^n}$.

Ainsi $e^{\lambda(L_1+L_2+\dots+L_n)}$ possède pour espérance $\frac{1}{(1+r\lambda)^n(1-c\lambda)^n}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $E(e^{\lambda S_n})$ existe et vaut $\frac{1}{(1+r\lambda)^n(1-c\lambda)^n}$.

Q3) a) Soit λ un réel positif vérifiant $\lambda < \frac{1}{c}$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$.

$L_1, L_2, \dots, L_n$ sont n variables aléatoires à densité indépendantes ; ainsi $S_n = L_1 + L_2 + \dots + L_n$ est une variable aléatoire à densité. Notons f_{S_n} une densité de S_n.

$$P(S_n > a) = \int_a^{+\infty} f_{S_n}(t)\,dt \text{ et } E(e^{\lambda S_n}) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\lambda t} f_{S_n}(t)\,dt.$$

$$e^{-\lambda a} E(e^{\lambda S_n}) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\lambda(t-a)} f_{S_n}(t)\,dt \geqslant \int_a^{+\infty} e^{\lambda(t-a)} f_{S_n}(t)\,dt \geqslant \int_a^{+\infty} f_{S_n}(t)\,dt = P(S_n > a).$$

$\forall t \in]-\infty, a]$, $e^{\lambda(t-a)} f_{S_n}(t) \geqslant 0$. $\quad$ $\forall t \in [a, +\infty[$, $e^{\lambda(t-a)} \geqslant 1$ et $f_{S_n}(t) \geqslant 0$.

Finalement : $\forall \lambda \in]0, \frac{1}{c}[$, $\forall a \in \mathbb{R}_+^*$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P(S_n > a) \leqslant e^{-\lambda a} E(e^{\lambda S_n})$.

b) Soit λ un élément de $]0, \frac{1}{c} - \frac{1}{r}]$ $\qquad \lambda \in]0, \frac{1}{c} - \frac{1}{r}]$

$$(1+r\lambda)(1-c\lambda) = 1 + \lambda(r-c-rc\lambda) = 1 + rc\lambda\left(\frac{1}{c} - \frac{1}{r} - \lambda\right) > 1$$

Alors $0 < \dfrac{1}{(1+r\lambda)(1-c\lambda)} < 1$. Ainsi la série de terme général $\dfrac{1}{(1+r\lambda)^n(1-c\lambda)^n}$ converge.

Soit a un réel positif ou nul.

Posons $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $H_n = \bigcup_{\ell=1}^{n} [S_\ell > a]$. $(H_n)_{n \geq 1}$ étant une suite croissante

d'événements : $P(\bigcup_{n=1}^{+\infty} H_n) = \lim_{n \to +\infty} P(H_n)$. Or $\bigcup_{n=1}^{+\infty} H_n = \bigcup_{n=1}^{+\infty} [S_n > a]$.

Ainsi $P(\bigcup_{n=1}^{+\infty} [S_n > a]) = \lim_{m \to +\infty} P(\bigcup_{\ell=1}^{m} [S_\ell > a])$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P(\bigcup_{k=1}^{n} [S_k < a]) \leq \sum_{\ell=1}^{n} P(S_\ell < a)$ (récurrence simple)

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P(\bigcup_{\ell=1}^{n} [S_\ell < a]) \leq \sum_{\ell=1}^{n} e^{-\lambda a} E(e^{\lambda S_\ell}) = e^{-\lambda a} \sum_{\ell=1}^{n} \dfrac{1}{(1+r\lambda)^\ell (1-c\lambda)^\ell}$.

En faisant tendre n vers $+\infty$ il vient $P(\bigcup_{\ell=1}^{+\infty} [S_\ell < a]) \leq e^{-\lambda a} \sum_{\ell=1}^{+\infty} \dfrac{1}{(1+r\lambda)^\ell (1-c\lambda)^\ell}$.

Si $\lambda \in]0, \frac{1}{c} - \frac{1}{r}[$ et si $a \in \mathbb{R}_+$, $P(\bigcup_{n=1}^{+\infty} [S_n < a]) \leq e^{-\lambda a} \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{(1+r\lambda)^n (1-c\lambda)^n}$.

Q4 Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$

i) $\pi(a) = P(\bigcup_{n=0}^{+\infty} [K_a(T_n) < 0]) = P(\bigcup_{n=1}^{+\infty} [K_a(T_n) < 0])$

$[K_a(T_0) < 0]$ est réalisé si et seulement si $a < 0$ donc pour $a \in \mathbb{R}_+^*$, $[K_a(T_0) < 0] = \emptyset$

$$\pi(a) = P\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} \left[a + r\sum_{i=1}^{n} \Delta_i - \sum_{i=1}^{n} c_i < 0\right]\right) = P\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} \left[a < \sum_{i=1}^{n} (r\Delta_i - c_i)\right]\right) = P\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} [S_n > a]\right).$$

Alors $\forall a \in \mathbb{R}_+^*$, $0 \leq \pi(a) \quad P(\bigcup_{n=1}^{+\infty} [S_n > a])$

Soit $\lambda \in]0, \frac{1}{c} - \frac{1}{r}[$, $0 \leq \pi(a) \leq e^{-\lambda a} \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{(1+r\lambda)^n (1-c\lambda)^n}$ pour tout $a \in \mathbb{R}_+^*$.

$\lim\limits_{a \to +\infty} \left(e^{-\lambda a} \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{(1+r\lambda)^n (1-c\lambda)^n} \right) = 0$. Le théorème d'encadrement donne alors :

$\lim\limits_{a \to +\infty} \Pi(a) = 0$.

ii) Soit λ un élément de $\left]0, \frac{1}{c} - \frac{1}{r}\right[$.

Soit ρ un élément de $\left]\lambda, \frac{1}{c} - \frac{1}{r}\right[$. ρ appartient à $\left]0, \frac{1}{c} - \frac{1}{r}\right[$ donc

$$\Pi(a) = P\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} [S_n > a]\right) \leq e^{-\rho a} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(1+r\rho)^n (1-c\rho)^n} = e^{-\rho a} \frac{1}{(1+r\rho)(1-c\rho)} \frac{1}{1 - \frac{1}{(1+r\rho)(1-c\rho)}}.$$

$$\Pi(a) \leq e^{-\rho a} \frac{1}{r\rho - c\rho - rc\rho^2}.$$

$\lim\limits_{a \to +\infty} \dfrac{e^{-(\rho-\lambda)a}}{r\rho - c\rho - rc\rho^2} = 0$. $\exists a_0 \in \mathbb{R}_+^*$, $\forall a \in [a_0, +\infty[$, $\dfrac{e^{-(\rho-\lambda)a}}{r\rho - c\rho - rc\rho^2} \leq 1$.

Alors $\forall a \in [a_0, +\infty[$, $\dfrac{e^{-\rho a}}{r\rho - c\rho - rc\rho^2} \leq e^{-\lambda a}$. $\forall a \in [a_0, +\infty[$, $\Pi(a) \leq e^{-\lambda a}$.

$\forall \lambda \in \left]0, \frac{1}{c} - \frac{1}{r}\right[$, $\exists a_0 \in \mathbb{R}_+^*$, $\forall a \in [a_0, +\infty[$, $\Pi(a) \leq e^{-\lambda a}$.

(25) [illegible]

Finalement $\Pi = \max_{u\in\mathbb{R}_+} |\hat{\Pi}(u)| = 0$. $\forall x\in\mathbb{R}_+$, $\hat{\Pi}(x)=0$. $\forall x\in\mathbb{R}_+$, $\Pi_1(x)-\Pi_2(x)=0$.

$\forall x\in\mathbb{R}_+$, $\Pi_1(x)=\Pi_2(x)$. $\underline{\underline{\Pi_1=\Pi_2}}$.

c) Π est continue sur $\mathbb{R}_+$; $\lim_{a\to+\infty}\Pi(a)=0$ et $\forall a\in\mathbb{R}_+$, $\Pi(a)=P(L_1>a)+\int_{-\infty}^{a} f(u)\Pi(a-u)\,du$

Pour prouver que $\forall a\in\mathbb{R}_+$, $\Pi(a)=\frac{c}{r}e^{-a(\frac{1}{c}-\frac{1}{r})}$ il suffit de prouver

que $z : a \mapsto \frac{c}{r}e^{-a(\frac{1}{c}-\frac{1}{r})}$ a les mêmes qualités.

. z est continue sur $\mathbb{R}_+$. $\lim_{a\to+\infty} z(a)=0$ car $\frac{1}{c}-\frac{1}{r}>0$.

. notons que : $\forall a\in\mathbb{R}_+$, $z(a)=P(L_1>a)+\int_{-\infty}^{a} f(x)z(a-x)\,dx$.

Rappelons que : $\forall \alpha\in\mathbb{R}_+^*$, $\int_{-\infty}^{0} e^{\alpha t}\,dt$ existe et vaut $\frac{1}{\alpha}$. Soit $a\in\mathbb{R}_+$.

$\forall x\in\,]-\infty,0]$, $f(x)z(a-x)=\frac{1}{c+r}e^{x/r}\frac{c}{r}e^{-(a-x)(\frac{1}{c}-\frac{1}{r})}=\frac{c}{r(c+r)}e^{-a(\frac{1}{c}-\frac{1}{r})}e^{\frac{x}{c}}$.

$\int_{-\infty}^{0} e^{\frac{x}{c}}\,dx$ existe et vaut c donc $\int_{-\infty}^{0} f(x)z(a-x)\,dx$ existe et vaut $\frac{c^2}{r(c+r)}e^{-a(\frac{1}{c}-\frac{1}{r})}$.

$\forall x\in[0,a]$, $f(x)z(a-x)=\frac{1}{c+r}e^{-x/c}\frac{c}{r}e^{-(a-x)(\frac{1}{c}-\frac{1}{r})}=\frac{c}{r(c+r)}e^{-a(\frac{1}{c}-\frac{1}{r})}e^{-x/r}$

$\int_0^a f(x)z(a-x)\,dx=\frac{c}{r(c+r)}e^{-a(\frac{1}{c}-\frac{1}{r})}\left[-r e^{-x/r}\right]_0^a=\frac{c}{c+r}\left(e^{-a(\frac{1}{c}-\frac{1}{r})}-e^{-\frac{a}{c}}\right)$.

Rappelons que $P(L_1>a)=\frac{c}{c+r}e^{-\frac{a}{c}}$

Alors $P(L_1>a)+\int_{-\infty}^{a} f(x)z(a-x)\,dx=\frac{c}{c+r}e^{-\frac{a}{c}}+\frac{c^2}{r(c+r)}e^{-a(\frac{1}{c}-\frac{1}{r})}+\frac{c}{c+r}e^{-a(\frac{1}{c}-\frac{1}{r})}-\frac{c}{c+r}e^{-\frac{a}{c}}$

$P(L_1>a)+\int_{-\infty}^{a} f(x)z(a-x)\,dx=\frac{c}{c+r}\left(\frac{c}{r}+1\right)e^{-a(\frac{1}{c}-\frac{1}{r})}=\frac{c}{r}e^{-a(\frac{1}{c}-\frac{1}{r})}=z(a)$.

z est continue sur $\mathbb{R}_+$, $\lim\limits_{a \to +\infty} z(a) = 0$ et $\forall a \in \mathbb{R}_+$, $z(a) = P(U_1 > a) + \int_0^a f(x) z(a-x)\,dx$.

π ayant les mêmes qualités, b) permet de dire que π et z coïncident sur $\mathbb{R}_+$.

Finalement : $\forall a \in \mathbb{R}_+$, $\pi(a) = \frac{c}{r}\, e^{-a\left(\frac{1}{c} - \frac{1}{r}\right)}$.

Tiens c'est fini !