Corrigé

Exercice 1 ....

1) La fonction $x \mapsto \frac{1}{x^n(x+1)}$ est continue sur $[1,+\infty[$ et, on a $\frac{1}{x^n(x+1)} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{x^{n+1}}$ et comme $n+1 \geq 2 > 1$, l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{n+1}}$ converge et, grâce au critère d'équivalence pour les intégrales de fonctions continues et positives, on peut conclure :

$$\boxed{I_n \text{ est une intégrale convergente}}$$

2) a) On a les équivalences suivantes (valables pour tout x différent de -1 et 0) :

$$\frac{1}{x(x+1)} = \frac{a}{x} - \frac{b}{x+1} \Leftrightarrow \frac{1}{x(x+1)} = \frac{a(x+1)-bx}{x(x+1)} \Leftrightarrow \frac{1}{x(x+1)} = \frac{(a-b)x+a}{x(x+1)}.$$

Par identification des coefficients au numérateur, on obtient : $\begin{cases} a-b=0 \\ a=1 \end{cases}$.

En conclusion, on trouve $a=b=1$ et on a :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1,0\}, \ \frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}}$$

b) Pour tout réel x supérieur ou égal à 1, on a :

$$\int_1^A \frac{dx}{x(x+1)} = \int_1^A \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right) dx = \left[\ln x - \ln(x+1)\right]_1^A = \ln A - \ln(A+1) + \ln 2.$$

Pour terminer, $\lim\limits_{A \to +\infty} \left(\ln A - \ln(A+1)\right) = \lim\limits_{A \to +\infty} \ln \frac{A}{A+1} = 0$ d'où, après passage à la limite :

$$\boxed{I_1 = \ln 2}$$

3) a) Pour tout réel x supérieur ou égal à 1, on a $x+1 \geq 2$ donc, par décroissance de la fonction inverse sur $[2,+\infty[$, on obtient : $\frac{1}{x+1} \leq \frac{1}{2}$. Comme tout est positif, on peut écrire $0 \leq \frac{1}{x+1} \leq \frac{1}{2}$, et en multipliant par $\frac{1}{x^n} \geq 0$, on a :

$$0 \leq \frac{1}{x^n(x+1)} \leq \frac{1}{2x^n}$$

Il reste à intégrer de 1 à A, avec $A \geq 1$ (bornes dans l'ordre croissant) et on trouve : $0 \leq \int_1^A \frac{1}{x^n\left(x+1\right)} dx \leq \frac{1}{2}\int_1^A \frac{1}{x^n} dx$.

Ceci donne : $0 \leq \int_1^A \frac{1}{x^n\left(x+1\right)} dx \leq \frac{1}{2}\left[\frac{-1}{\left(n-1\right)x^{n-1}}\right]_1^A$

On a donc : $0 \leq \int_1^A \frac{1}{x^n\left(x+1\right)} dx \leq \frac{1}{2\left(n-1\right)}\left(1-\frac{1}{A^{n-1}}\right)$.

Comme $n \geq 2$, on a $\lim\limits_{A \to +\infty} \frac{1}{A^{n-1}} = 0$ et, après passage à la limite :

$$\boxed{\forall n \geq 2\,,\ 0 \leq I_n \leq \frac{1}{2(n-1)}}$$

b) Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{2(n-1)} = 0$, on obtient par encadrement :

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} I_n = 0}$$

4) a) Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on a : $I_n + I_{n+1} = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^n\,(x+1)} + \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{n+1}(x+1)}$. Par linéarité de l'intégration, on obtient :

$$I_n + I_{n+1} = \int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{x^n\,(x+1)} + \frac{1}{x^{n+1}(x+1)}\right) dx = \int_1^{+\infty} \frac{x+1}{x^{n+1}(x+1)} dx = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{n+1}} dx$$

On a déjà vu que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{n+1}} dx$ était convergente et de plus, on a :

$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{n+1}} dx = \lim\limits_{A \to +\infty} \int_1^A \frac{1}{x^{n+1}} dx = \lim\limits_{A \to +\infty} \left[\frac{-1}{nx^n}\right]_1^A = \lim\limits_{A \to +\infty} \frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{A^n}\right) = \frac{1}{n}$.

Finalement :

$$\boxed{I_n + I_{n+1} = \frac{1}{n}}$$

b) Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on a : $I_{n+1} - I_n = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{n+1}(x+1)} - \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^n\,(x+1)}$.

Par linéarité de l'intégration, on obtient :

$$I_{n+1} - I_n = \int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{x^{n+1}(x+1)} - \frac{1}{x^n\,(x+1)}\right) dx = \int_1^{+\infty} \frac{1-x}{x^{n+1}(x+1)} dx$$

Comme $x \geq 1$, on a $\frac{1-x}{x^{n+1}(x+1)} \leq 0$, et ainsi $I_{n+1} - I_n$ est l'intégrale, bornes dans l'ordre croissant, d'une fonction négative donc : $I_{n+1} - I_n \leq 0$.

Conclusion :

$$\boxed{\text{La suite } (I_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ est décroissante}}$$

c) Grâce à la décroissance de la suite (I_n), on a $I_n \geq I_{n+1}$ d'où l'on tire $2I_n \geq I_n + I_{n+1}$, et comme, avec la question 4a), on sait que $I_n + I_{n+1} = \dfrac{1}{n}$, on en déduit : $I_n \geq \dfrac{1}{2n}$.

D'après la question 3b), on sait que $I_n \leq \dfrac{1}{2(n-1)}$ et en regroupant ces deux dernières inégalités, on trouve :

$$\frac{1}{2n} \leq I_n \leq \frac{1}{2(n-1)}$$

En multipliant par $2n > 0$, on trouve : $1 \leq 2nI_n \leq \dfrac{n}{n-1}$. Par encadrement, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} 2nI_n = 1$, ce qui signifie :

$$\boxed{I_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2n}}$$

La série de terme général $\dfrac{1}{n}$ est divergente donc, grâce au critère d'équivalence pour les séries à termes positifs, on peut conclure :

$$\boxed{\text{La série de terme général } I_n \text{ diverge}}$$

5) a) La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x^n(x+1)^2}$ est continue sur $[1,+\infty[$ et, on a $\dfrac{1}{x^n(x+1)^2} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x^{n+2}}$ et comme $n+2 \geq 2 > 1$, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{n+2}}$ converge et, grâce au critère d'équivalence pour les intégrales de fonctions continues et positives, on peut conclure :

$$\boxed{J_n \text{ est une intégrale convergente}}$$

b) Pour tout réel x supérieur ou égal à 1, on a :

$$\int_1^A \frac{dx}{(x+1)^2} = \left[\frac{-1}{x+1}\right]_1^A = \frac{1}{2} - \frac{1}{A+1}$$

Comme $\lim\limits_{A\to+\infty} \dfrac{1}{A+1} = 0$, on a, après passage à la limite :

$$\boxed{J_0 = \frac{1}{2}}$$

6) a) Pour tout k de $\mathbb{N}^*$, on a : $J_k + J_{k-1} = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^k (x+1)^2} + \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{k-1}(x+1)^2}$. Par linéarité de l'intégration, on obtient :

$$J_k + J_{k-1} = \int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{x^k (x+1)^2} + \frac{1}{x^{k-1}(x+1)^2} \right) dx = \int_1^{+\infty} \frac{1+x}{x^k (x+1)^2} dx = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^k (x+1)} dx .$$

On a donc :

$$\boxed{J_k + J_{k-1} = I_k}$$

b) De l'égalité précédente, on tire, pour tout n de $\mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} I_k = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \left(J_k + J_{k-1} \right) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} J_k + \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} J_{k-1} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} J_k + \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i J_i$$

En écrivant $\left(-1\right)^i = -\left(-1\right)^{i-1}$, on obtient : $\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} I_k = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} J_k - \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^{i-1} J_i$.

Par télescopage, on trouve : $\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} I_k = (-1)^{n-1} J_n + J_0$. Comme $J_0 = \frac{1}{2}$, on a finalement :

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} I_k = (-1)^{n-1} J_n + \frac{1}{2}}$$

c) Pour tout réel x supérieur ou égal à 1, on a $x+1 \geq 2$ donc $\left(x+1\right)^2 \geq 4$, par stricte positivité de $\left(x+1\right)^2$ et par décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$, on obtient : $0 \leq \frac{1}{\left(x+1\right)^2} \leq \frac{1}{4}$.

En multipliant par $\frac{1}{x^n} \geq 0$, on trouve : $0 \leq \frac{1}{x^n \left(x+1\right)^2} \leq \frac{1}{4x^n}$.

Le calcul est le même qu'à la question 3a) où l'on a montré que $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^n} dx = \frac{1}{n-1}$

On a donc :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2,\ 0 \leq J_n \leq \frac{1}{4(n-1)}}$$

Comme $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{4(n-1)} = 0$, on en déduit, par encadrement :

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} J_n = 0}$$

d) D'après la question 6b), on a : $\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}I_k=(-1)^{n-1}J_n+\frac{1}{2}$

On en déduit : $\left|\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}I_k-\frac{1}{2}\right|=\left|(-1)^{n-1}J_n\right|=J_n$, car J_n est positif.

Comme $\lim_{n\to+\infty}J_n=0$, on obtient $\lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}I_k-\frac{1}{2}\right)=0$, ce qui prouve que :

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}I_k=\frac{1}{2}$$

Ceci signifie que la série de terme général $(-1)^{n-1}I_n$ est convergente et sa somme est :

$$\boxed{\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^{k-1}I_k=\frac{1}{2}}$$

7) Les commandes `Scilab`, une fois complétées, sont les suivantes :

```
J = I-J // calcul de J1
for k = 2:n
I = 1/(k-1)-I // calcul de In
J = I-J // calcul de Jn
end
```

Pour la deuxième ligne, on a utilisé le fait que $J_1=I_1-J_0$.

Pour la troisième ligne, on a utilisé le fait que $I_k=\frac{1}{k-1}-I_{k-1}$ et que $J_k=I_k-J_{k-1}$.

Exercice 2 ....

1) a) Pour tout réel x positif ou nul, on a :

$F_Y(x)=P(Y\le x)=P(|X|\le x)=P(-x\le X\le x)=\Phi(x)-\Phi(-x)$

Comme $\Phi(-x)=1-\Phi(x)$, on obtient :

$$\boxed{\forall x\ge 0,\ F_Y(x)=2\Phi(x)-1}$$

Comme Y prend ses valeurs dans $\mathbb{R}_+$, on a : $\forall x<0$, $F_Y(x)=0$.

On peut donc définir F_Y sur $\mathbb{R}$ tout entier par :

$$F_Y(x)=\begin{cases}2\Phi(x)-1 \text{ si } x\ge 0\\ 0 \text{ si } x<0\end{cases}$$

• La fonction F_Y est de classe C^1 (donc continue) sur chacun des intervalles $]-\infty,0[$ et $]0,+\infty[$ puisqu'elle est nulle sur $]-\infty,0[$, alors que sur $]0,+\infty[$, c'est une fonction affine de Φ, elle-même de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ donc sur $]0,+\infty[$.

• En 0, on a $\lim\limits_{x\to 0^-} F_Y(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} 0 = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} F_Y(x) = F_Y(0) = 2\Phi(0) - 1 = 0$ donc F_Y est continue en 0.

Bilan : la fonction F_Y est continue sur $\mathbb{R}$, de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en 0, donc :

$$\boxed{Y \text{ est une variable à densité}}$$

On trouve une densité f_Y de Y en dérivant F_Y, sauf en 0, ce qui donne :

$$F_Y'(x) = \begin{cases} 2\varphi(x) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

En posant $f_Y(0) = 2\varphi(0)$, on a une densité f_Y de Y définie par :

$$f_Y(x) = \begin{cases} 2\varphi(x) & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

b) Comme f_Y est nulle sur $]-\infty,0[$, on a $\int_{-\infty}^{0} x\, f_Y(x)dx = 0$.

D'autre part, on a, pour tout A positif :

$$\int_0^A x\, f_Y(x)dx = 2\int_0^A x\,\varphi(x)dx = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^A x\, e^{-x^2/2}dx = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\left[-e^{-x^2/2}\right]_0^A.$$

$$\int_0^A x\, f_Y(x)dx = = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\left(1 - e^{-A^2/2}\right).$$

Comme $\lim\limits_{A\to+\infty} e^{-A^2/2} = 0$, on conclut que $\int_0^{+\infty} x\, f_Y(x)dx$ est convergente, et après passage à la limite, on trouve :

$$\boxed{E(Y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}}$$

c) On a $Y^2 = |X|^2 = X^2$ et comme X^2 a une espérance qui vaut 1, on est sûr que Y^2 en a une aussi et on a : $E(Y^2) = 1$.

Grâce au théorème de Koenig-Huygens, on sait que $V(Y) = E(Y^2) - (E(Y))^2$ et on trouve :

$$\boxed{V(Y) = 1 - \frac{2}{\pi}}$$

2) a) La fonction $t \mapsto \sqrt{2t}$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}_+^*$ donc le changement de variable $u = \sqrt{2t}$ est licite et, comme $t = \dfrac{u^2}{2}$ et $dt = u\,du$, il fournit :

$$\int_0^{+\infty} g(t)dt = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{\pi t}}dt = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u^2/2}}{\sqrt{\pi\frac{u^2}{2}}}u\,du = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty} \frac{e^{-u^2/2}}{\sqrt{u^2}}u\,du$$

En simplifiant, on a (u est positif donc $\sqrt{u^2} = u$) :

$$\boxed{\int_0^{+\infty} g(t)dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty} e^{-u^2/2}du}$$

b) La fonction g est bien définie sur $\mathbb{R}$. De plus, elle est continue sur $\mathbb{R}_-^*$ (sa restriction à cet intervalle est la fonction nulle) et sur $\mathbb{R}_+^*$ (sa restriction à cet intervalle est le quotient bien défini de deux fonctions continues), elle est positive (la fonction nulle l'est et les fonctions exponentielle et racine carrée aussi).
Pour finir, l'intégrale $\int_{-\infty}^0 g(t)dt$ est nulle (car g est nulle sur $\mathbb{R}_-^*$) et, d'après la question précédente, comme l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-u^2/2}du$ converge (référence à la loi normale centrée réduite pour laquelle on a $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2/2}du = \sqrt{2\pi}$), l'intégrale $\int_0^{+\infty} g(t)dt$ converge également et on a :

$$\int_0^{+\infty} g(t)dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty} e^{-u^2/2}du = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2/2}du = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sqrt{2\pi} = 1$$

La deuxième égalité est justifiée par la parité de la fonction $u \mapsto e^{-u^2/2}$.
La troisième égalité est justifiée par le fait que $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-u^2/2}du = 1$ (loi normale centrée réduite).
Conclusion :

$$\boxed{g \text{ peut être considérée comme une densité}}$$

3) a) On a $T = \sqrt{2Z}$ et Z prend ses valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ donc $T(\Omega) = \mathbb{R}_+^*$.
De plus, en notant F_T la fonction de répartition de T, on a :

$$\forall x > 0,\ F_T(x) = P(T \le x) = P\left(\sqrt{2Z} \le x\right)$$

La fonction $t \mapsto t^2$ est une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}_+^*$, croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, donc on a, en élevant au carré : $\forall x > 0,\ F_T(x) = P(2Z \le x^2) = P\left(Z \le \dfrac{x^2}{2}\right) = G\left(\dfrac{x^2}{2}\right)$.
Comme $T(\Omega) = \mathbb{R}_+^*$, on a aussi : $\forall x \le 0,\ F_T(x) = 0$.

En dérivant $F_T(x)$, sauf en 0, on obtient : $F_T'(x)=\begin{cases} xg\left(\dfrac{x^2}{2}\right) \text{ si } x>0 \\ 0 \text{ si } x<0 \end{cases}$.

En posant $f_T(0)=0$, on a une densité f_T de T définie par :

$$f_T(x)=\begin{cases} x\dfrac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{\pi\dfrac{x^2}{2}}} \text{ si } x>0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

En arrangeant un peu, on obtient :

$$f_T(x)=\begin{cases} \dfrac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}} \text{ si } x>0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}e^{-x^2/2} \text{ si } x>0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{2}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2} \text{ si } x>0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

On constate que les fonctions f_T et f_Y ne diffèrent qu'en 0 donc :

$$\boxed{T \text{ suit la même loi que } Y}$$

b) On a $Z=\dfrac{T^2}{2}$ et T possède un moment d'ordre 2 (puisque Y qui a la même loi que T en possède un) donc Z possède une espérance et, par linéarité de l'espérance, on trouve : $E(Z)=\dfrac{1}{2}E(T^2)=\dfrac{1}{2}E(Y^2)$

On a vu que $E(Y^2)=1$, ce qui permet de conclure :

$$\boxed{E(Z)=\frac{1}{2}}$$

4) Comme $Z=\dfrac{T^2}{2}$ et comme T suit la même loi que Y, alors Z suit la même loi que $\dfrac{Y^2}{2}$. Comme de plus, $\dfrac{Y^2}{2}=\dfrac{X^2}{2}$, il suffit de simuler $\dfrac{X^2}{2}$ pour simuler Z.

La commande `Scilab` demandée est donc la suivante :

```
Z = grand(1,1,'nor',0,1)^2/2
```

5) a) Pour tout x strictement positif, on a $x^2g(x)=\dfrac{x\sqrt{x}}{\sqrt{\pi}}e^{-x}$ et on a :

$$\int_0^{+\infty} x^2g(x)dx=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty} x\sqrt{x}e^{-x}dx$$

On peut alors considérer que $\int_0^{+\infty} x^2 g(x)dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}} E\left(W\sqrt{W}\right)$, où W suit la loi exponentielle de paramètre 1. D'après le cours d'estimation, en notant $(W_1,...,W_n)$ un échantillon de la loi de W, la moyenne empirique $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} W_k\sqrt{W_k}$ est un estimateur sans biais et convergent de $E\left(W\sqrt{W}\right)$.

Une valeur approchée de $\frac{1}{\sqrt{\pi}} E\left(W\sqrt{W}\right)$ est donnée par $\frac{1}{\sqrt{\pi}} \times \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} w_k\sqrt{w_k}$, où les w_k sont des réalisations des variables $W_1,...,W_n$, ceci pour une valeur de n assez grande.

Les commandes proposées permettent donc d'obtenir une valeur approchée, pour n assez grand, de $E(Z^2) = \int_0^{+\infty} x^2 g(x)dx$.

b) Comme $Z^2 = \frac{T^4}{4}$, on a : $E(Z^2) = \frac{1}{4}E(T^4) = \frac{1}{4}E(Y^4) = \frac{1}{4}E(X^4)$

On a admis que $E(X^4) = 3$ donc la valeur exacte de $E(Z^2)$ est :

$$\boxed{E(Z^2) = \frac{3}{4}}$$

Exercice 3 ....

1) Comme f est un endomorphisme symétrique, il est "ortho-diagonalisable" et ainsi, il existe une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$, que l'on notera $\mathcal{B}' = (u_1, u_2, ..., u_n)$, composée de vecteurs propres de f.

2) a) Pour tout x de $\mathbb{R}^n$, il existe des réels $\alpha_1,...,\alpha_n$ tels que $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i$ et on a, par linéarité de f : $\left\langle x, f(x) \right\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i, \sum_{j=1}^{n} \alpha_j f(u_j) \right\rangle$. Comme les u_j sont des vecteurs propres de f, on obtient, en notant λ_j la valeur propre associée à u_j :

$$\left\langle x, f(x) \right\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i, \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \lambda_j u_j \right\rangle$$

Par bilinéarité du produit scalaire, on a alors : $\left\langle x, f(x) \right\rangle = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \alpha_i \alpha_j \lambda_j \left\langle u_i, u_j \right\rangle$.

Comme la famille $(u_1, u_2, ..., u_n)$ est orthonormale, les produits scalaires sont tous nuls sauf pour $j = i$ et comme $\left\langle u_i, u_i \right\rangle = \| u_i \|^2 = 1$, il reste $\left\langle x, f(x) \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 \lambda_i$.

Par hypothèse, les valeurs propres de f sont positives donc on peut conclure :

$$\boxed{\left\langle x, f(x) \right\rangle \geq 0}$$

b) D'après le calcul précédent, on a $\left\langle x, f(x) \right\rangle = 0$ si et seulement si : $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\alpha_i^2 \lambda_i = 0$ (car une somme de termes positifs n'est nulle que si chaque terme est nul). Comme les valeurs propres λ_i sont toutes strictement positives, on obtient : $\left\langle x, f(x) \right\rangle = 0 \Leftrightarrow \forall i \in [\![1,n]\!]$, $\alpha_i^2 = 0$.
En simplifiant : $\left\langle x, f(x) \right\rangle = 0 \Leftrightarrow \forall i \in [\![1,n]\!]$, $\alpha_i = 0$.
Ceci veut dire :

$$\boxed{\left\langle x, f(x) \right\rangle = 0 \text{ si, et seulement si : } x = 0}$$

c) • Par définition d'un produit scalaire, φ est bien à valeurs dans $\mathbb{R}$.

• On a $\varphi(x,y) = \left\langle x, f(y) \right\rangle$ donc $\varphi(y,x) = \left\langle y, f(x) \right\rangle = \left\langle f(x), y \right\rangle$ et, comme *f* est un endomorphisme symétrique, on a : $\varphi(y,x) = \left\langle x, f(y) \right\rangle = \varphi(x,y)$.
Ainsi, φ est symétrique.

• La linéarité à gauche de φ découle de celle du produit scalaire et par symétrie, φ est donc bilinéaire.

• D'après la question 2a), φ est positive et avec la question 2b), on est certain que φ est définie positive.
Conclusion :

$$\boxed{\varphi \text{ est un produit scalaire sur } \mathbb{R}^n}$$

3) a) Soit *g* l'endomorphisme défini par : $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $g(u_i) = \sqrt{\lambda_i}\, u_i$.
Remarque. L'endomorphisme *g* est bien défini puisque l'on donne les images des vecteurs d'une base de $\mathbb{R}^n$.
• On a bien :
$\forall i \in [\![1,n]\!]$, $(g \circ g)(u_i) = g(g(u_i)) = g\left(\sqrt{\lambda_i}\, u_i\right) = \sqrt{\lambda_i}\left(\sqrt{\lambda_i}\, u_i\right) = \lambda_i\, u_i = f(u_i)$.
Les endomorphismes g^2 et *f* coïncident sur une base de $\mathbb{R}^n$ donc ils sont égaux.
• Comme les valeurs propres λ_i de *f* sont strictement positives, il en est de même des valeurs propres $\sqrt{\lambda_i}$ de *g*.
• Il reste à montrer que *g* est symétrique pour le produit scalaire canonique.
La matrice de *g* dans la base orthonormale $\mathcal{B}' = (u_1, u_2, ..., u_n)$ est diagonale, donc symétrique, ce qui fait que *g* est un endomorphisme symétrique.

b) D'après la question 3a), 0 n'est pas valeur propre de *g* donc on peut conclure :

$$\boxed{g \text{ est bijectif}}$$

c) Calculons, pour tout couple (i, j) de $[\![1,n]\!]^2$ le produit scalaire $\varphi\left(g^{-1}(e_i), g^{-1}(e_j)\right)$. Par définition de φ, on a :

$\varphi\left(g^{-1}(e_i), g^{-1}(e_j)\right) = \left\langle g^{-1}(e_i), f\left(g^{-1}(e_j)\right)\right\rangle = \left\langle g^{-1}(e_i), g^2\left(g^{-1}(e_j)\right)\right\rangle$.

En simplifiant, on trouve : $\varphi\left(g^{-1}(e_i), g^{-1}(e_j)\right) = \left\langle g^{-1}(e_i), g(e_j)\right\rangle$.

Comme g est symétrique pour le produit scalaire canonique, on a :

$$\left\langle g^{-1}(e_i), g(e_j)\right\rangle = \left\langle g\left(g^{-1}(e_i)\right), e_j\right\rangle = \left\langle e_i, e_j\right\rangle$$

On obtient alors :

$$\varphi\left(g^{-1}(e_i), g^{-1}(e_j)\right) = \left\langle e_i, e_j\right\rangle$$

Comme $(e_1, e_2, ..., e_n)$ est orthonormale pour le produit scalaire $\langle\ ,\ \rangle$, on a :

$$\varphi\left(g^{-1}(e_i), g^{-1}(e_j)\right) = \begin{cases} 1 \text{ si } i = j \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

On peut donc affirmer que $(g^{-1}(e_1), g^{-1}(e_2), ..., g^{-1}(e_n))$ est une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$ pour le produit scalaire φ, en tant que famille orthonormale contenant n vecteurs d'un espace de dimension n.

Problème ....

Partie 1

1) On a $\binom{n}{r} = \dfrac{n(n-1)...(n-r+1)}{r!}$ et, comme chaque facteur du numérateur est équivalent à n (r est fixé), on obtient :

$$\boxed{\binom{n}{r} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^r}{r!}}$$

2) a) Comme $x \in]0,1[$, on a (c'est un résultat du cours sur les croissances comparées) :

$$\boxed{\forall x \in]0,1[,\ \lim_{n\to+\infty} n^{r+2}x^n = 0}$$

Pour la "culture", une démonstration de ce résultat peut se faire de la façon suivante :

On a : $n^{r+2}x^n = n^{r+2}e^{n\ln x} = \dfrac{1}{(\ln x)^{r+2}}(n\ln x)^{r+2}\, e^{n\ln x}$.

En posant $X = n\ln x$, on obtient alors (comme $\ln x < 0$) :

$\lim\limits_{n\to+\infty} n^{r+2}x^n = \dfrac{1}{(\ln x)^{r+2}} \lim\limits_{X\to-\infty} X^{r+2}e^X = 0$ (croissances comparées plus "classiques").

b) D'après la première question, on a : $n^2\binom{n}{r}x^n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{r!}n^{r+2}x^n$.

Grâce à la question 2a), on en déduit : $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2\binom{n}{r}x^n = \lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{r!}n^{r+2}x^n = 0$.

Ceci implique que : $\binom{n}{r}x^n \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$. Comme la série de terme général $\dfrac{1}{n^2}$ converge (série de Riemann de paramètre $2>1$), on en déduit, avec le critère de négligeabilité pour les séries à termes positifs, que :

$$\boxed{\text{La série } \sum_n \binom{n}{r}x^n \text{ est convergente}}$$

3) a) On a $S_0=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\binom{n}{0}x^n=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}x^n=\dfrac{1}{1-x}$, puisque $|x|<1$.

b) On a aussi $(1-x)S_{r+1}=(1-x)\sum\limits_{n=r+1}^{+\infty}\binom{n}{r+1}x^n=\sum\limits_{n=r+1}^{+\infty}\binom{n}{r+1}x^n-\sum\limits_{n=r+1}^{+\infty}\binom{n}{r+1}x^{n+1}$.

En posant $k=n+1$ dans la deuxième somme, on obtient :

$$(1-x)S_{r+1}=\sum_{n=r+1}^{+\infty}\binom{n}{r+1}x^n-\sum_{k=r+2}^{+\infty}\binom{k-1}{r+1}x^k$$

En isolant le terme d'indice $r+1$ de la première somme, on a :

$$(1-x)S_{r+1}=x^{r+1}+\sum_{n=r+2}^{+\infty}\binom{n}{r+1}x^n-\sum_{k=r+2}^{+\infty}\binom{k-1}{r+1}x^k$$

En regroupant les sommes restantes, on trouve :

$$(1-x)S_{r+1}=x^{r+1}+\sum_{n=r+2}^{+\infty}\left(\binom{n}{r+1}-\binom{n-1}{r+1}\right)x^n$$

Grâce à la relation de Pascal, on obtient :

$$(1-x)S_{r+1}=x^{r+1}+\sum_{n=r+2}^{+\infty}\binom{n-1}{r}x^n$$

Le changement d'indice $k=n-1$ donne alors :

$$(1-x)S_{r+1}=x^{r+1}+\sum_{k=r+1}^{+\infty}\binom{k}{r}x^{k+1}$$

En ajoutant et retranchant le terme d'indice r de la somme, on en déduit :

$$(1-x)S_{r+1}=x^{r+1}+\sum_{k=r}^{+\infty}\binom{k}{r}x^{k+1}-x^{r+1}=\sum_{k=r}^{+\infty}\binom{k}{r}x^{k+1}=x\sum_{k=r}^{+\infty}\binom{k}{r}x^k$$

On a bien :

$$\boxed{(1-x)S_{r+1}=xS_r}$$

c) D'après ce qui précède, comme $1-x$ n'est pas nul, on a $S_{r+1}=\frac{x}{1-x}S$, ce qui montre que la suite (S_r) est géométrique de raison $\frac{x}{1-x}$. Son premier terme est $S_0=\frac{1}{1-x}$ donc on en déduit : $\forall x\in\,]0,1[\,,\ \forall r\in\mathbb{N}\,,\ S_r=\left(\frac{x}{1-x}\right)^r\times\frac{1}{1-x}$.
En d'autres termes :

$$\boxed{\forall x\in\,]0,1[\,,\ \forall r\in\mathbb{N}\,,\ \sum_{n=r}^{+\infty}\binom{n}{r}x^n=\frac{x^r}{(1-x)^{r+1}}}$$

d) En divisant par x^r qui est strictement positif donc différent de 0, on en déduit :

$$\boxed{\forall x\in\,]0,1[\,,\ \forall k\in\mathbb{N}\,,\ \sum_{n=r}^{+\infty}\binom{n}{r}x^{n-r}=\frac{1}{(1-x)^{r+1}}}$$

Partie 2

1) a) En notant D_k l'événement « le joueur ne joue pas la k ème manche », on a :

- $(X=0)=D_1$ donc $P(X=0)=\alpha$.
- Pour tout entier naturel n non nul : $(X=n)=\overline{D_1}\cap\overline{D_2}\cap\ldots\cap\overline{D_n}\cap D_{n+1}$. On a alors : $P(X=n)=P\left(\overline{D_1}\right)P_{\overline{D_1}}\left(\overline{D_2}\right)P_{\overline{D_1}\cap\overline{D_2}}\left(\overline{D_3}\right)\ldots P_{\overline{D_1}\cap\ldots\cap\overline{D_{n-1}}}\left(\overline{D_n}\right)P_{\overline{D_1}\cap\ldots\cap\overline{D_n}}\left(D_{n+1}\right)$

On en déduit, d'après la règle du jeu : $P(X=n)=(1-\alpha)^n\alpha$.
La dernière formule restant valable pour $n=0$, on peut résumer :

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\ P(X=n)=(1-\alpha)^n\alpha}$$

b) Comme $T=X+1$, on a $T(\Omega)=\mathbb{N}^*$. De plus, pour tout k de $\mathbb{N}^*$, on a :

$$P(T=k)=P(X+1=k)=P(X=k-1)=(1-\alpha)^{k-1}\alpha$$

On peut conclure :

$$\boxed{T\text{ suit la loi géométrique de paramètre }\alpha}$$

D'après le cours, on a $E(T)=\frac{1}{\alpha}$ et comme $X=T-1$, on en déduit que X a une espérance et : $E(X)=E(T-1)=E(T)-1=\frac{1}{\alpha}-1$. En simplifiant, on trouve :

$$\boxed{E(X)=\frac{1-\alpha}{\alpha}}$$

c) De même, comme T a une variance, X en a une aussi et :

$$V(X)=V(T-1)=1^2V(T)=V(T)$$

En remplaçant, on obtient :

$$\boxed{V(X)=\frac{1-\alpha}{\alpha^2}}$$

2) a) Comme les manches sont jouées de façon indépendante et comme elles donnent lieu au succès du joueur avec la probabilité p, la loi de Y, conditionnellement à l'événement $(X=n)$ est la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$, ceci restant valable même si $n=0$. On en déduit :

$$\boxed{P_{(X=n)}(Y=r)=\begin{cases}\binom{n}{r}p^r(1-p)^{n-r} \text{ si } 0\le r\le n\\ 0 \text{ si } n<r\end{cases}}$$

b) Comme le nombre de manches jouées est un entier naturel, alors le nombre de manches gagnées aussi et on a $Y(\Omega)=\mathbb{N}$.

En écrivant la formule des probabilités totales associée au système complet d'événements $(X=n)_{n\in\mathbb{N}}$, ces événements étant tous de probabilités non nulles, on obtient :

$$\forall r\in\mathbb{N},\ P(Y=r)=\sum_{n=0}^{+\infty}P(X=n)P_{(X=n)}(Y=r)$$

Si $r>n$, la probabilité $P_{(X=n)}(Y=r)$ est nulle (on ne peut pas obtenir plus de succès que de manches jouées) et il reste :

$$\forall r\in\mathbb{N},\ P(Y=r)=\sum_{n=r}^{+\infty}P(X=n)P_{(X=n)}(Y=r)$$

En remplaçant chacune des probabilités par sa valeur, on trouve :

$$\forall r\in\mathbb{N},\ P(Y=r)=\sum_{n=r}^{+\infty}(1-\alpha)^n\alpha\binom{n}{r}p^r(1-p)^{n-r}=\alpha p^r\sum_{n=r}^{+\infty}(1-\alpha)^n\binom{n}{r}(1-p)^{n-r}$$

En écrivant $(1-\alpha)^n=(1-\alpha)^r(1-\alpha)^{n-r}$, on a :

$$\forall r\in\mathbb{N},\ P(Y=r)=\alpha p^r(1-\alpha)^r\sum_{n=r}^{+\infty}\binom{n}{r}(1-\alpha)^{n-r}(1-p)^{n-r}$$

Pour finir, on a $\displaystyle\sum_{n=r}^{+\infty}\binom{n}{r}(1-\alpha)^{n-r}(1-p)^{n-r}=\sum_{n=r}^{+\infty}\binom{n}{r}\big((1-\alpha)(1-p)\big)^{n-r}$

Comme α et p sont dans $]0,1[$, on est certain que $(1-\alpha)(1-p)$ appartient à $]0,1[$ et on peut appliquer la formule montrée dans le préliminaire (avec $x=(1-\alpha)(1-p)$, ce qui donne :

$$\sum_{n=r}^{+\infty}\binom{n}{r}\big((1-\alpha)(1-p)\big)^{n-r}=\frac{1}{\big(1-(1-\alpha)(1-p)\big)^{r+1}}$$

En reportant dans l'expression de $P(Y=r)$, on obtient :

$$\boxed{\forall r \in \mathbb{N}\,,\ P(Y=r)=\frac{\alpha\big(p(1-\alpha)\big)^r}{(\alpha+p-\alpha p)^{r+1}}}$$

3) • On peut écrire :

$$\forall r \in \mathbb{N}\,,\ P(Y=r)=\left(\frac{p(1-\alpha)}{\alpha+p-\alpha p}\right)^r \frac{\alpha}{\alpha+p-\alpha p}=\left(\frac{p(1-\alpha)}{\alpha+p-\alpha p}\right)^r\left(1-\frac{p(1-\alpha)}{\alpha+p-\alpha p}\right)$$

On constate alors que Y suit une loi du même type que celle suivie par X, mais en remplaçant α par $\beta=\dfrac{\alpha}{\alpha+p-\alpha p}$ et bien sûr, $1-\alpha$ par $1-\beta=\dfrac{p(1-\alpha)}{\alpha+p-\alpha p}$.

On montre, pour commencer, que $\beta\in\,]0,1[$:

On a $\beta=\dfrac{\alpha}{\alpha+p(1-\alpha)}$, ce qui permet d'assurer que :

- $\beta>0$ puisque $\alpha>0$ et $p(1-\alpha)>0$ puisque $p>0$ et $\alpha<1$.
- $\beta<1$ puisque $\alpha<\alpha+p(1-\alpha)$.

En conclusion : $\beta\in\,]0,1[$.

• Espérance de Y.

On a donc : $E(Y)=\dfrac{1-\beta}{\beta}=\dfrac{\dfrac{p(1-\alpha)}{\alpha+p-\alpha p}}{\dfrac{\alpha}{\alpha+p-\alpha p}}$

Conclusion :

$$\boxed{E(Y)=\frac{p(1-\alpha)}{\alpha}}$$

Remarque. Après une petite justification, on pouvait utiliser la formule de l'espérance totale. Puisque la loi de Y conditionnellement à l'événement $(X=n)$ est la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$, on a $E(Y\mid[X=n])=np$ et ensuite, on obtient :

$E(Y)=\sum_{n=0}^{+\infty}P(X=n)E(Y\mid[X=n])=\sum_{n=0}^{+\infty}\alpha(1-\alpha)^n np=\alpha p\sum_{n=0}^{+\infty}n(1-\alpha)^n$. Comme le premier terme est nul, on peut écrire : $E(Y)=\alpha p\sum_{n=1}^{+\infty}n(1-\alpha)^n$ et en mettant $1-\alpha$ en facteur, on retrouve bien : $E(Y)=\alpha p(1-\alpha)\sum_{n=1}^{+\infty}n(1-\alpha)^{n-1}=\dfrac{p(1-\alpha)}{\alpha}$.

• Variance de Y.

De même, toujours en référence à la loi suivie par X en remplaçant α par β, on a :

$$V(Y)=\frac{1-\beta}{\beta^2}=\frac{E(Y)}{\beta}=\frac{\dfrac{p(1-\alpha)}{\alpha}}{\dfrac{\alpha}{\alpha+p-\alpha p}}$$

Finalement :

$$\boxed{V(Y)=\frac{p(1-\alpha)(p+\alpha-p\alpha)}{\alpha^2}}$$

4) a) Le joueur gagne un euro pour chaque manche gagnée (et il y a Y manches gagnées) et perd un euro pour chaque manche perdue (et il y a $X-Y$ manches perdues) donc : $G=Y\times 1+(X-Y)\times(-1)$.

Conclusion :

$$\boxed{G=2Y-X}$$

b) Toujours par linéarité de l'espérance, on a :

$$E(G)=E(2Y-X)=2E(Y)-E(X)$$

En remplaçant par les valeurs déjà obtenues, on obtient :

$$E(G)=2\frac{p(1-\alpha)}{\alpha}-\frac{1-\alpha}{\alpha}$$

En arrangeant, on trouve :

$$\boxed{E(G)=\frac{(1-\alpha)(2p-1)}{\alpha}}$$

c) Comme on admet que $E(XY)$ existe, on a, par définition :

$$E(XY)=\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{r=0}^{+\infty}nr\,P([X=n]\cap[Y=r])=\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{r=0}^{n}nr\,P(X=n)P_{(X=n)}(Y=r).$$

On peut écrire : $E(XY)=\sum_{n=0}^{+\infty}n\,P(X=n)\sum_{r=0}^{n}r\,P_{(X=n)}(Y=r)$

On reconnaît dans la somme intérieure l'espérance conditionnelle de Y, sachant que l'événement $(X=n)$ est réalisé, qui vaut np, grâce à la question 2a).

En remplaçant, on obtient : $E(XY)=p\sum_{n=0}^{+\infty}n^2\,P(X=n)$.

On reconnaît maintenant le moment d'ordre 2 de X qui est égal à :

$$V(X)+(E(X))^2=\frac{1-\alpha}{\alpha^2}+\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)^2=\frac{1-\alpha+(1-\alpha)^2}{\alpha^2}=\frac{(1-\alpha)(2-\alpha)}{\alpha^2}$$

On a donc :

$$\boxed{E(XY)=\frac{p(1-\alpha)(2-\alpha)}{\alpha^2}}$$

d) Comme $G = 2Y - X$, on a : $V(G) = V(2Y) + V(X) - 2\,\text{Cov}(X, 2Y)$.

On en déduit : $V(G) = 4V(Y) + V(X) - 4\,\text{Cov}(X, Y)$

La covariance de X et Y existe puisque X et Y ont une espérance et $E(XY)$ existe.

D'après la formule de Huygens, on a : $\text{Cov}(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$.

On en déduit : $\text{Cov}(X,Y) = \dfrac{p(1-\alpha)(2-\alpha)}{\alpha^2} - \dfrac{1-\alpha}{\alpha} \times \dfrac{p(1-\alpha)}{\alpha}$.

En arrangeant, on obtient : $\text{Cov}(X,Y) = \dfrac{p(1-\alpha)\big((2-\alpha)-(1-\alpha)\big)}{\alpha^2} = \dfrac{p(1-\alpha)}{\alpha^2}$

On a alors successivement :

$$V(G) = \frac{4p(1-\alpha)(p+\alpha-p\alpha)}{\alpha^2} + \frac{1-\alpha}{\alpha^2} - \frac{4p(1-\alpha)}{\alpha^2}$$

$$V(G) = \frac{(1-\alpha)\big(4p(p+\alpha-p\alpha)+1-4p\big)}{\alpha^2}.$$

Finalement, on obtient :

$$\boxed{V(G) = \frac{(1-\alpha)\left(4p^2+4p\alpha-4p^2\alpha-4p+1\right)}{\alpha^2}}$$

5) a) On a vu que $T = X + 1$ suit la loi géométrique de paramètre α et que Y est le nombre de succès obtenus en X épreuves donc les commandes `Scilab` complétées sont :

```
alpha = input('entrez la valeur de alpha :')
p = input('entrez la valeur de p :')
X = grand(1,1,'geom',alpha)-1
Y = grand(1,1,'bin',X,p)
disp(X)
disp(Y)
```

b) Comme $G = 2Y - X$, les commandes à ajouter sont :

```
G = 2*Y-X
disp(G)
```